



Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

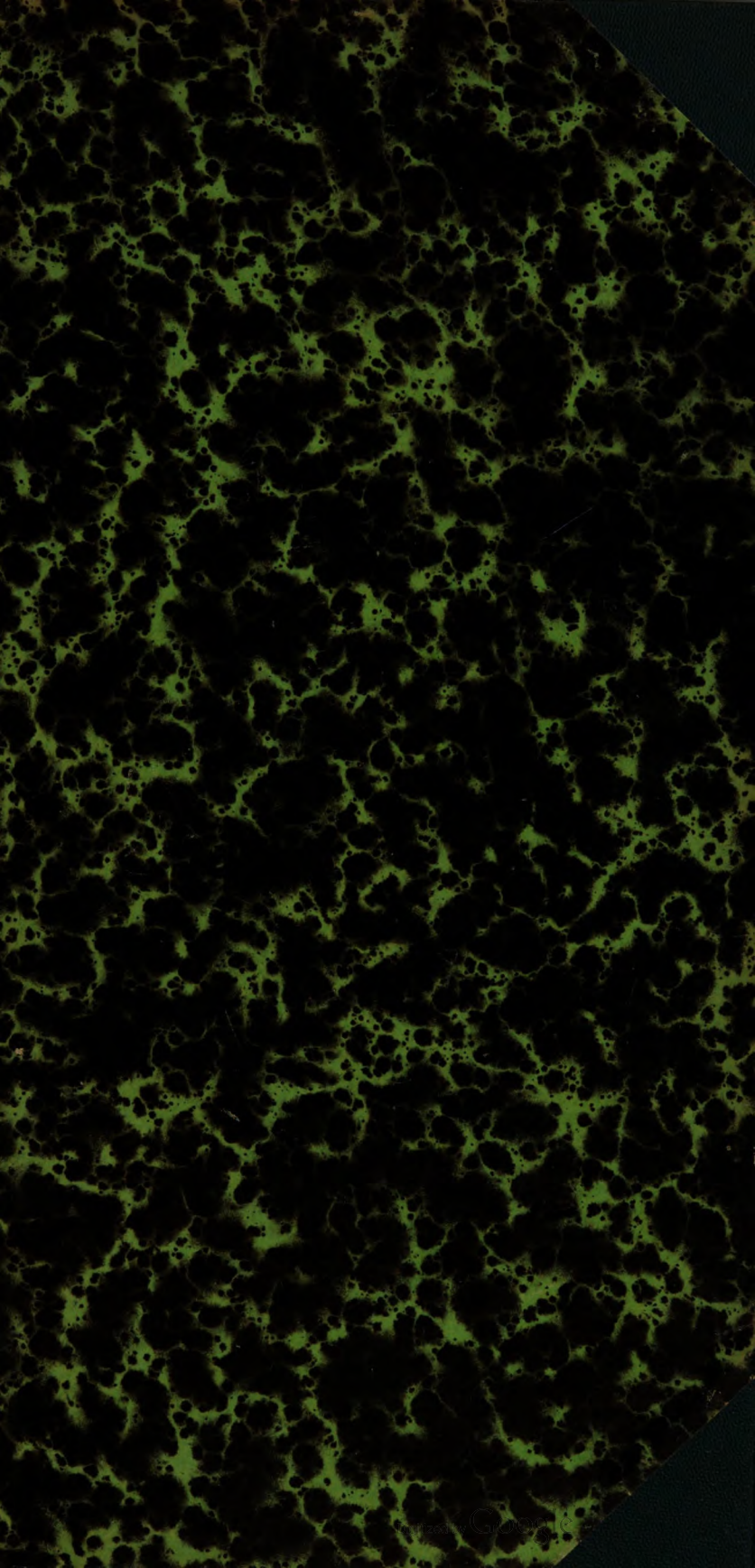
Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

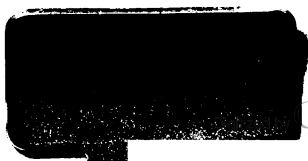
- + *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
- + *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
- + *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
- + *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via <http://books.google.com>



1176
25-



1/2 Linnen

RECHTLIJNIGE EN BOLVORMIGE
DRIEHOEKS METING.

LOBATTO'S LEERBOEK

DER

RECHTLIJNIGE EN BOLVORMIGE

DRIEHOEKSMEETING.

DERDE DRUK,

bewerkt en vermeerderd

DOOR

Dr. P. VAN GEER,

Buitengewoon Hoogleraar aan de Leidsche Hoogeschool.

MET UITSLAANDE PLATEN.

SCHOONHOVEN,

S. & W. N. VAN NOOTEN.

1869.



VOORREDE.

Op verzoek van de uitgevers nam ik de taak op mij een derden druk van LOBATO's Leerboek der rechthoekige en bolvormige Driehoeksmeting te bezorgen.

Geenszins ontveinsde ik mij de eigenaardige moeilijkheden aan deze taak verbonden, en aarzelde wijzigingen en uitbreidingen te geven aan het werk van den afgestorven schrijver.

Wat mij echter noopte aan het verzoek gehoor te geven, was de begeerte om den naam van LOBATO levend te houden onder de beoefenaars ook van de beginselen der wiskunde. De verdiensten op wiskundig gebied van den beroemden Delftschen Hoogleraar, zijn te groot om uit het geheugen te geraken, doch geen middel is zoo geschikt den naam in eer te houden als een leerboek, bestemd voornamelijk voor degenen, welke nog geen grooten weg op het gebied der wetenschap hebben afgelegd.

Ook onderscheidt zich zijn leerboek zoo gunstig van vele anderen over hetzelfde onderwerp, zooals het onverminderd gebruik aantoonst, dat door het uitverkocht zijn van den tweeden druk, het verschijnen van een derden wenschelijk werd. Wellicht zou een onveranderd herdrukken voldoende geweest zijn; doch elf jaren sedert het verschijnen van den tweeden druk verlopen zijnde, was eene herziening zeker wenschelijk. Gaarne had ik die taak aan een wiskundige van meer naam en ervaring overgelaten, en zou haar gewis niet aanvaard hebben, wanneer een driejarig ver-

blijf in Delft mij niet in de gelegenheid gesteld had den derden druk voor een gedeelte naar de inzichten van den schrijver zelven te bewerken. Herhaaldelijk toch had ik het voorrecht, zoowel mondeling als schriftelijk, met den Delftschen geleerde van gedachten te wisselen ook over de inrichting van dit leerboek, dat destijds als handleiding bij mijne lessen in de driehoeksmeting aan de hogere Burgerschool werd gebruikt. Hoezeer ook ingenomen met dit werk, had ik verschillende bezwaren tegen de inrichting en wijze van behandeling, welke bezwaren op de meest heusche en welwillende wijze door den gevierden schrijver werden opgelost of erkend, zoodat hij mij meedeelde, bij een eventuelen derden druk van zijn werk daarop te zullen letten. De dood heeft hem niet in de gelegenheid gesteld dat voornemen uit te voeren, maar nu achtte ik mij ook bij deze geschikte gelegenheid gerechtigd, de door ons besproken wenschelijke wijzigingen aan te brengen.

De veranderingen en uitbreidingen, door mij in het oorspronkelijk werk gebracht, zullen elken belangstellenden bij het vergelijken van den tweeden en derden druk in het oog vallen, zoodat ik mij liever onthoud ze hier op te sommen; of zij verbeteringen mogen genoemd worden, laat ik ter beslissing aan de beoefenaars der driehoeksmeting over. Verre van mij, om even als achter den tweeden, ook achter den derden van verbeterden druk te spreken, het doel van uitgave en bewerking zal echter volkomen bereikt zijn, wanneer deze druk niet minder de gunst van het wiskundig publiek in Nederland mag verwerven, dan met de voorgaande drukken is gebleken het geval te zijn.

DE BEWERKER.

INHOUD.

EERSTE HOOFDSTUK.

GONIOMETRIE.

	Blz.
§ I. Verklaring van de goniometrische grootheden en van hare teekens.	1
§ II. Betrekkingen tusschen de goniometrische lijnen tot denzelfden boog behoorende	12
§ III. Betrekkingen tusschen de goniometrische lijnen tot verschillende bogen behoorende	19
§ IV. Over de samenstelling der gewone- en der logaritmen-sinustafels.	29
§ V. Over de oplossing van goniometrische vergelijkingen.	39
§ VI. Over het gebruik der sinustafels bij de herleiding en oplossing van vergelijkingen van den eersten, tweeden en derden graad.	45

TWEEDE HOOFDSTUK.

RECHTLIJNIGE OF VLAKKE DRIEHOEKSMETING.

§ VII. Over de oplossing der rechthoekige driehoeken . .	60
§ VIII. Over de oplossing der scheefhoekige driehoeken . .	66
§ IX. Bepaling van inhouden	82
§ X. Oplossing van vraagstukken betrekkelijk eenige bijzondere gevallen van driehoeksmeting	85
§ XI. Toepassing der driehoeksmeting op eenige vraagstukken tot de werkdadige meetkunde behoorende. .	91

DERDE HOOFDSTUK.**BOLVORMIGE DRIEHOEKSMETING.**

	Blz.
§ XII. Algemeene beschouwing der bolvormige driehoeken.	111
§ XIII. Afleiding der grondformulen.	116
§ XIV. Formulen voor de rechthoekige driehoeken . . .	122
§ XV. Oplossing der rechthoekige driehoeken. . . .	129
§ XVI. Herleiding der grondformulen	135
§ XVII. Oplossing der scheefhoekige driehoeken . . .	146
§ XVIII. Over de oplossing van eenige gevallen der driehoeks- meting, door middel van oneindige reeksen . .	171
§ XIX. Over het berekenen der oppervlakte van een bolvor- migen driehoek	180
§ XX. Bijzondere gevallen van oplossing.	183
§ XXI. Oplossing van eenige vraagstukken door middel van de bolvormige driehoeksmeting.	187

EERSTE HOOFDSTUK.

GONIOMETRIE.

§ I.

Verklaring van de goniometrische grootheden en van hare teekens.

1. Volgens hetgeen in de beginselen der meetkunde geleerd wordt, komen bij de beschouwing eens rechtehoeken driehoeks zes samenstellende deelen of elementen in aanmerking, te weten, drie hoeken en drie zijden, welke zoodanig aan elkander verbonden zijn, dat men in staat is, om, wanneer drie dezer elementen (mits eene der zijden hieronder begrepen) in grootte gegeven zijn, den driehoek door *constructie* te bepalen. De gewone of rechtehoeken driehoeksmeting heeft ten doel om, uit de getallenwaarden dezer elementen eens driehoeks, die der overige onbekende elementen eeniglijk door *berekening*, in plaats van door constructie, te vinden; welke handelwijze steeds de voorkeur boven de laatste verdient, uithoofde der grootere mate van nauwkeurigheid waarvoor zij uit haren aard in de toepassing vatbaar is. Te dien einde maakt men gebruik van bepaalde betrekkingen, welke er tusschen hoeken en zekere daarvan afhankelijke rechte lijnen bestaan, en waardoor de getallenwaarden der eerste uit die dezer laatste grootheden, en ook omgekeerd, kunnen afgeleid worden. Die betrekkingen zijn het onderwerp van een in lateren tijd gevormden tak der wiskunde, genaamd *Goniometrie* of Meetkunde der hoeken, welke, zoo als in het vervolg zal blijken, den grondslag der beide driehoeksmetingen uitmaakt. Het eerste gedeelte van dit leerboek zal alzoo uitsluitend de *Goniometrie* bevatten, echter alleen binnen zoodanigen omvang beperkt als tot

de kennis der driehoeksmetingen gevorderd wordt; dewijl eene meer uitvoerige behandeling van dat belangrijk gedeelte der wiskunde, tot op de tegenwoordige hoogte der wetenschap voortgezet, buiten het bestek dezer beginselen zoude liggen.

Wij zullen ons derhalve in de eerste plaats met de theorie der goniometrische grootheden en van hare teekens bezig houden, en vervolgens overgaan tot de eigenlijke driehoeksmeting, die slechts als eene toepassing dezer theorie te beschouwen is.

2. Zij ACM (fig. 1) een willekeurige scherpe hoek en beschrijf men met een willekeurigen straal AC een cirkel, dan wordt volgens meetkundige beginselen de hoek gemeten door den boog AM, die tusschen de beenen is begrepen. Evenzoo zal bij een bepaalden straal de lengte der koorde AM alleen afhangen van de grootte van den hoek, doch zij is tot maat ongeschikt, omdat de betrekkingen tusschen hoeken en koorden vrij samengesteld zijn, zooals later nader zal blijken.

Laat men uit het snijpunt M van het eene been met den cirkel eene loodlijn MP neer op het andere been, dan wordt de verhouding van deze lijn tot den straal de *sinus* van den hoek genoemd. Deze verhouding is onafhankelijk van de lengte van den straal, want trekt men (fig. 2) met eene andere lijn CA, tot straal den cirkelboog A,M,, dan is de verhouding van M,P, tot CA,, evenzoo de sinus van den hoek ACM. Nu zijn de driehoeken ACM en A,CM, wegens hunne gelijkhoekigheid gelijkvormig, derhalve de overeenkomstige loodlijnen evenredig aan de zijden. Dit geeft

$$MP : CA = M,P, : CA,,$$

waardoor de gelijkheid der genoemde verhoudingen bewezen is.

Men zou ook om den sinus te vinden de loodlijn uit A op CM kunnen neêrlaten, maar dan verkrijgt men weder dezelfde waarde, omdat de loodlijnen uit de hoekpunten aan de basis van een gelijk-beenigen driehoek op de overstaande zijden neergelaten, gelijk zijn. Hieruit blijkt, dat de grootte van den sinus alleen afhangt van de grootte van den hoek, terwijl omgekeerd, wanneer men zich voorloopig tot scherpe hoeken bepaalt, bij elken sinus slechts één hoek behoort. Derhalve kan de sinus tot maat der hoeken dienen. Er zijn echter nog andere verhoudingen in de figuur, die tot hetzelfde doel leiden. Trekt men namelijk in A (fig. 1) eene loodlijn op AC, dat is eene raaklijn tot den cirkel, tot zij het andere been in N snijdt, dan wordt de verhouding van AN tot den straal de *tangens* van den hoek genoemd. Op dezelfde wijze als voor den sinus kan worden aan-

getoond, dat de tangens alleen afhangt van de grootte van den hoek en tot maat van deze kan dienen. De verhouding van het stuk CN, dat door den tangens van het been wordt afgesneden, tot den straal wordt de *secans* van den hoek genoemd en verkeert onder gelijke omstandigheden als de *sinus* en de *tangens*.

Noemende den hoek ACM ter vereenvoudiging a en den straal r , dan worden de drie verhoudingen, die de grootte van den hoek aanwijzen, ter bekorting aldus geschreven:

$$\sin a = \frac{MP}{r}, \quad \tan a = \frac{AN}{r}, \quad \sec a = \frac{CN}{r}.$$

Nemen wij van den hoek a het complement MCA_1 , door in C de loodlijn CA_1 , op AC te trekken, dan heeft ook deze hoek zijn sinus, tangens en secans, namelijk:

$$\sin A_1CM = \frac{MQ}{r}, \quad \tan A_1CM = \frac{A_1N_1}{r}, \quad \sec A_1CM = \frac{CN_1}{r}.$$

Daar deze verhoudingen het complement bepalen, zoo kunnen zij ook tot bepaling van den hoek zelven dienen. Ter bekorting wordt dan de *sinus* van het complement de *cosinus* van den hoek genoemd, evenzoo de *tangens* van het complement de *cotangens*, en de secans van het complement de *cosecans*, hetgeen aldus wordt geschreven:

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin (90^\circ - a) = \frac{MQ}{r}, \\ \cot a &= \tan (90^\circ - a) = \frac{A_1N_1}{r}, \\ \operatorname{cosec} a &= \sec (90^\circ - a) = \frac{CN_1}{r}. \end{aligned}$$

Als overstaande zijden van een rechthoek is $MQ = CP$, dus kan ook de verhouding tusschen CP, dat is tusschen den afstand van het hoekpunt tot het voetpunt van den sinus, en den straal als de *cosinus* van den hoek beschouwd worden.

Behalve de zes genoemde voorname goniometrische vormen, namelijk de *sinus*, *cosinus*, *tangens*, *cotangens*, *secans* en *cosecans*, zijn er nog eenige andere, die zelden gebruikt worden, maar toch niet onvermeld mogen blijven. Hiertoe behoort de *sinus versus*, zijnde de verhouding tusschen den afstand van het voetpunt van den sinus tot het uiteinde van het been en den straal, dat is:

$$\sin \text{ vers } a = \frac{PA}{r}.$$

Evenzoo heeft men den cosinus versus, zijnde de sinus versus van het complement, derhalve:

$$\cos \text{ vers } a = \frac{QA_1}{r}$$

en eindelijk de reeds in het begin genoemde *koorde* van den overeenkomstigen boog, doch ook gemeten op den straal, dat is:

$$\text{koorde } a = \frac{AM}{r}$$

De koorde van het complement wordt nimmer in rekening gebracht.

3. Alle goniometrische grootheden zijn verhoudingen tusschen lijnen en dus onbenoemde getallen. Zij b. v. $\angle ACM = 45^\circ$, dan is in den gelijkbeenigen rechthoekigen driehoek CPM,

$$MP = CP = CM\sqrt{\frac{1}{2}} = r\sqrt{\frac{1}{2}}$$

en in den driehoek CAN,

$$AN = CA = r$$

$$CN = CA\sqrt{2} = r\sqrt{2},$$

eindelijk in den driehoek ACN₁,

$$AN_1 = CA_1 = r$$

$$CN_1 = CA_1\sqrt{2} = r\sqrt{2},$$

gevende:

$$\sin 45^\circ = \frac{MP}{r} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \frac{CP}{r} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AN}{r} = 1,$$

$$\cot 45^\circ = \frac{AN_1}{r} = 1,$$

$$\sec 45^\circ = \frac{CN}{r} = \sqrt{2},$$

$$\operatorname{cosec} 45^\circ = \frac{CN_1}{r} = \sqrt{2}.$$

Evenzoo kan men door eenvoudige meetkundige eigenschappen gemakkelijk de goniometrische vormen voor hoeken van 60° en 30° vinden. Het zal later blijken op welke wijze men deze verhoudingen, die over het algemeen onmeetbare getallen zijn, voor elken gegeven hoek of boog heeft kunnen berekenen.

Zoo lang de beschouwing bepaald blijft tot hoeken, die in denzelfden cirkel staan of door bogen met gelijke stralen beschreven, gemeten worden, kan men den straal gelijk aan de eenheid nemen, omdat hij de gemeenschappelijke maat is van alle goniometrische vormen, die kunnen voorkomen. Dit nu heeft bij de goniometrie altijd plaats, omdat deze tak der wiskunde zich tot hoeken bepaalt, die altijd door cirkelbogen met gelijke stralen gemeten worden. In die onderstelling, dat is voor $CA = r = 1$, gaan de goniometrische verhoudingen over in de goniometrische lijnen, die dan zijn:

$$\begin{aligned} \sin a &= MP, & \cos a &= CP, \\ \tan a &= AN, & \cot a &= A_1N_1, \\ \sec a &= CN, & \operatorname{cosec} a &= CN_1, \\ \sin \text{ vers } a &= AP, & \cos \text{ vers } a &= A_1Q, \\ \text{koorde } a &= AM. \end{aligned}$$

Zoodra wij echter bij de toepassing der goniometrie op de drie-hoeksmeting te doen krijgen met hoeken, die door cirkelbogen, met verschillende stralen beschreven, gemeten worden, zullen wij terugkeeren tot de oorspronkelijke beteekenis der goniometrische grootheden als onbenoemde verhoudingen.

4. Gaan wij thans na, welke veranderingen er in de hoegrootheid en ligging der goniometrische lijnen ontstaan, indien wij, het been CA van den hoek ACM onveranderlijk aannemende, het andere been CM alle hoeken van 0° tot 360° doen doorloopen. Om de voorstelling gemakkelijk te maken verdeelen wij den cirkel (fig. 3) door twee onderling loodrechte middellijnen AB en A_1B_1 in vier kwadranten, waarvan ACA_1 het eerste, A_1CB het tweede, BCB_1 het derde en B_1CA het vierde kwadrant genoemd wordt. Overeenkomstig hiermede spreekt men van een hoek in het eerste kwadrant, wanneer hij meer dan 0° en minder dan 90° bevat, een hoek in het tweede kwadrant, wanneer hij meer dan 90° en minder dan 180° bevat, in het derde kwadrant, wanneer hij meer dan 180° en minder dan 270° en in het vierde kwadrant, wanneer hij meer dan 270° en minder dan 360° bevat.

Verder moet nu niet alleen op de grootte, maar ook op de teekens der goniometrische lijnen gelet worden. Hieromtrent is men algemeen het volgende overeen gekomen.

De *sinus* is *positief*, zoolang hij boven de middellijn AB is gelegen; *negatief*, wanneer hij er onder valt.

De *cosinus* is *positief*, wanneer hij van het hoekpunt *rechts* en *negatief*, wanneer hij *links* is gelegen.

De *tangens*, die altijd wordt gemeten op de raaklijn tot den cirkel in het punt A, is *positief* wanneer hij van A naar *boven* en *negatief* wanneer hij van A naar *beneden* wordt geteld.

De *cotangens*, die altijd is gelegen op de raaklijn in A₁, is *positief*, wanneer hij van A₁ *rechts* en *negatief*, wanneer hij van A₁ *links* valt.

De *secans* en *cosecans*, die altijd op het veranderlijke been worden gemeten van af het hoekpunt tot het snijpunt met de lijn der tangenten en de lijn der cotangenten, zijn *positief*, wanneer zij op het veranderlijke been zelf zijn gelegen en *negatief*, wanneer zij op zijn verlengde vallen.

Deze teekens zijn zoodanig aangenomen, dat in het eerste kwadrant alle lijnen positief zijn.

De overgang der verschillende kwadranten wordt gevormd door de hoeken van 0°, 90°, 180° en 270°, waar de goniometrische lijnen bepaalde waarden verkrijgen.

Bij den aanvang der beweging de boog AM nul zijnde, zoo heeft men blijkbaar :

$$\begin{array}{ll} \sin 0^\circ = 0, & \cos 0^\circ = 1, \\ \tan 0^\circ = 0, & \cot 0^\circ = \infty, \\ \sec 0^\circ = 1, & \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty, \end{array}$$

Dat de cotangens en de cosecans hier als oneindig groot voorkomen, laat zich uit de figuur gemakkelijk opmaken, dewijl, het punt M in A zijnde, de lijnen A₁N₁ en CM evenwijdig loopen en haar snijpunt op oneindigen afstand gelegen is.

Is de hoek ACM recht, dan zal de sinus zijne grootste, de cosinus daarentegen zijne kleinste waarde bereikt hebben, terwijl de tangens en de secans, wegens de evenwijdigheid van AN en CM, beide oneindig groot geworden zijn, zoodat men heeft :

$$\begin{array}{ll} \sin 90^\circ = 1, & \cos 90^\circ = 0, \\ \tan 90^\circ = \infty, & \cot 90^\circ = 0, \\ \sec 90^\circ = \infty, & \operatorname{cosec} 90^\circ = 1. \end{array}$$

5. Nemen wij nu een hoek in het tweede kwadrant, den stompen hoek ACM₁ en zien wij hoe het met de teekens zijner goniometrische lijnen gesteld is. Volgens de vooropgestelde bepalingen blijft de sinus *positief*, als zijnde boven de middellijn gelegen, doch de cosinus is *negatief*, omdat hij van C uit links wordt geteld. De tangens is nu AN₃, dus *negatief*, evenzoo de cotangens A₁N₃. De

secans CN_1 , is gelegen op het verlengde van het veranderlijke been dus *negatief*, en de cosecans CN_1 op het been zelf dus *positief*.

In de figuur (fig. 1) is de hoek ACM_1 zoodanig genomen, dat zijn supplement BCM_1 gelijk is aan $\perp ACM$, en nu blijkt dat zijne goniometrische lijnen volstrekt genomen, even lang zijn als de overeenkomstige lijnen van den laatstgenoemden hoek. Lettende op de teekens heeft men dus :

$$\begin{aligned}\sin (180^\circ - a) &= + \sin a, \\ \cos (180^\circ - a) &= - \cos a, \\ \text{tang} (180^\circ - a) &= - \text{tang} a, \\ \cot (180^\circ - a) &= - \cot a, \\ \sec (180^\circ - a) &= - \sec a, \\ \text{cosec} (180^\circ - a) &= + \text{cosec} a;\end{aligned}$$

of in woorden : *de sinus en de cosecans van een hoek zijn gelijk aan den sinus en den cosecans van zijn supplement ; de cosinus, tangens, cotangens en secans van een hoek zijn gelijk aan den cosinus, tangens, cotangens en secans van zijn supplement met omgekeerd teeken.*

Is de hoek juist 180° en valt dus het veranderlijke been in het verlengde van CA, dan heeft men, wegens de evenwijdigheid van CB en A_1N_2 :

$$\begin{aligned}\sin 180^\circ &= 0, & \cos 180^\circ &= -1, \\ \text{tang} 180^\circ &= 0, & \cot 180^\circ &= \infty, \\ \sec 180^\circ &= -1, & \text{cosec} 180^\circ &= \infty.\end{aligned}$$

Van negatief oneindig groot kan bij deze beschouwingen even min sprake zijn als van negatief nul, omdat beide slechts voorkomen als overgangen van den positieven tot den negatieven toestand.

6. Zij ACM_2 (fig. 3) een hoek in het derde kwadrant, dan zien wij dat zijn sinus M_2P_2 , als gelegen beneden AB, *negatief* en zijn cosinus CP_2 als in het vorig kwadrant ook *negatief* is. De tangens AN en de cotangens A_1N_1 zijn beiden *positief* geworden; maar de secans CN en de cosecans A_1N_1 *negatief*, omdat zij op het verlengde van het veranderlijke been M_2C gelegen zijn.

In de figuur is $\perp ACM_2$ zoodanig genomen, dat M_2C het verlengde is van CM, derhalve

$$\perp ACM_2 = \perp ACM + 180^\circ = 180^\circ + a.$$

Uit de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken P_2CM_2 en PCM volgt de volstrekte gelijkheid van M_2P_2 met MP en van CP_2 met CP. Lettende op de teekens heeft men dus :

$$\begin{aligned}
\sin (180^\circ + a) &= - \sin a, \\
\cos (180^\circ + a) &= - \cos a, \\
\tang (180^\circ + a) &= + \tang a, \\
\cot (180^\circ + a) &= + \cot a, \\
\sec (180^\circ + a) &= - \sec a, \\
\operatorname{cosec} (180^\circ + a) &= - \operatorname{cosec} a.
\end{aligned}$$

Wentelt het been CM_2 tot het op de lijn CB_1 valt, dan bevat de hoek 270° . Bij dezen overgang van het derde tot het vierde kwadrant worden de goniometrische lijnen als volgt:

$$\begin{aligned}
\sin 270^\circ &= -1, & \cos 270^\circ &= 0, \\
\tang 270^\circ &= \infty, & \cot 270^\circ &= 0, \\
\sec 270^\circ &= \infty, & \operatorname{cosec} 270^\circ &= -1.
\end{aligned}$$

7. Komt het veranderlijke been in den stand CM_3 , dan ligt de inspringende hoek ACM_3 in het vierde kwadrant. De sinus M_3P_3 is *negatief*, maar de cosinus CP_3 *positief*, de tangens AN_3 wordt *negatief*, evenzoo de cotangens A_1N_3 . De secans CN_3 ligt op het been zelf en is dus *positief*, de cosecans CN_3 ligt op het verlengde en is dus *negatief*.

Ware CM_3 zoodanig getrokken, dat de uitspringende hoek ACM_3 gelijk was aan $\angle ACM$, dan zouden P en P_3 samen gevallen en dus PM en P_3M_3 in elkanders verlengde gekomen zijn. Tevens was dan

$$\text{inspringende hoek } ACM = 360^\circ - ACM = 360^\circ - a,$$

terwijl de volstreckte waarde der goniometrische lijnen van deze beide hoeken niet zou verschillen. Lettende op de behoorlijke teekens heeft men dus:

$$\begin{aligned}
\sin (360^\circ - a) &= - \sin a, \\
\cos (360^\circ - a) &= + \cos a, \\
\tang (360^\circ - a) &= - \tang a, \\
\cot (360^\circ - a) &= - \cot a, \\
\sec (360^\circ - a) &= + \sec a, \\
\operatorname{cosec} (360^\circ - a) &= - \operatorname{cosec} a.
\end{aligned}$$

8. Valt het been CM_3 bij zijne verdere wenteling op CA, dan wordt de hoek 360° of, wat op hetzelfde neêrkomt, keert terug tot het uitgangspunt 0° . De goniometrische lijnen van 360° zijn derhalve geheel dezelfde als van 0° . Evenzoo kan men $\angle ACM_3$, die bij de gewone wijze van wenteling inspringend was, ook als uitspringend beschouwen, maar dan is het been CM_3 in tegenovergestelden zin gedraaid, zoodat de hoek als negatief moet beschouwd worden. Onder die omstandigheden gaat het bovenstaande tafeltje over in:

$$\begin{aligned}
\sin(-a) &= -\sin a, \\
\cos(-a) &= +\cos a, \\
\tang(-a) &= -\tang a, \\
\cot(-a) &= -\cot a, \\
\sec(-a) &= +\sec a, \\
\csc(-a) &= -\csc a.
\end{aligned}$$

Hieruit blijkt, dat de *cosinus* en de *secans* van een negatieven hoek in grootte en teeken gelijk zijn aan den *cosinus* en *secans* van den zelfden positieven hoek, doch de andere goniometrische lijnen het tegenovergesteld teeken hebben.

9. Trekken wij thans al het voorgaande in het navolgende tafeltje te zamen, dan bekomen wij hierdoor een algemeen overzicht van de teekens waarmede de goniometrische lijnen voor positieve hoeken, in de vier verschillende kwadranten, zijn aangedaan. Wij zullen straks een eenvoudig hulpmiddel aanwijzen om, ook buiten de beschouwing eeniger figuur, in elk gegeven geval, terstond het teeken der goniometrische lijn te bepalen, en alzoo het bedoelde tafeltje gemakkelijk te kunnen ontwerpen.

TAFEL VAN DEN POSITIEVEN EN NEGATIEVEN TOESTAND
DER GONIOMETRISCHE LIJNEN.

	0°	1e kwadr.	90°	2e kwadr.	180°	3e kwadr.	270°	4e kwadr.	360°
<i>Sinus</i>	0	+	1	+	0	—	—1	—	0
<i>Cosinus</i>	1	+	0	—	—1	—	0	+	1
<i>Tangens</i>	0	+	∞	—	0	+	∞	—	0
<i>Cotangens</i>	∞	+	0	—	∞	+	0	—	∞
<i>Secans</i>	1	+	∞	—	—1	—	∞	+	1
<i>Cosecans</i>	∞	+	1	+	∞	—	—1	—	∞

Wij hebben in het voorgaande overzicht niet begrepen den *sinus* en *cosinus* versus, evenmin als de koorde, vermits elke dezer lijnen in de vier onderscheidene kwadranten het positieve teeken be-

houdt *). Niets belet nu om den bewegenden straal op nieuw de achtereenvolgende kwadranten, en alzoo den geheelen cirkel eenige malen achter een te doen doorloopen. In het 5^e kwadrant zullen de goniometrische lijnen zich alsdan in denzelfden toestand bevinden als in het eerste, en dus allen positief zijn, terwijl de teekens in de 6^e, 7^e en 8^e kwadranten respectievelijk met die in de 2^e, 3^e en 4^e kwadranten zullen overeenkomen.

10. De koorde AM maakt echter hieromtrent eene uitzondering, daar zij, te beginnen met het 5^e kwadrant, negatief wordt, en eerst na dat het punt M ten tweede male den geheelen omtrek doorgevoeren heeft, wederom tot den positieven toestand overgaat. Van deze opmerkelijke eigenschap kan men zich gemakkelijk overtuigen door de volgende beschouwing.

Zij namelijk XX' (fig. 4) eene onbepaalde lijn, draaiende om het vaste punt A, en beschouwen wij haar in de vier aangewezen standen, waarbij zij den omtrek achtereenvolgens in de punten M, M₁, M₂, M₃ snijdt, als wanneer de lijnen AM, AM₁, AM₂, AM₃ de koorden in de vier eerste kwadranten zullen voorstellen. Nemen wij nu elken afstand AM als positief aan, wanneer hij in de richting AX' geteld wordt, dan is het duidelijk dat, zoodra de bewegende lijn XX' eene halve omwenteling volbracht heeft en den cirkel wederom in M snijdt, de punten X, X', hierbij onderling van plaats zullen verwisseld zijn, zoodat nu AM in *tegengestelde* richting van AX' geteld wordende, noodzakelijk als negatief te beschouwen is, hetgeen met de drie volgende kwadranten eveneens het geval zal moeten zijn.

*) Men zal reeds hebben opgemerkt dat de goniometrische lijnen, even als alle andere grootheden, niet van den positieven tot den negatieven toestand kunnen overgaan, of omgekeerd, zonder intusschen nul of oneindig groot te worden. Bij de sinussen en cosinussen kan alleen het eerste plaats vinden; bij de overige lijnen kunnen zich beide omstandigheden voordoen. Men mag evenwel die eigenschap niet omkeeren, en, uit het door nul of door het oneindige gaan der grootheden, besluiten dat zij hierom van teeken moeten veranderen.

De vergelijkingen $y = (a-x)^2$ en $y = \frac{1}{(a-x)^2}$ kunnen zulks ten duidelijkste aanduiden, dewijl y in elk der beide gevallen $x < a$ en $x > a$, het positieve teeken behoudt, hoezeer die grootheid voor $x = a$, inmid- dels nul of oneindig groot geworden zij. De goniometrische lijnen geven zelfs hiervan een voorbeeld. Zoo wordt de sinus versus = 0, zoodra de boog tot 360° aangegroeid is; doch bij den overgang van het vierde tot het vijfde kwadrant, verkrijgt hij wederom eene positieve waarde.

11. Zij nu k een geheel positief getal, dan zullen tot elk der bogen

$$a, a + 2.180^\circ, a + 4.180^\circ, \dots, a + 2k.180^\circ,$$

naar aanleiding van het voorgaande, dezelfde goniometrische lijnen (de koorde alleen uitgezonderd) behooren, waardoor men alzoo, met inachtneming van het hiervoren verklaarde, in het algemeen zal mogen stellen:

$$\begin{aligned} \sin a &= \sin (2k.180^\circ + a), \\ \sin a &= \sin (180^\circ - a) = \sin \{(2k + 1) 180^\circ - a\}, \\ \cos a &= \cos (2k.180^\circ + a), \\ \cos a &= \cos (-a) = \cos (2k.180^\circ - a), \\ (I) \quad \tan a &= \tan (180^\circ + a) = \tan (k.180^\circ + a), \\ \cot a &= \cot (180^\circ + a) = \cot (k.180^\circ + a), \\ \sec a &= \sec (2k.180^\circ + a), \\ \sec a &= \sec (-a) = \sec (2k.180^\circ - a), \\ \operatorname{cosec} a &= \operatorname{cosec} (2k.180^\circ + a), \\ \operatorname{cosec} a &= \operatorname{cosec} (180^\circ - a) = \operatorname{cosec} \{(2k + 1) 180^\circ - a\}, \end{aligned}$$

waaruit dus blijkt, dat, ofschoon tot elken gegeven boog slechts ééne bepaalde goniometrische lijn behoort, daarentegen een oneindig aantal bogen aan te wijzen zijn, waartoe *dezelfde* goniometrische lijn behoort.

12. De voorgaande beschouwing in verband met het tafeltje van n°. 9 geven nog aanleiding tot de volgende opmerkingen:

- 1°. dat de sinus en de cosecans, de cosinus en de secans, de tangens en de cotangens steeds hetzelfde teeken bezitten. De reden hiervan zal later blijken.
- 2°. dat elk der goniometrische lijnen positief is in twee en ook negatief in twee kwadranten. Zoo zijn de sinus en cosecans positief in het eerste en tweede, de cosinus en secans in het eerste en vierde, de tangens en cotangens in het eerste en derde kwadrant.
- 3°. dat de *sinus* en de *cosinus* nimmer de waarde van $+1$ en -1 kunnen overschrijden, omdat die goniometrische lijnen altijd kleiner blijven, hoogstens gelijk worden aan den straal des cirkels. Sinus en cosinus zijn dus altijd positieve of negatieve breuken en omgekeerd zal elke positieve of negatieve breuk de sinus of cosinus van een hoek voorstellen. Vir:dt men als uitkomst eener
 - berekening een sinus of cosinus grooter dan een, dan weet men zeker dat het vraagstuk onmogelijk of de berekening fout is.

- 4°. dat de *tangens* en *cotangens* alle mogelijke positieve en negatieve waarden kunnen bezitten, omdat zij zich op hunne lijnen van nul tot positief en negatief oneindig groot uitstrekken. Omgekeerd kan dus elk positief of negatief getal gelijk gesteld worden aan een tangens of cotangens.
- 5°. dat de *secans* en *cosecans* zich kunnen uitstrekken van $+\infty$ en $-\infty$ tot $+1$ en -1 , maar geene volstreckte waarden kleiner dan de eenheid kunnen bekomen, omdat deze lijnen zich altijd van uit het middelpunt tot buiten den cirkel uitstrekken en dus altijd grooter dan, minstens gelijk aan den straal zijn. Derhalve kunnen nimmer positieve of negatieve breuken gelijk aan een secans of cosecans gesteld worden.

In het tafeltje van n°. 9 zijn de *sinus versus* en *cosinus versus* wegens hunne mindere belangrijkheid niet opgenomen, hoewel wij opgemerkt hebben, dat zij in alle kwadranten positief blijven, als wordende steeds in dezelfde richting geteld. Uit fig. 3 kunnen gemakkelijk de waarden dezer lijnen voor de grenzen der kwadranten opgemaakt worden. Men vindt dan:

$$\begin{array}{ll}
 \sin \text{ vers } 0^\circ = 0, & \cos \text{ vers } 0^\circ = 1, \\
 \sin \text{ vers } 90^\circ = 1, & \cos \text{ vers } 90^\circ = 0, \\
 \sin \text{ vers } 180^\circ = 2, & \cos \text{ vers } 180^\circ = 1, \\
 \sin \text{ vers } 270^\circ = 1, & \cos \text{ vers } 270^\circ = 2.
 \end{array}$$

Ook de waarde der koorden kan voor deze hoeken gemakkelijk uit eene figuur worden afgeleid.

§ II.

Betrekkingen tusschen de goniometrische lijnen tot denzelfden boog behoorende.

13. Er bestaan tusschen de onderscheidene goniometrische lijnen van denzelfden boog, zekere betrekkingen van afhankelijkheid, welke het van belang is te kennen en zich in het geheugen te prenten, dewijl zij den grondslag der geheele goniometrie uitmaken.

De gelijkvormige rechthoekige driehoeken CPM, CAN, CA₁N₁, (fig. 1) geven het middel aan de hand om die betrekkingen op te sporen. Men heeft namelijk in de eerste plaats door toepassing van het theorema van PYTHAGORAS op elk dezer driehoeken, daarbij den

straal des cirkels tot lengte-eenheid aannemende,

in $\triangle CPM$:

$$MP^2 + CP^2 = CM^2$$

$$\text{of } \sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad (1)$$

in $\triangle CAN$:

$$CA^2 + AN^2 = CN^2$$

$$\text{of } 1 + \tan^2 a = \sec^2 a \quad (2)$$

in $\triangle CA_1N_1$:

$$CA_1^2 + A_1N_1^2 = CN_1^2$$

$$\text{of } 1 + \cot^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \quad (3)$$

Vervolgens geeft de gelijkvormigheid der driehoeken CPM en CAN:

$$MP : NA = CP : CA = CM : CN$$

$$\text{of } \sin a : \tan a = \cos a : 1 = 1 : \sec a,$$

dat is:

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad (4)$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \quad (5)$$

Uit de gelijkvormigheid van $\triangle CPM$ met $\triangle CA_1N_1$ volgt:

$$MP : CA_1 = CP : A_1N_1 = CM : CN_1$$

$$\text{of } \sin a : 1 = \cos a : \cot a = 1 : \operatorname{cosec} a;$$

gevende:

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad (6)$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} \quad (7)$$

Eindelijk geeft de gelijkvormigheid van $\triangle CAN$ met $\triangle CA_1N_1$:

$$AN : CA_1 = CA : A_1N_1 = CN : CN_1$$

$$\text{of } \tan a : 1 = 1 : \cot a = \sec a : \operatorname{cosec} a;$$

derhalve:

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} \quad (8)$$

$$\tan a = \frac{\sec a}{\operatorname{cosec} a} \quad (9)$$

Deze negen betrekkingen kunnen niet onderling onafhankelijk zijn, want er komen slechts zes veranderlijke grootheden in voor, en deze

kunnen hoogstens door vijf onafhankelijke betrekkingen verbonden zijn. Zal echter een hoek door ééne goniometrische lijn bepaald wezen, dan moeten tusschen de zes grootheden werkelijk vijf onafhankelijke betrekkingen bestaan en uit deze de andere betrekkingen afgeleid kunnen worden.

Gaan wij b. v. uit van de vijf formules :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$1 + \tan^2 a = \sec^2 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$1 + \cot^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dan volgt al dadelijk uit (4) en (6) :

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Uit (2) en (4) volgt :

$$1 + \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \sec^2 a$$

$$\text{of } \cos^2 a + \sin^2 a = \cos^2 a \cdot \sec^2 a,$$

dat is, lettende op (1) :

$$1 = \cos^2 a \cdot \sec^2 a,$$

derhalve :

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Evenzoo geven (3) en (6) :

$$1 + \frac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \operatorname{cosec}^2 a,$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = \sin^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a,$$

$$1 = \sin^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a,$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Eindelijk volgt uit (4), (5) en (6) :

$$\tan a = \frac{\frac{1}{\operatorname{cosec} a}}{\frac{1}{\sec a}} = \frac{\sec a}{\operatorname{cosec} a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Op dezelfde wijze kan men uit elke vijf onderling onafhankelijke, de vier andere betrekkingen afleiden.

Om deze voornaamste formules gemakkelijk te onthouden, kan men ze op de volgende wijze in woorden uitdrukken:

- 1°. *De som der vierkanten van den sinus en den cosinus, het verschil der vierkanten van den secans en den tangens en het verschil der vierkanten van den cosecans en den cotangens is gelijk aan de eenheid.*
- 2°. *De cosecans is het omgekeerde van den sinus, de secans het omgekeerde van den cosinus, de cotangens het omgekeerde van den tangens.*
- 3°. *De tangens is gelijk aan de verhouding van den sinus tot den cosinus, de cotangens aan de verhouding van den cosinus tot den sinus.*

Eenige eigenschappen aangaande de teekens en de grenswaarden dezer goniometrische lijnen, die in de vorige paragraaf uit de figuur zijn gevonden, kunnen uit de bovenstaande betrekkingen worden afgeleid.

De formules (5), (7) en (8) leeren, dat sinus en cosecans, cosinus en secans, tangens en cotangens steeds hetzelfde teeken bezitten, terwijl uit (4) en (6) blijkt, dat tangens en cotangens positief zijn, wanneer sinus en cosinus gelijk teeken, doch negatief, wanneer zij ongelijk teeken bezitten. Hierdoor kan men terstond al de teekens der goniometrische lijnen opschrijven, wanneer men slechts onthoudt, dat de sinus in het eerste en tweede, de cosinus in het eerste en vierde kwadrant positief is.

Uit de formule (1) volgt, dat sinus en cosinus altijd gelegen zijn tusschen $+1$ en -1 ; uit formule (2) en (3) dat de secans en cosecans altijd grooter dan $+1$ of kleiner dan -1 zijn.

Uit fig. 1 volgt nog:

$$\begin{aligned} AP &= AC - CP \\ \text{of } \sin \text{ vers } a &= 1 - \cos a; \quad . \quad . \quad . \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1Q &= A_1C - CQ \\ \text{of } \cos \text{ vers } a &= 1 - \sin a; \quad . \quad . \quad . \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB \times AP \\ \text{of } \text{koorde}^2 a &= 2 \times \sin \text{ vers } a = 2(1 - \cos a) \quad . \quad (12) \end{aligned}$$

door welke formules de sinus versus, de cosinus versus en de koorde uit den sinus en cosinus kunnen afgeleid worden. Door (10) en (11) wordt bevestigd, dat de *sin vers* en *cos vers* altijd positief zijn, omdat *sin a* en *cos a* nimmer grooter dan 1 kunnen worden.

14. Voor het gemak en de duidelijkheid zijn al de voorgaande formules afgeleid, in de onderstelling, dat de hoek in het eerste

kwadrant is gelegen, hoewel reeds stilzwijgend is gebruik gemaakt van hare algemeene geldigheid. Dit laatste valt niet moeielijk aan te toonen door den hoek in een ander kwadrant te nemen en de zelfde bewerking toe te passen, daarbij lettende op de teekens, die de goniometrische lijnen door verschil van richting verkrijgen. Neemt men b. v. de hoek ACM_1 (fig. 3) in het tweede kwadrant, dan worden de gelijkvormige rechthoekige driehoeken: CP_1M_1 , CAN_1 , en CA_1N_1 ; voor den hoek ACM_2 in het derde kwadrant heeft men de driehoeken: CP_2M_2 , CAN_2 en CA_1N_1 ; voor den hoek ACM_3 in het vierde kwadrant de driehoeken: CP_3M_3 , CAN_3 en CA_1N_1 ; het zal terstond blijken, dat elk dezer groepen van driehoeken dezelfde betrekkingen oplevert als de oorspronkelijke.

15. Daar elke hoek bepaald is door ééne goniometrische lijn, moet het ook mogelijk zijn door middel van de gevonden formules elke goniometrische lijn in elk der anderen uit te drukken.

Nemen wij tot voorbeeld den sinus en zoeken de formules, waar-door hij uit den cosinus, tangens enz. wordt berekend.

Form (1) geeft terstond:

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a}$$

en form (7)

$$\sin a = \frac{1}{\operatorname{cosec} a},$$

derhalve in verband met (3)

$$\sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}};$$

hierin de waarde van $\cot a$ uit (8) substituerende:

$$\sin a = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 a}}} = \frac{\tan a}{\sqrt{1 + \tan^2 a}};$$

eindelijk ingevolge (1) en (5):

$$\sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 a}} = \frac{\sqrt{\sec^2 a - 1}}{\sec a}.$$

Op dergelijke wijze voor elk der goniometrische lijnen te werk gaande, verkrijgt men het volgende volledige samenstel betrekkingen:

$$\begin{aligned}\sin a &= \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\tan a}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}} \\ &= \frac{\sqrt{\sec^2 a - 1}}{\sec a} = \frac{1}{\operatorname{cosec} a}, \dots \dots \dots (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos a &= \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}} \\ &= \frac{1}{\sec a} = \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}{\operatorname{cosec} a}, \dots \dots \dots (14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan a &= \frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a} = \frac{1}{\cot a} \\ &= \sqrt{\sec^2 a - 1} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}, \dots \dots \dots (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot a &= \frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a} = \frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} = \frac{1}{\tan a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sec^2 a - 1}} = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}, \dots \dots \dots (16)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sec a &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 a}} = \frac{1}{\cos a} = \sqrt{1 + \tan^2 a} \\ &= \frac{\sqrt{1 + \cot^2 a}}{\cot a} = \frac{\operatorname{cosec} a}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 a - 1}}, \dots \dots \dots (17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} a &= \frac{1}{\sin a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 a}} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 a}}{\tan a} \\ &= \sqrt{1 + \cot^2 a} = \frac{\sec a}{\sqrt{\sec^2 a - 1}}, \dots \dots \dots (18)\end{aligned}$$

Door deze formules kan men alle goniometrische lijnen van een hoek berekenen, wanneer eene gegeven is. Alleen met betrekking tot het teeken kan eenige moeielijkheid ontstaan bij die formules, waarin eene wortelgrootheid voorkomt. Daarom moet het teeken zoo veel mogelijk vooruit worden opgemaakt, dan behoeft men slechts de volstreckte waarde der lijnen in rekening te brengen. Is het echter niet bekend in welk kwadrant de bedoelde hoek gelegen is, dan blijft er steeds eenige dubbelzinnigheid, omdat elke goniometrische lijn tot twee hoeken kleiner dan 360° behoort.

Is b. v. van een hoek gegeven de sinus, dan kan hij in twee kwadranten gelegen zijn, bij positieve waarde in het eerste en tweede, bij negatieve in het derde en vierde. Tot nadere bepaling moet dan gegeven zijn, of het kwadrant waarin de hoek ligt, of het teeken

van eene der andere goniometrische lijnen (behalve diegene, welke het omgekeerde van de gegebene is).

Weet men b. v. van een hoek, dat zijn sinus negatief en zijn cosinus positief is, dan moet hij in het vierde kwadrant zijn gelegen. Bij de toepassing der goniometrie op de driehoeksmeting is het bezwaar niet groot, omdat men daar in den regel te doen heeft met hoeken kleiner dan 180° , zoodat dan alleen de sinus dubbelzinnigheid kan geven, terwijl het teeken van den cosinus of tangens terstond aanwijst in welk der beide kwadranten de hoek is gelegen.

1e Voorbeeld. De goniometrische lijnen te berekenen voor een hoek van 120° .

De hoek ligt in het tweede kwadrant, dus zijn de sinus en de cosecans positief, de andere lijnen negatief. Zij (fig. 3) $\angle ACM_1 = 120^\circ$, dan is $\angle P_1 CM_1 = 60^\circ$, en dus in den rechthoekigen driehoek $CM_1 P_1$ volgens eene bekende meetkundige eigenschap :

$$CP_1 = \frac{1}{2} CM_1 \\ \text{of } \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Hieruit volgt :

$$\sin 120^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin a}{\cos a} = -\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ = \frac{\cos a}{\sin a} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ = \sqrt{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{\cos a} = -2$$

$$\operatorname{cosec} 120^\circ = \sqrt{1 + \cot^2 a} = \frac{1}{\sin a} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2e Voorbeeld. Van een hoek is de sinus $= -\frac{1}{2}$, de overige goniometrische lijnen te berekenen.

In alle gevallen heeft men :

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a} = -\sqrt{3}.$$

Daar verder de hoek zoowel in het derde als vierde kwadrant kan gelegen zijn, blijft het teeken der andere lijnen onbepaald. Deze verkrijgen dus het dubbele teeken, en dit zullen wij zoo plaatsen, dat het bovenste geldt voor het derde, het onderste voor het vierde kwadrant.

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}},$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} = \pm \sqrt{2},$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Verder door de formules (10) — (12):

$$\sin \text{ vers } a = 1 - \cos a = 1 \mp \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\cos \text{ vers } a = 1 - \sin a = 1 + \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\text{koorde } a = 2\sqrt{1 - \cos a} = 2\sqrt{1 \mp \sqrt{\frac{1}{2}}}.$$

Tot verdere oefening mogen de volgende opgaven dienen.

De waarde van alle goniometrische lijnen te berekenen,

1°. van elk der hoeken 150° , 210° , 315° ;

2°. van een hoek, wiens cosinus $= \frac{1}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2})$;

3°. van een hoek, wiens tangens $= -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

Eene enkele opmerking kan hierbij niet ondienstig zijn. Later is het dikwijls noodig den sinus of cosinus van een hoek uit zijn tangens te berekenen. Stel nu dat gegeven is:

$$\tan a = \frac{p}{q},$$

dan volgt uit de voorgaande formules:

$$\sin a = \frac{\tan a}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{\frac{p}{q}}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{q^2}}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{q^2}}} = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

waaruit deze eenvoudige regel kan opgemaakt worden. Schrijft men de tangens in den vorm eener gewone breuk, hetgeen altijd kan geschieden, dan is de sinus gelijk aan den teller gedeeld door den wortel uit de som der vierkanten van teller en noemer, en de cosinus gelijk aan den noemer gedeeld door het zelfde getal.

§ III.

Betrekkingen tusschen de goniometrische lijnen tot verschillende bogen behoorende.

16. Wij gaan nu over van de betrekkingen, die tusschen de goniometrische lijnen van denzelfden hoek bestaan, tot diegene, welke de goniometrische lijnen van verschillende hoeken onderling verbind-

den. Daar de hoeken, volgens de voorwaarde in § I genoemd, door bogen met gelijken straal beschreven moeten gemeten worden, kunnen wij ze in denzelfden cirkel plaatsen met de hoekpunten in het middelpunt.

Zij dus (fig. 5) $\angle ACB = a$ een willekeurige hoek en zetten wij op het veranderlijke been CB terweerderzijde een anderen willekeurigen hoek $BCD = BCD_1 = b$, dan is :

$$\angle ACD = a + b, \quad \angle ACD_1 = a - b,$$

en nu is in de eerste plaats de vraag, om de goniometrische lijnen van de beide laatstgenoemde hoeken uit te drukken in die van a en b . Trekken wij daartoe BE, DF, D_1F_1 loodrecht op AC, dan is :

$$\begin{aligned} BE &= \sin a, & CE &= \cos a, \\ DF &= \sin(a + b), & CF &= \cos(a + b), \\ D_1F_1 &= \sin(a - b), & CF_1 &= \cos(a - b). \end{aligned}$$

Vereenigen wij nog D met D_1 , dan is deze lijn loodrecht op CB, omdat CB den hoek DCD_1 midden doordeelt. Zij G het snijpunt van CB en DD_1 , dan is, wanneer CB als het vaste, CD als het veranderlijke been van $\angle DCB$ beschouwd wordt,

$$DG = \sin b, \quad CG = \cos b.$$

Als hulplijnen trekken wij nog door G eene lijn IH loodrecht op AC en DI, D_1I_1 evenwijdig aan AC, dan zijn de driehoeken DIG en D_1I_1G gelijk en gelijkvormig, omdat zij behalve gelijke hoeken nog $DG = D_1G$ hebben. Hieruit volgt :

$$IG = I_1G \quad \text{en} \quad ID = I_1D_1.$$

Nu is :

$$\begin{aligned} DF &= IH = HG + GI, \\ D_1F_1 &= I_1H = HG - GI_1 = HG - GI, \\ CF &= CH - HF = CH - ID, \\ CF_1 &= CH + HF_1 = CH + I_1D_1 = CH + ID. \end{aligned}$$

De eerste leden dezer vergelijkingen zijn de grootheden, die berekend moeten worden, zoodat alles neêrkomt op het bepalen van de vier lijnen, die de laatste leden samenstellen.

Hiertoe beschouwen wij in de eerste plaats de gelijkvormige driehoeken CBE en CGH, waarin

$$EB : HG = CE : CH = CB : CG$$

of

$$\sin a : HG = \cos a : CH = 1 : \cos b,$$

derhalve

$$HG = \sin a \cos b, \quad CH = \cos a \cos b.$$

Uit de gelijkvormige driehoeken CBE en DGI volgt:

$$EB : ID = CE : GI = CB : DG$$

of

$$\sin a : ID = \cos a : GI = 1 : \sin b,$$

gevende

$$ID = \sin a \sin b, \quad GI = \cos a \sin b.$$

Substitueert men de gevonden waarden in de genoemde vergelijkingen, dan verkrijgt men:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad (19)$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \quad (20)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \quad (21)$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (22)$$

Door deze vergelijkingen worden de sinussen en cosinussen van de som en het verschil van twee hoeken uitgedrukt in de sinussen en cosinussen van de afzonderlijke hoeken. Zij zijn de grondformulen der goniometrie, omdat alle andere uit deze afgeleid worden.

De tweede kan uit de eerste worden afgeleid, wanneer men $+b$ door $-b$ vervangt, dan toch, zoo als in § 1 is gebleken, blijft $\cos b$ onveranderd, maar gaat $\sin b$ over in $-\sin b$; evenzoo kan de vierde uit de derde worden afgeleid. Korter schrijft men de vier formules in dezen vorm

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$$

Het is wellicht niet ondienstig eene andere afleiding dezer formules te laten volgen.

Men neme op het kwadrant AB (fig. 6) den boog $AM = a$, en den boog $BN = b$; trekke de koorde MN, gelijk mede de lijnen MP en NQ loodrecht op, en MR evenwijdig aan de middellijn AA_1 , dan heeft men klaarblijkelijk, ingevolge de bepalingen hiervoren (n°. 2) gegeven,

$$MP = \sin a, \quad CP = \cos a, \quad NQ = \cos b, \quad CQ = \sin b$$

voorts

$$MN = 90^\circ - (a + b)$$

dus volgens (12) $MN^2 = 2(1 - \sin(a + b)).$

Maar de rechth. driehoek MNR geeft ons daarenboven,

$$MN^2 = MR^2 + NR^2,$$

$$\text{of} \quad 2(1 - \sin(a + b)) = (CP - CQ)^2 + (NQ - MP)^2;$$

en stellende hierin voor de lijnen CP, CQ, NQ en MP, hare goniometrische waarden, dan komt er

$$2 - 2 \sin(a + b) = (\cos a - \sin b)^2 + (\cos b - \sin a)^2,$$

dus, na ontwikkeling en herleiding, met inachtneming van form. (1)

$$2 - 2 \sin(a + b) = 2 - 2 \sin a \cos b - 2 \cos a \sin b.$$

Derhalve $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$

en hierin aan den boog b eene negatieve waarde gevende,

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Deze laatste formule zoude men ook rechtstreeks uit de figuur hebben kunnen afleiden, door den boog b ter linkerzijde van B, naar N' uit te zetten, en vervolgens de koorde MN', zoo mede de loodlijnen N'Q' en MR' te trekken. De boog MN' verkrijgt dan tot waarde $90^\circ + b - a$, dus $\cos MN' = \cos(90^\circ - (a - b)) = \sin(a - b)$, zijnde het overige van het bewijs volkomen gelijk aan het voorgaande.

Hierdoor is alzoo reeds de eerste der beide voormelde grondformulen betoogd. De andere laat zich onmiddellijk uit (19) en (20) afleiden, door slechts voor den boog a zijn complement $90^\circ - a$ te substitueren. Alsdan zal $a + b$ in $90^\circ - (a - b)$, en $a - b$ in $90^\circ - (a + b)$ overgaan. Die beide formules geven nu terstond

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Het zal voor den leerling niet onnuttig zijn de vier grondformulen in woorden uit te drukken, ten einde die gemakkelijk in het geheugen te behouden.

Ofschoon het voorgaande betoog eeniglijk gegrond is op het geval waarin elk der bogen a en b minder dan 90° is, zoo kan men zich echter, door het ontwerpen eener afzonderlijke figuur, gemakkelijk overtuigen, dat die formules insgelijks waar zijn, bijaldien men elk der bogen van 0 tot 360° laat aangroeijen, en zij derhalve de vereischte algemeenheid bezitten.

17. Wij zullen thans doen zien, op welke wijze men daaruit een groot aantal andere goniometrische betrekkingen kan afleiden, welke, zoo als in het vervolg blijken zal, in de toepassingen der goniometrie van zeer uitgestrekt gebruik zijn.

In de eerste plaats mogen wij niet onopgemerkt laten, dat indien men in de gevonden formules, voor a achtereenvolgens 90° , 180° ,

270° en 360° schrijft, men alsdan de navolgende reeds vroeger (n°. 7 en 8) uit de figuur afgeleide formules wederom bekomt.

$$\begin{array}{ll} \sin (90^\circ \pm b) = \cos b & \cos (90^\circ \pm b) = \mp \sin b \\ \sin (180^\circ \pm b) = \mp \sin b & \cos (180^\circ \pm b) = -\cos b \\ \sin (270^\circ \pm b) = -\cos b & \cos (270^\circ \pm b) = \pm \sin b \\ \sin (360^\circ \pm b) = \pm \sin b & \cos (360^\circ \pm b) = \cos b, \end{array}$$

waaruit de positieve en negatieve toestand der sinussen en cosinussen in de vier eerste kwadranten nader bevestigd wordt.

Verder volgt uit die formules nog, door de letters a en b onderling te verwisselen:

$$\sin (b-a) = -\sin (a-b) \quad \cos (b-a) = \cos (a-b)$$

en dus, $b-a=p$ stellende,

$$\sin p = -\sin (-p) \quad \cos p = \cos (-p)$$

hetgeen met het verklaarde in n°. 8 geheel overeenstemt.

18. De form. (19) en (20) door elkander deelende, komt er

$$\frac{\sin (a+b)}{\sin (a-b)} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\sin a \cos b - \sin b \cos a}$$

en dit laatste gebroken, onder en boven, door $\cos a \cos b$ deelende, vinden wij, met behulp van (4) en (8)

$$\frac{\sin (a+b)}{\sin (a-b)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\cot b + \cot a}{\cot b - \cot a} \quad \dots \quad (23)$$

Dezelfde bewerking op de form. (21) en (22) toepassende, bekomen wij

$$\frac{\cos (a+b)}{\cos (a-b)} = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a \cot b + 1} \quad \dots \quad (24)$$

Wanneer wij daarentegen de form. (19) door de form. (21) deelen, zoo ontstaat hieruit, na den teller en noemer der breuk door het product $\cos a \cos b$ gedeeld te hebben,

$$\operatorname{tg} (a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad \dots \quad (25)$$

Op dezelfde wijs komt er

$$\operatorname{tg} (a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad \dots \quad (26)$$

dus ook

$$\cot(a+b) = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b} \dots (27)$$

en $\cot(a-b) = \frac{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b} = \frac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a} \dots (28)$

Stellende in al de voorgaande formules $b=a$ en daarna $2a=\alpha$ dus $a=\frac{1}{2}\alpha$, dan verkrijgen wij de navolgende goniometrische betrekkingen tusschen een hoek en zijn tweevoud.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a. \quad \sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha \dots (29)$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \quad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1. \quad (30)$$

$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a. \quad 1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a \dots (31)$$

$$\sin a = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2a}{2}\right)}. \quad \sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{2}\right)} \dots (32)$$

$$\cos a = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2a}{2}\right)}. \quad \cos \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{2}\right)} \dots (33)$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = \frac{2 \cot a}{\cot^2 a - 1} \dots (34)$$

$$\cot 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{2 \operatorname{tg} a} = \frac{1}{2} (\cot a - \operatorname{tg} a) \dots (35)$$

Uit de deeling van (32) door (33) volgt nog,

$$\operatorname{tg} a = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}\right)}. \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)} \dots (36)$$

of $\operatorname{tg} a = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a} = \operatorname{cosec} 2a - \cot 2a.$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha \dots (37)$$

$$\cot a = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}\right)}. \quad \cot \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\left(\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)}.$$

$$\cot a = \frac{\sin 2a}{1 - \cos 2a} = \frac{1 + \cos 2a}{\sin 2a} = \operatorname{cosec} 2a + \cot 2a.$$

$$\cot \frac{1}{2} \alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha \dots (38)$$

voorts uit (37) en (38) $\operatorname{tg} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \sec \alpha - 1. \dots (39)$

$$\operatorname{tg} a \cot \frac{1}{2} \alpha = \sec \alpha + 1. \dots (40)$$

Door optelling en aftrekking vindt men uit (37) en (38):

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha + \cot \frac{1}{2} \alpha = 2 \operatorname{cosec} \alpha \dots (41)$$

$$\cot \frac{1}{2} \alpha - \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = 2 \cot \alpha \dots (42)$$

De form. (36) geeft tevens

$$\cos 2a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}, \text{ dus } \sin 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a} \quad (43)$$

eindelijk volgt uit (12) en (32)

$$\text{koorde } a = 2 \sin \frac{1}{2} a,$$

hetgeen ook onmiddellijk uit de figuur afgeleid kan worden.

19. Stelt men verder $a = 45^\circ$, dan geven de beide grondformulen (19) en (21), omdat $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sin(45^\circ + b) = \cos(45^\circ - b) = \frac{1}{2}(\cos b + \sin b) \sqrt{2} \quad (44)$$

$$\cos(45^\circ + b) = \sin(45^\circ - b) = \frac{1}{2}(\cos b - \sin b) \sqrt{2} \quad (45)$$

Uit (25) en (26) volgt in dezelfde onderstelling,

$$\operatorname{tg}(45^\circ \pm b) = \cot(45^\circ \mp b) = \frac{1 \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} b} = \frac{\cot b \pm 1}{\cot b \mp 1} \quad (46)$$

Uit (31) door $a = 45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ te stellen,

$$1 - \sin \alpha = 2 \sin^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha), \quad \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}} \quad (47)$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha), \quad \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{2}} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) &= \cot(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \\ &= \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \sec \alpha - \operatorname{tg} \alpha \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\alpha) &= \cot(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) = \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha \quad (50) \end{aligned}$$

En uit (42) en (41)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \{ \cot(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) - \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \} \quad (51)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{2} \{ \operatorname{tg}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) + \cot(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) \} \quad (52)$$

Wanneer wij de formules (19) en (20) optellen en van elkander aftrekken, komt er

$$\begin{aligned} \sin(a+b) + \sin(a-b) &= 2 \sin a \cos b, \\ \sin(a+b) - \sin(a-b) &= 2 \sin b \cos a. \end{aligned}$$

Op gelijke wijze geven de formules (21) en (22)

$$\begin{aligned} \cos(a-b) + \cos(a+b) &= 2 \cos a \cos b, \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2 \sin a \sin b. \end{aligned}$$

Schrijven wij in deze vier formules, voor $a + b, p$, en voor $a - b, q$, dan is $a = \frac{1}{2}(p + q)$ en $b = \frac{1}{2}(p - q)$. Hierdoor gaan zij over in

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p - q) \cos \frac{1}{2}(p + q) \quad . \quad . \quad (54)$$

$$\cos q - \cos p = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q) \quad . \quad . \quad (55)$$

$$\cos q + \cos p = 2 \cos \frac{1}{2}(p + q) \cos \frac{1}{2}(p - q) \quad . \quad . \quad (56)$$

welke door deeling de navolgende opleveren :

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{tg \frac{1}{2}(p + q)}{tg \frac{1}{2}(p - q)} = \frac{cot \frac{1}{2}(p - q)}{cot \frac{1}{2}(p + q)} \quad . \quad . \quad (57)$$

$$\frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p} = \frac{tg \frac{1}{2}(p + q)}{cot \frac{1}{2}(p - q)} = tg \frac{1}{2}(p + q) tg \frac{1}{2}(p - q) \quad . \quad (58)$$

en door vermenigvuldiging, hierbij onder het oog houdende dat

$$2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha = \sin \alpha,$$

$$(\sin p + \sin q)(\sin p - \sin q) = \sin^2 p - \sin^2 q = \sin(p + q) \sin(p - q) \quad (59)$$

$$(\cos p + \cos q)(\cos q - \cos p) = \cos^2 q - \cos^2 p = \sin(p + q) \sin(p - q) \quad (60)$$

In deze beide laatste formules voor den boog p zijn complement $90^\circ - p$ schrijvende, zoo verkrijgt men hieruit

$$\begin{aligned} (\cos p + \sin q)(\cos p - \sin q) &= \cos^2 p - \sin^2 q \\ &= \cos(p + q) \cos(p - q) \quad . \quad . \quad . \quad (61) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin p + \cos q)(\cos q - \sin p) &= \cos^2 q - \sin^2 p \\ &= \cos(p + q) \cos(p - q). \end{aligned}$$

Behalve de voorgaande, laten zich uit de form. (53) tot (56) nog de volgende afleiden, door namelijk beurtelings daarin te stellen

$$\begin{aligned} p &= 45^\circ + a, & q &= 45^\circ - a, \\ p &= 30^\circ + a, & q &= 30^\circ - a, \end{aligned}$$

$$\sin(45^\circ + a) + \sin(45^\circ - a) = \cos a \sqrt{2} \quad . \quad . \quad (62)$$

$$\sin(45^\circ + a) - \sin(45^\circ - a) = \sin a \sqrt{2} \quad . \quad . \quad (63)$$

$$\sin(30^\circ + a) + \sin(30^\circ - a) = \cos a \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

$$\cos(30^\circ - a) - \cos(30^\circ + a) = \sin a \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

dus ook

$$\cos(60^\circ + a) + \cos(60^\circ - a) = \cos a \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

$$\sin(60^\circ + a) - \sin(60^\circ - a) = \sin a \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Stellende in (62) en (63) $a = \frac{1}{2} \alpha$, dan vindt men nog met behulp van (47) en (48) de twee formules :

$$\cos \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \alpha)} + \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \alpha)} \quad . \quad . \quad (68)$$

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \sin \alpha)} - \frac{1}{2} \sqrt{(1 - \sin \alpha)} \quad . \quad . \quad (69)$$

welke met (32) en (33) volmaakt overeenstemmen. Immers door ze in het vierkant te brengen, bekomt men wederom

$$\cos^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) = \frac{1 + \cos \alpha}{2},$$

en $\sin^2 \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$

20. Het zoude niet moeielijk vallen, de voorgaande formules met nog een aantal andere van gelijken aard te vermeerderen. De hier medegedeelde zijn echter die, welke, hetzij bij goniometrische herleidingen, hetzij bij de samenstelling der sinustafels (waarover straks nader) het meest voorkomen. Uit dien hoofde onthouden wij ons, daaraan eene overtollige uitbreiding te geven. Wij zullen echter nog ten slotte hier eenige belangrijke goniometrische betrekkingen tusschen drie verschillende hoeken laten volgen, waarvan wij het betoog aan den lezer ter oefening overlaten.

$$\sin(a+b+c) = \left\{ \begin{array}{l} \sin a \cos b \cos c \\ + \sin b \cos a \cos c \\ + \sin c \cos a \cos b \end{array} \right\} - \sin a \sin b \sin c \quad (70)$$

$$\sin(a+b+c) = \left\{ \begin{array}{l} \sin a \cos(b+c) \\ + \sin b \cos(a+c) \\ + \sin c \cos(a+b) \end{array} \right\} + 2 \sin a \sin b \sin c \quad (71)$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \left\{ \begin{array}{l} \cos a \sin b \sin c \\ + \cos b \sin a \sin c \\ + \cos c \sin a \sin b \end{array} \right\} \quad (72)$$

$$\cos(a+b+c) = \left\{ \begin{array}{l} \cos c \cos(a+b) \\ + \cos b \cos(a+c) \\ + \cos a \cos(b+c) \end{array} \right\} - 2 \cos a \cos b \cos c \quad (73)$$

Voor $a+b+c=90^\circ$, is

$$1 - \sin^2 a - \sin^2 b - \sin^2 c = 2 \sin a \sin b \sin c \quad (74)$$

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \cos a \cos b \cos c \quad (75)$$

Voor $a+b+c=180^\circ$,

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c \quad (76)$$

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c = 2 \cos a \cos b \cos c \quad (77)$$

$$\sin^2 c - \sin^2 a - \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos c = 0 \quad (78)$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \quad (79)$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \quad (80)$$

$$\cot a \cot b + \cot a \cot c + \cot b \cot c = 1 \quad (81)$$

Voor $a+b+c=360^\circ$,

$$1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 0 \quad (82)$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \quad (83)$$

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c = 1 - \sec a \sec b \sec c \quad (84)$$

Is nu $n a$, en dus ook $(n-1) a$, even als a een zeer kleine hoek, dan kan men, in de vorige vergelijking, zoo wel voor $\cos a$ als voor $\cos (n-1) a$ de eenheid substitueren, waardoor zij in dat bijzonder geval overgaat in

$$\sin n a = \sin (n-1) a + \sin a.$$

Op gelijke wijze heeft men

$$\sin (n-1) a = \sin (n-2) a + \sin a$$

$$\sin (n-2) a = \sin (n-3) a + \sin a$$

enz.

enz.

waaruit gemakkelijk te besluiten is,

$$\sin n a = \sin (n-p) a + p \sin a$$

zijnde $p < n$. Stelt men $p = n$, dan komt er

$$\sin n a = n \sin a.$$

Voor een anderen kleinen hoek $m a$, zal eveneens

$$\sin m a = m \sin a.$$

Derhalve

$$\sin n a : \sin m a = n : m = n a : m a,$$

waardoor het gestelde bewezen is. Van deze laatste eigenschap wordt eene nuttige toepassing gemaakt bij de berekening der sinus-tafels, zoo als in de volgende § nader zal aangetoond worden.

§ IV.

Over de samenstelling der gewone- en der logarithmen-sinustafels.

22. Onder de samenstelling eener sinustafel verstaat men het berekenen in deelen des straaals, van de lengten der goniometrische lijnen voor alle hoeken beneden het kwadrant, en met kleine verschillen opklimmende. De hoogere wiskunde levert onderscheidene reeksen op, waardoor die berekening voor elken hoek van gegevene grootte, spoedig en tot op een groot aantal decimalen, nauwkeurig geschieden kan. Daar echter deze beginselen niet bestemd zijn, om de goniometrie in haren geheelen omvang te behandelen, zoo kunnen wij de bedoelde reeksen hier niet voordragen *), maar zul-

*) Men kan hieromtrent raadplegen onze *Lessen over de hoogere Algebra*, 26e les, handelende over de ontwikkeling der goniometrische functiën in oneindige reeksen.

len ons bepalen met den lezer een algemeen begrip te geven van de wijze om eene sinustafel te ontwerpen, ook zonder het gebruik der hulpmiddelen, welke men aan de wiskundigen van lateren tijd verschuldigd is, en eerst gevonden zijn, na dat verre de meeste, naar de oude of sexagesimale verdeling ingerichte sinustafels reeds ontworpen waren *).

23. In de eerste plaats zal men gemakkelijk inzien, dat de berekening der zijden van de in den cirkel beschreven regelmatige veelhoeken, al dadelijk het middel oplevert, om de sinussen en cosinussen van een zeer groot aantal hoeken eeniglijk door worteltrekkingen te berekenen. In de meetkunde †) wordt namelijk geleerd, dat, stellende de zijde van den regelmatigen n hoek $= a$, en die van den regelmatigen $2n$ hoek in denzelfden cirkel beschreven $= a_1$, men, voor den straal 1, zal hebben de vergelijking

$$a_1 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}}. \quad (1)$$

Zij nu $\alpha = \frac{180^\circ}{n}$, dan is

$$a = \text{koorde } 2\alpha = 2 \sin \alpha, \text{ en } a_1 = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha,$$

waardoor alzoo uit den sinus van eenigen boog α , de sinus des halven boogs kan worden berekend, ten welken einde de formule (1) nog onder dezen vorm zoude kunnen gebracht worden :

$$a_1 = \sqrt{1 + \frac{1}{2}a} - \sqrt{1 - \frac{1}{2}a}. \quad (2)$$

Na hierin $a = 2 \sin \alpha$, en $a_1 = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha$ gesteld te hebben, verkrijgt men de reeds hiervoren gevonden form. (69) § III.

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \sin \alpha} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin \alpha}. \quad (3)$$

$$\text{of } \sin \frac{1}{2} \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad (4)$$

welke laatste de voorkeur verdient, ingeval de cosinus van den hoek reeds bekend is.

Daar nu $\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2}$ en $\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ koorde } 60^\circ = \frac{1}{2}$, zal men thans, met behulp van eene der beide laatste formules, den sinus en cosinus der hoeken van $22^\circ 30'$, en van 15° , en hieruit wederom die van $11^\circ 15'$ en van $7^\circ 30'$ enz., door achtereenvolgende wortel-

*) Bij het berekenen der tafels van BORDA, CALLET, en van andere op de decimale verdeling van het kwadrant gegronde sinustafels, heeft men zich echter met veel voordeel van de bedoelde reeksen bediend.

†) Zie bewerkers Leerboek der Meetkunde, I, § 20, form. (5).

trekkingen kunnen berekenen. Verder is de zijde des ingeschreven vijfhoeks, dat is $2 \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, dus $\sin 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; op gelijke wijze geeft de zijde des tienhoeks, $\sin 18^\circ = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5})$. Hieruit kunnen nu wederom de sinus en cosinus der bogen van 9° , van $4^\circ 30'$ enz. op gelijke wijze worden afgeleid.

Overigens is het klaar, dat wanneer men eenmaal de goniometrische lijnen der hoeken van 0° tot 45° , op de eene of andere wijze heeft berekend, die voor alle grootere hoeken, tot aan het geheele kwadrant, alsdan insgelijks bekend zijn, vermits

$$\sin(45^\circ + a) = \cos(45^\circ - a) \text{ en } \cos(45^\circ + a) = \sin(45^\circ - a),$$

waarom dan ook de gewone sinustafels zich niet verder dan tot het halve cirkelkwadrant uitstrekken. Het is echter van belang hier te doen opmerken, dat zoodra de berekening tot aan den hoek van 30° gevorderd is, de sinussen en cosinussen van alle grootere hoeken tot 45° , door eene eenvoudige optelling en aftrekking kunnen gevonden worden, en zulks met behulp der form. (64) en (65) § III, gevende namelijk

$$\sin(30^\circ + a) = \cos a - \sin(30^\circ - a) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\cos(30^\circ + a) = \cos(30^\circ - a) - \sin a \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Gesteld thans dat men voornemens zij de goniometrische lijnen te berekenen van alle bogen van 0° tot 30° , met 1° opklimmende, dan zou men hierbij aldus kunnen te werk gaan.

Uit (3) volgt, door $a = 30^\circ$, en dus $\sin a = \frac{1}{2}$ te stellen,

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \text{ en } \cos 15^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Hiervoren is reeds gevonden

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{5}), \text{ dus } \cos 18^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

en volgens (3)

$$\sin 9^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{3 + \sqrt{5}} - \frac{1}{4} \sqrt{5 - \sqrt{5}}$$

$$\cos 9^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{4} \sqrt{5 - \sqrt{5}}.$$

24. De grondformulen

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

geven tevens het middel aan de hand tot berekening van $\sin 3^\circ$ en $\cos 3^\circ$, door namelijk daarin $a = 18^\circ$ en $b = 15^\circ$ te stellen, waardoor men terstond bekomt

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16} (\sqrt{6} + \sqrt{2}) (\sqrt{5} - 1) - \frac{1}{16} (\sqrt{3} - 1) \sqrt{5 + \sqrt{5}},$$

$$\cos 3^\circ = \frac{1}{16} (\sqrt{6} - \sqrt{2}) (\sqrt{5} - 1) + \frac{1}{16} (\sqrt{3} + 1) \sqrt{5 + \sqrt{5}}.$$

Op gelijke wijze verkrijgt men, door $a = 15^\circ$ en $b = 9^\circ$ te stellen, met behulp der bovenstaande waarden van $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\sin 9^\circ$ en $\cos 9^\circ$, na eene ligte herleiding *)

$$\begin{aligned}\sin 6^\circ &= -\frac{1}{8}(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})}, \\ \cos 6^\circ &= \frac{1}{8}(\sqrt{15} + \sqrt{3}) + \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}.\end{aligned}$$

En aangezien

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a,$$

zoo vindt men gemakkelijk uit de beide laatst gevondene waarden,

$$\begin{aligned}\sin 12^\circ &= \frac{1}{8}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}(\sqrt{15} - \sqrt{3}), \\ \cos 12^\circ &= \frac{1}{8}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}(\sqrt{5} - 1),\end{aligned}$$

waaruit door dezelfde formules verder afgeleid wordt

$$\begin{aligned}\sin 24^\circ &= \frac{1}{8}(\sqrt{15} + \sqrt{3}) - \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}, \\ \cos 24^\circ &= \frac{1}{8}(\sqrt{5} + 1) + \frac{1}{8}\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})}.\end{aligned}$$

De sinussen en cosinussen der bogen van 21° en 27° , laten zich onder anderen berekenen uit de formules

$$\begin{aligned}\sin(18^\circ + a) &= 2 \sin 18^\circ \cos a - \sin(18^\circ - a), \\ \cos(18^\circ + a) &= -2 \sin 18^\circ \sin a + \cos(18^\circ - a),\end{aligned}$$

waarin men achtereenvolgens $a = 3^\circ$ en $a = 9^\circ$ zal hebben te stellen. In dier voege bekomt men

$$\begin{aligned}\sin 21^\circ &= 2 \sin 18^\circ \cos 3^\circ - \sin 15^\circ \\ \cos 21^\circ &= \cos 15^\circ - 2 \sin 18^\circ \sin 3^\circ \\ \sin 27^\circ &= 2 \sin 18^\circ \cos 9^\circ - \sin 9^\circ \\ \cos 27^\circ &= \cos 9^\circ - 2 \sin 18^\circ \sin 9^\circ,\end{aligned}$$

of, na substitutie en herleiding,

$$\begin{aligned}\sin 21^\circ &= \frac{1}{8}(1 + \sqrt{3})\sqrt{(5 - \sqrt{5})} - \frac{1}{8}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(1 + \sqrt{5}), \\ \cos 21^\circ &= \frac{1}{8}(-1 + \sqrt{3})\sqrt{(5 - \sqrt{5})} + \frac{1}{8}(\sqrt{6} + \sqrt{2})(1 + \sqrt{5}); \\ \sin 27^\circ &= \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \frac{1}{8}(\sqrt{10} - \sqrt{2}), \\ \cos 27^\circ &= \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{8}(\sqrt{10} - \sqrt{2}).\end{aligned}$$

Aldus zijn wij in staat gesteld de sinussen en cosinussen der bogen van 0 tot 30° , en dus ook tot 45° (zie form. (5) en (6)) van 3° tot 3° , met den vereischten graad van nauwkeurigheid te berekenen, waaruit vervolgens de overige goniometrische lijnen, met behulp der hiervoren (n^o. 13) gevonden betrekkingen af te leiden zijn. Men

*) Bij deze berekening zal het gemakkelijker zijn voor $\sin 15^\circ$ te schrijven de uitdrukking $\frac{1}{8}\sqrt{(2 - \sqrt{3})}$, en voor $\cos 15^\circ$, $\frac{1}{8}\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$.

zal echter hierbij tevens met vrucht kunnen gebruik maken van de navolgende vergelijkingen

$$tg(30^\circ + 2\alpha) = \frac{1}{2} \{ \cot(30^\circ - \alpha) - tg(30^\circ - \alpha) \}$$

$$tg(45^\circ + \alpha) = \cot(45^\circ - \alpha) = 2 tg 2\alpha + tg(45^\circ - \alpha),$$

welke beide uit form. (35) § III voortvloeijen, door voor α achtervolgens $30^\circ - \alpha$, en $45^\circ - \alpha$ te schrijven, en met wier behulp men de tangenten en cotangenten van alle hoeken grooter dan 30° , door eene enkele optelling of aftrekking, uit de reeds gevondene zal kunnen berekenen.

Eindelijk zijn nog de uit (38) afgeleide vergelijkingen

$$\operatorname{cosec} \alpha = \cot \frac{1}{2} \alpha - \cot \alpha,$$

$$\sec \alpha = \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \alpha) - tg \alpha,$$

bijzonder geschikt tot berekening der secanten en cosecanten, door middel der tangenten en cotangenten.

24. Wat nu betreft de berekening der goniometrische lijnen van kleinere hoeken, zoo als die van 1° , $1'$ en $1''$, te dien einde kan men verschillende wegen inslaan, waarvan het tot ons oogmerk voldoende zal zijn, den navolgenden aan te wijzen.

Het is namelijk uit de inzage eener figuur terstond op te maken, dat de lengte van den sinus steeds kleiner is dan de boog waartoe hij behoort, en daarentegen de tangens grooter dan die boog is, mits deze laatste kleiner dan een kwadrant zij. In deze onderstelling zal dus altijd

$$\frac{\sin a}{a} < 1 \text{ en } \frac{tg a}{a} > 1;$$

welke beide verhoudingen echter meer en meer tot de eenheid zullen naderen, naarmate de boog kleiner genomen wordt, zoodat men, bij zeer kleine bogen, deze door hun sinus of tangens zal kunnen vervangen, althans wanneer men de getallen-waarden dezer goniometrische lijnen niet tot in een groot aantal decimalen behoeft te kennen. Het valt niet moeielijk na te gaan, in hoe verre het bij de berekening der sinustafels geoorloofd zij, zich van deze laatste onderstelling te bedienen. Te dien einde geeft de vergelijking

$$tg a = \frac{\sin a}{\cos a} = \sin a (1 - \sin^2 a)^{-\frac{1}{2}}$$

na ontwikkeling van het tweede lid volgens het binomium van NEWTON,

$$tg a = \sin a + \frac{1}{3} \sin^3 a + \text{enz.}$$

Is nu de boog a klein genoeg om, in de berekening van $tg a$, de vijfde en hoogere magten van $\sin a$ te mogen verwaarloozen, dan heeft men

$$a < tg a \text{ of } < \sin a + \frac{1}{3} \sin^3 a \text{ en tevens } a > \sin a$$

dus gemiddeld
$$a = \sin a + \frac{1}{3} \sin^3 a;$$

welke vergelijking weinig van de waarheid zal kunnen afwijken. En hieruit blijkt alzoo, dat men alleen dan den sinus door den boog zelven zal mogen vervangen, bijaldien die boog zoo klein is, dat de term $\frac{1}{3} \sin^3 a$ buiten invloed blijft op het laatste van het aantal decimale cijfers waarin men dezen sinus begeert uit te drukken. Bepaalt men nu dat aantal cijfers op *negen*, dan zal de voormelde term zonder invloed zijn, zoodra de boog a , en dus ook $\sin a < 0,0003$.

Men neme bijv. $a = 1'$, dan vindt men

$$\text{boog } 1' = \frac{\pi}{180 \times 60} = 0,0002908882; \text{ dus ook}$$

$$\sin 1' = 0,000290888.$$

Het verschil zal zich echter eerst in het 12^e decimale cijfer openbaren, dewijl men door eene meer strenge berekening vindt

$$\sin 1' = 0,00029 \ 08882 \ 04563$$

$$\text{en } \text{boog } 1' = 0,00029 \ 08882 \ 08566.$$

Voor den boog van $1''$ is het verschil nog veel geringer. Men vindt namelijk

$$\sin 1'' = 0,00000 \ 48481 \ 36809$$

$$\text{en } \text{boog } 1'' = 0,00000 \ 48481 \ 36811$$

zoodat beide grootheden tot in de 13 eerste decimalen volmaakt met elkander overeenstemmen.

Bepaalt men zich nogtans tot acht decimale cijfers, dan zullen de boog, de sinus en de tangens met elkander overeenstemmen, zoo lang a of $\sin a < 0,0015$, vermits alsdan

$$\frac{1}{3} \sin^3 a < 0,0000000008.$$

En nademaal de gewone sinustafelen zich slechts tot 7 decimalen uitstrekken, zoo blijkt uit het voorgaande, dat men, bij de berekening dezer tafels, voor de sinussen en tangenten van alle bogen tot op dien van $5'$, wiens lengte uitgedrukt wordt door $0,00145444$, de lengten dezer bogen zelven zal mogen aannemen.

Heeft men nu in diervoege eene tafel ontworpen der goniometri-

sche lijnen van alle hoeken van $0'$ tot $5'$, dan zullen de sinussen en cosinussen voor alle grootere hoeken tot op dien van 1° , gevonden worden, hetzij bij verdubbeling der hoeken, door eene der twee volgende formules

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a, \quad \cos 2a = 1 - \sin^2 a,$$

hetzij door de meer algemeene formules

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= 2 \sin a \cos b - \sin(a-b) \\ \cos(a+b) &= 2 \cos a \cos b - \cos(a-b) \end{aligned}$$

van welke laatste men zich, met behulp der reeds hiervoren (n° . 23) gevondene waarden voor de hoeken die met 3° opklimmen, wederom bedienen kan bij het voortzetten der tafel van 1° tot 1° . Indien men zich voorstelt de tafel zoodanig in te richten, dat zij slechts van $1'$ tot $1'$ opklimme, zoo als met vele sinustafels het geval is, dan zou men eerstelijk, door eene toepassing der formules (68) (69) § III, de tafel nauwkeurig kunnen berekenen voor hoeken die met $15'$ opklimmen, en vervolgens voor de tusschengelegen hoeken gebruik maken van de benaderingsformules,

$$\begin{aligned} \sin(a^\circ + 1') &= \sin a + \cos a \sin 1' \\ \cos(a^\circ + 1') &= \cos a - \sin a \sin 1' \end{aligned}$$

waarin $\cos 1' = 1$ aangenomen is.

25. Bij de interpolatie der tafel voor kleinere onderdeelen, zal eene eenvoudige berekening van evenredige verschillen voldoende zijn. Want, laten δ , δ' twee kleine hoeken voorstellen, dan heeft men

$$\begin{aligned} \sin(a+\delta) &= \sin a + \cos a \sin \delta \\ \sin(a+\delta') &= \sin a + \cos a \sin \delta' \end{aligned}$$

$$\text{dus} \quad \frac{\sin(a+\delta) - \sin a}{\sin(a+\delta') - \sin a} = \frac{\sin \delta}{\sin \delta'} = \frac{\delta}{\delta'} \quad (n^\circ. 21)$$

dat is, *de verschillen tusschen de sinussen van drie hoeken, welke slechts weinig van elkander verschillen, zijn nagenoeg evenredig aan de verschillen tusschen die hoeken zelve; welke eigenschap zich tevens tot al de goniometrische lijnen uitstrekt.*

Het voorgaande zal genoegzaam zijn, om zich een volledig denkbeeld te vormen van de wijze waarop het mogelijk is, de getallenwaarden van al de goniometrische lijnen van een willekeurigen hoek, in tiendeelige deelen van den straal, te berekenen en alzoo

eene gewone sinustafel te ontwerpen *). In de Trigonometrie wordt evenwel meer uitsluitend gebruik gemaakt van de logarithmen dezer getallen, ten einde hierdoor de vermenigvuldigingen en deelingen, welke daarmede moeten geschieden, spoediger en gemakkelijker te kunnen verrichten. Uit dien hoofde heeft men dan ook reeds voor lang, zoogenaamde logarithmen-sinustafels berekend, waarin naast elken hoek, de logarithmen der onderscheidene tot dien hoek behorende goniometrische lijnen onmiddellijk worden aangewezen; terwijl in lateren tijd insgelijks zeer nauwkeurige reeksen gevonden zijn, waardoor die logarithmen rechtstreeks kunnen berekend worden. In deze tafels zijn de wijzers der logarithmen van alle goniometrische lijnen, welker getallen-waarden < 1 , reeds met 10 verhoogd, om hierdoor het gebruik van negatieve wijzers te vermijden.

26. De hier te lande voor nauwkeurige trigonometrische berekeningen, meest gebruikelijke logarithmen-sinus-tafels zijn die van VEGA, CALLET en SCHRÖN. Die van VEGA †) bevatten de logarithmen der goniometrische lijnen van 10 tot 10 seconden voor de zes eerste en de zes laatste graden des kwadrants, doch voor de overige graden insgelijks van minuut tot minuut, met bijvoeging nogtans der verschillen voor elke secunde, terwijl behalve die, daarin voor de eerste minuut, de logarithmen der sinussen en tangenten voor elk tiende deel eener secunde aangetroffen worden. In de tafels van CALLET, die wegens hare uitvoerigheid en bijzondere nauwkeurigheid, de voorkeur boven de overige verdienen, vindt men voor de vijf eerste graden des kwadrants, de logarithmen der sinussen en tangenten van secunde tot secunde, en voor de overige hoeken, van 10 tot 10 seconden opgegeven, met aanwijzing tevens der verschillen voor elk tiental seconden, ten einde die logarithmen gemakkelijk te kunnen interpoleren. Even als in de tafels van VEGA, komen daarin eeniglijk de sinussen, cosinussen, tangenten en cotan-

*) In de meeste tafels komen echter de sinussen en cosinussen als geheele getallen en niet als decimale breuken voor, en zulks uithoofde daarbij de straal niet gelijk aan de eenheid, maar aan het getal 10^n gesteld is, zijnde n het aantal cijfers waarin de decimale breuken uitgedrukt zijn, zoodat hierdoor bij elk dezer getallen het decimaal punt komt te vervallen.

†) Wij bedoelen hier de gewone in 8° , en niet de groote voor het eerst in 1794 in folio uitgegeven tafels van VEGA, waarin de logarithmen der sinussen enz. tot in tien decimalen uitgedrukt worden, en wier gebruik alleen bij berekeningen, die een hoogen graad van nauwkeurigheid vorderen, kan te pas komen.

genten voor, dewijl $\log \sec a = -\log \cos a$ en $\log \operatorname{cosec} a = -\log \sin a$ zijnde, de logarithmen der secanten en cosecanten onmiddellijk te verkrijgen zijn, door slechts het arithmetisch complement te nemen van die der cosinussen en sinussen. Al de logarithmen zijn in de voormelde tafels tot in zeven decimalen uitgedrukt. Voor berekeningen, die eene mindere mate van nauwkeurigheid vorderen, kan men met vijf decimalen volstaan. Hiertoe zijn bijzonderlijk ingericht de kleine tafels van LALANDE, welke voor het dagelijksche gebruik zeer geschikt zijn. Bij zeevaartkundige berekeningen bedient men zich thans van tafels met zes decimalen, hoedanige onder anderen uitgegeven zijn door BROUWER, in de verzameling van tafels, behoorende bij zijne *Handleiding tot de theoretische en praktische zeevaartkunde*.

27. In de navolgende verklaring van het gebruik der logarithmen-sinustafels, onderstellen wij dat men van die van CALLET voorzien zij.

Aan het hoofd van elke bladzijde vindt men het aantal graden, en in de beide eerste vertikale kolommen ter rechterzijde, het daarbij behoorende volle aantal minuten, benevens de tientallen van seconden aangewezen. Daar de tafel zich niet verder dan 45° uitstrekt, zoo volgt men voor grootere hoeken, de aanwijzing van het aantal graden aan den voet der bladzijde, zoo mede voor de minuten en seconden, de getallen in de beide laatste vertikale kolommen geplaatst, en welke van beneden naar boven opklimmen. Vraagt men nu bijv. de logarithmen der goniometrische lijnen van een hoek van $11^\circ 15' 20''$, zoo leest men onmiddellijk in de tafel, op de horizontale rij met het opgegeven aantal minuten en seconden overeenstemmende,

	$\log \sin 11^\circ 15' 20'' = 9,2904474-10$
	$\log \cos 11^\circ 15' 20'' = 9,9915656-10$
	$\log \operatorname{tg} 11^\circ 15' 20'' = 9,2288818-10$
	$\log \operatorname{cot} 11^\circ 15' 20'' = 0,7011182,$
dus	$\log \sec 11^\circ 15' 20'' = 0,0084344$
en	$\log \operatorname{cosec} 11^\circ 15' 20'' = 0,7095526.$

De drie kolommen met de letters DIFF, bij verkorting DIFFÉRENCE, gemerkt, wijzen de verschillen aan tusschen twee opvolgende logarithmen, overeenstemmende met $10''$ verschil in de bogen. Zij dienen om daaruit, door eene eenvoudige evenredigheid, de logarithmen der goniometrische lijnen te berekenen voor hoeken, die niet onmiddellijk in de tafels voorkomen. Men zal daarbij opmerken, dat de derde dezer kolommen, gelijktijdig de verschillen voor de logarithmen der tangenten en cotangenten bevat, en zulks uithoofde

$\log \operatorname{tg} a = -\log \cot a$ zijnde, de eerste juist evenveel moeten toenemen als de laatsten verminderen. Men stelle bijv. dat men den $\log \sin$ van $39^\circ 18' 12''$ begeert te kennen, dan zal men hierbij aldus te werk gaan.

De tafel geeft voor $\log \sin 39^\circ 18' 10''$.

9,8016907 met een verschil van 257 voor $10''$.

Daar nu voor zeer kleine verschillen in de hoeken, de overeenkomstige verschillen in de logaritmen der goniometrische lijnen nagenoeg aan de eersten evenredig zijn (n° . 25), zoo heeft men de navolgende evenredigheid

$$10'' : 2'' = 257 : x, \text{ dus } x = 51;$$

zijnde de vermeerdering welke de vorenstaande $\log \sin$ moet ondergaan, waardoor men bekomt

$$\log \sin 39^\circ 18' 12'' = 9,8016958 - 10.$$

Bij den logarith. cosinus van eenigen hoek zal men hebben acht te geven om het evenredige verschil af te trekken in plaats van op te tellen, uithoofde de cosinussen verminderen bij het toenemen der hoeken. Dezelfde aanmerking geldt ten aanzien der $\log$. cotangenten.

Men vrage bijv. naar den $\log \cos$ van $40^\circ 12' 12''$, 8.

Volgens de tafel is $\log \cos 40^\circ 12' 10'' 0 = 9,8829596 - 10$

Verskil voor $10'' = 178$

$$10' : 2'', 8 = 178 : x, \text{ waaruit } x = \frac{50}{8}$$

$$\text{dus } \log \cos 40^\circ 12' 12'', 8 = 9,8829546 - 10$$

Moet men omgekeerd den hoek bepalen behoorende tot een gegeven $\log \sin$ of $\cos$, dan zoeke men in de tafel, den hoek wiens $\log \sin$ of $\cos$ het naaste bij komt aan den gegebenen, en berekene het verschil tusschen de beide logaritmen, dan zal men, door eene omgekeerde berekening, den gezochten hoek nauwkeurig bepalen. Het zal genoeg zijn hiervan slechts een enkel voorbeeld tot nadere toelichting te geven.

Zij gegeven $\log \sin x = 9,5783547$

Men vindt terstond $\log 22^\circ 15' 20'' = 9,5783393$

$$\text{verschil} = \frac{154}{1000}$$

Nu bedraag het logaritmen-verskil voor $10''$, 514, dus

$$514 : 154 = 10'' : 3'' \text{ ongeveer,}$$

zoodat de gezochte hoek $x = 22^\circ 15' 23''$.

Zie hier thans eenige voorbeelden ter oefening in het opzoeken van logarithmen der goniometrische lijnen.

$$\log \sin 75^{\circ} 27' 34'', 27 = 9,9858641$$

$$\log \cos 61^{\circ} 51' 0'', 15 = 9,6735041$$

$$\log \operatorname{tg} 27^{\circ} 21' 11'', 34 = 9,7137541$$

$$\log \cot 33^{\circ} 22' 51'', 85 = 0,1811775$$

$$\log \sin 0^{\circ} 19' 25'', 3 = 7,7520103$$

$$\log \operatorname{tg} 1^{\circ} 24' 39'', 12 = 8,3914512$$

$$\log \cot 47^{\circ} 16' 24'', 8 = 9,4496102.$$

Zijn de hoeken grooter dan 90° , als wanneer eenige der goniom. lijnen negatief worden, dan zal men, daar de logarithmen van negatieve getallen onbestaanbaar zijn, slechts een negatief teeken achter de gevonden logarithmen behoeven te plaatsen, ter aanduiding dat de goniometrische lijn met zoodanig teeken aangedaan in rekening moet gebracht worden. Wij zullen hiervan later genoegzame voorbeelden aantreffen. De lezer oefene zich thans insgelijks in het bepalen der hoeken behorende tot de navolgende logarithmen van goniometrische lijnen

$$9,1408419 = \log \sin$$

$$0,4191647 = \log \operatorname{tg}$$

$$8,6170493 = \log \cos$$

$$7,4935617 = \log \cot$$

$$0,8426010 = \log \operatorname{tg}.$$

§ V.

Over de oplossing van goniometrische vergelijkingen.

28. Bij de toepassing der Algebra op meetkundige vraagstukken, waarin hoeken als onbekenden worden aangenomen, gebeurt het dikwerf, dat men tot eindvergelijkingen geraakt, welke met behulp der betrekkingen, tusschen de verschillende goniometrische lijnen bestaande, op eene eenvoudige en sierlijke wijze kunnen opgelost worden. Eenige voorbeelden zullen voldoende zijn om zich met de oplossing dezer soort van vergelijkingen gemeenzaam te maken.

1^o. Zij gegeven de vergelijking

$$a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi = c,$$

waarin φ den onbekenden hoek, en a , b , c , bekende getallen voorstellen.

Stelt men in die vergelijking voor $\cos^2 \varphi$, zijne waarde $1 - \sin^2 \varphi$, dan gaat zij over in

$$\begin{aligned}(a-b) \sin^2 \varphi &= c - b \\ \text{of} \quad \sin \varphi &= \pm \sqrt{\frac{c-b}{a-b}}, \\ \text{en} \quad \cos \varphi &= \pm \sqrt{\frac{a-c}{a-b}}.\end{aligned}$$

Men ziet, dat tot de mogelijkheid dezer oplossing vereischt wordt, dat de getallenwaarde van c tusschen die van a en b begrepen zij.

Beide formules zullen voor den hoek φ een oneindig aantal waarden opleveren (n^o. 11), waaronder men echter alleen de zoodanige kiest, die met den aard van het vraagstuk overeenstemt.

Bepaalt men zich bij den kleinsten positieven hoek φ , dan kan men schrijven *)

$$\begin{aligned}\varphi &= Bg \sin \left(\sqrt{\frac{c-b}{a-b}} \right), \\ \text{en} \quad \varphi &= Bg \cos \left(\sqrt{\frac{a-c}{a-b}} \right).\end{aligned}$$

2^o. Zij gegeven

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = c.$$

Zoo men in deze vergelijking $\sin \varphi$ of $\cos \varphi$ afzondert, en vervolgens voor $\cos \varphi$ of $\sin \varphi$, zijne waarde $\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ of $\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ schrijft, dan is het duidelijk, dat hieruit eene tweede machtsvergelijking zal ontstaan. De goniometrie geeft echter een eenvoudig middel aan de hand, om de oplossing van dusdanige vergelijkingen, en de daaruit voortvloeiende worteltrekkingen, geheel te vermijden. Men deele namelijk de gegevene vergelijking door a , en stelle vervolgens de breuk $\frac{a}{b}$ gelijk aan den tangens van eenigen hulphoek α , hetgeen ingevolge de 4e opmerking van n^o. 12 altijd mag geschieden, en die, daar b en a bekende getallen zijn, door middel der logarith-

*) In de vergelijking $\sin \varphi = \alpha$, beteekent de onbekende φ , den hoek wiens sinus gelijk aan α is; welke betrekking men gewoon is, aldus te schrijven

$$\varphi = Bg \sin \alpha$$

Op gelijke wijze volgt uit de vergelijkingen

$$\begin{aligned}c \sin \varphi &= \beta, & \lg \varphi &= \gamma, \text{ enz.} \\ \varphi &= Bg \cos \beta, & \varphi &= Bg \tan \gamma, \text{ enz.}\end{aligned}$$

men, gemakkelijk in de log sinus-tafels op te zoeken is. Men heeft alzoo

$$\operatorname{tg} a = \frac{b}{a}, \quad \text{en} \quad \sin \varphi + \operatorname{tg} a \cos \varphi = \frac{c}{a},$$

of

$$\sin \varphi \cos a + \sin a \cos \varphi = \frac{c}{a} \cos a$$

dat is

$$\sin (\varphi + a) = \frac{c}{a} \cos a$$

dus

$$\varphi + a = Bg \sin \left(\frac{c}{a} \cos a \right),$$

waardoor de onbekende φ berekend kan worden. De tweede waarde van φ vindt men door op te merken, dat ook

$$\varphi + a = 180^\circ - Bg \sin \left(\frac{c}{a} \cos a \right),$$

vermits hieruit voor $\sin (\varphi + a)$ dezelfde waarde voortvloeit.

Men heeft dus voor de beide waarden van den onbekenden hoek:

$$\varphi = -a + Bg \sin \left(\frac{c}{a} \cos a \right)$$

$$\text{en} \quad \varphi = 180^\circ - a - Bg \sin \left(\frac{c}{a} \cos a \right).$$

Had men de gegevene vergelijking door b gedeeld, en $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} a$ gesteld, dan zou men op gelijke wijze voor de beide waarden van φ gevonden hebben,

$$\varphi = a \pm Bg \cos \left(\frac{c}{b} \cos a \right).$$

Uit de eerste oplossing volgt als voorwaarde van bestaanbaarheid dat $c \cos a < a$ of $c < a \sec a$ zij. Nu is $a \operatorname{tg} a = b$. Derhalve moet $c < \sqrt{a^2 + b^2}$ zijn; welke voorwaarde op gelijke wijze uit de tweede oplossing af te leiden is.

3°. De vergelijking zij:

$$a \operatorname{tg} \varphi + b \cot \varphi = c.$$

Men ziet terstond dat zij, door voor $\cot \varphi$ te schrijven $\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$, tot eene tweede machtsvergelijking opklimt, welke echter aldus kan vermeden worden. Volgens (37) en (38) § III, gaat zij namelijk over in

$$a \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} \right) + b \left(\frac{1 + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi} \right) = c;$$

of, na herleiding in

$$\sin 2\varphi + \left(\frac{a-b}{c}\right) \cos 2\varphi = \frac{a+b}{c},$$

welke vergelijking op gelijke wijze als die van het 2e voorbeeld kan worden behandeld. Men stelde alzoo

$$\frac{a-b}{c} = \cot \alpha, \text{ of } \frac{c}{a-b} = \tan \alpha,$$

dan vindt men $\cos(2\varphi - \alpha) = \frac{a+b}{c} \sin \alpha,$

$$\text{dus } 2\varphi = \alpha \pm Bg \cos \left(\frac{a+b}{c} \sin \alpha\right),$$

waardoor de beide waarden van φ te berekenen zijn. Tot hare bestaanbaarheid wordt gevorderd, dat

$$(a+b) \sin \alpha < c \text{ of } \frac{c}{\sin \alpha} > a+b \text{ zij.}$$

Maar uit $\cot \alpha = \frac{a-b}{c}$, volgt $\frac{c^2}{\sin^2 \alpha} = c^2 + (a-b)^2$,

$$\text{dus } c^2 + (a-b)^2 > (a+b)^2, \text{ of } c^2 > 4ab.$$

4°. De vergelijking zij

$$\cos \varphi \cos(\varphi - \alpha) = m.$$

Men verandere haar, met behulp der form. (56) § III, in de volgende

$$\begin{aligned} \cos(2\varphi - \alpha) + \cos \alpha &= 2m \\ \text{dus } \cos(2\varphi - \alpha) &= 2m - \cos \alpha; \end{aligned}$$

en aangezien elke cosinus zoo wel tot een positieven als tot een negatieven hoek van gelijke grootte behoort, zoo heeft men

$$2\varphi = \alpha \pm Bg \cos(2m - \cos \alpha),$$

welke twee verschillende waarden van φ zal doen kennen.

Tot de bestaanbaarheid der waarden van den hoek φ wordt blijkbaar gevorderd dat $2m - \cos \alpha < 1$, of $1 + \cos \alpha > 2m$, of $\cos \frac{1}{2} \alpha > \sqrt{m}$ zij.

5°. Zij gegeven de vergelijking

$$\sin \varphi \sin(\varphi - \alpha) = a \cos^2 \varphi,$$

welke, op de gewone wijze behandeld, insgelijks tot eene vierkants-

vergelijking leidt. Men verandere haar op grond der form. (55) en (33) § III, in

$$\cos \alpha - \cos (2\varphi - \alpha) = 2a \cos^2 \varphi = a(1 + \cos 2\varphi)$$

of na ontwikkeling, in deze

$$(a + \cos \alpha) \cos 2\varphi + \sin \alpha \sin 2\varphi = \cos \alpha - a.$$

Zij $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + a} = \operatorname{tg} \beta$, dan komt er

$$\cos (2\varphi - \beta) = \left(\frac{\cos \alpha - a}{\cos \alpha + a} \right) \cos \beta.$$

Men stelle nog $a \sec \alpha = \operatorname{tg} p$ of $a = \operatorname{tg} p \cos \alpha$, dan geeft de laatste vergelijking, lettend op form. (46) § III,

$$\cos (2\varphi - \beta) = \left(\frac{1 - \operatorname{tg} p}{1 + \operatorname{tg} p} \right) \cos \beta = \operatorname{tg} (45^\circ - p) \cos \beta.$$

Derhalve $2\varphi = \beta \pm Rg \cos (\operatorname{tg} (45^\circ - p) \cos \beta)$,

welke uitdrukking, zoolang $\alpha < 90^\circ$, voor den hoek φ altijd twee bestaanbare waarden zal opleveren.

6°. Zij gegeven de vergelijking

$$\frac{\sin (\alpha + \varphi)}{\sin \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin (\alpha - \varphi)} = 1,$$

of $\sin (\alpha + \varphi) \sin (\alpha - \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi = \sin \varphi \sin (\alpha - \varphi),$

dat is, ingevolge (55) § III

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi - \cos 2\alpha + \sin 2\varphi &= \cos (\alpha - 2\varphi) - \cos \alpha \\ &= \cos \alpha \cos 2\varphi + \sin \alpha \sin 2\varphi - \cos \alpha, \end{aligned}$$

waaruit verder volgt,

$$\begin{aligned} (1 - \sin \alpha) \sin 2\varphi + (1 - \cos \alpha) \cos 2\varphi &= \cos 2\alpha - \cos \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = (2 \cos \alpha + 1) (\cos \alpha - 1). \end{aligned}$$

Zij nu $\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta$,

dan komt er, na de vergelijking door $1 - \cos \alpha$ gedeeld te hebben,

$$\cos (2\varphi - \beta) = -(1 + 2 \cos \alpha) \cos \beta$$

dus $2\varphi = \beta \pm \{180^\circ - Rg \cos (1 + 2 \cos \alpha) \cos \beta\}.$

7°. Uit de vergelijking

$$Rg \cos \frac{1-x}{2} - Rg \cos \frac{1+x}{2} = 2p$$

vraagt men x op te lossen.

Men kan stellen

$$Bg \cos \frac{1-x}{2} = y + p, \quad Hg \cos \frac{1+x}{2} = y - p$$

waarin y eene nieuwe onbekende is. De laatste vergelijkingen geven:

$$\frac{1-x}{2} = \cos(y+p) = \cos y \cos p - \sin y \sin p,$$

$$\frac{1+x}{2} = \cos(y-p) = \cos y \cos p + \sin y \sin p,$$

en hieruit door optelling en aftrekking:

$$1 = 2 \cos y \cos p,$$

$$x = 2 \sin y \sin p,$$

of
$$\cos y = \frac{1}{2 \cos p}, \quad \sin y = \frac{x}{2 \sin p};$$

neemt men de som der vierkanten van deze vergelijkingen, dan volgt,

$$1 = \frac{1}{4 \cos^2 p} + \frac{x^2}{4 \sin^2 p}$$

of
$$x^2 = 4 \sin^2 p \left(1 - \frac{1}{4 \cos^2 p} \right)$$

$$= \frac{\sin^2 p}{\cos^2 p} (4 \cos^2 p - 1)$$

$$= \frac{\sin^2 p}{\cos^2 p} (3 - 4 \sin^2 p)$$

$$= \frac{\sin p}{\cos^2 p} (3 \sin p - 4 \sin^3 p)$$

Derhalve, ingevolge form. (85) § III,

$$x = \frac{\sqrt{(\sin p \sin 3p)}}{\cos p}.$$

Onder de goniometrische vergelijkingen treft men er dikwerf eenige aan, die, hoewel schijnbaar eenvoudig, nogtans tot eene vierde of hoogere machtsvergelijking leiden, wier oplossing eeniglijk door eene der bekende benaderings-leerwijzen kan geschieden. Tot een voorbeeld hiervan strekke de vergelijking

$$a \sin \varphi + b \tan \varphi = c,$$

welke aldus zal dienen behandeld te worden. Men heeft terstond

$$b \operatorname{tg} \varphi = \frac{b \sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = c - a \sin \varphi$$

$$\text{dus } b^2 \sin^2 \varphi = (1 - \sin^2 \varphi) \{c^2 - 2ac \sin \varphi + a^2 \sin^2 \varphi\}$$

waaruit, na ontwikkeling en herleiding, volgt

$$a^2 \sin^4 \varphi - 2ac \sin^3 \varphi + (b^2 + c^2 - a^2) \sin^2 \varphi + 2ac \sin \varphi - c^2 = 0;$$

welke vierde machtsvergelijking, door $\frac{c}{a} = m$ en $\frac{b}{a} = n$ te stellen, overgaat in

$$\sin^4 \varphi - 2m \sin^3 \varphi + (m^2 + n^2 - 1) \sin^2 \varphi - 2m \sin \varphi - m^2 = 0.$$

Op gelijke wijze zal men uit de vergelijking

$$a \sin \varphi + b \cos \varphi = a \cos^2 \varphi,$$

door voor $\sin \varphi$ te schrijven $\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$, afleiden

$$a^2 \cos^4 \varphi - 2ab \cos^3 \varphi + (a^2 + b^2) \cos^2 \varphi - a^2 = 0,$$

of, wanneer wij $\frac{b}{a} = m$ stellen,

$$\cos^4 \varphi - 2m \cos^3 \varphi + (m^2 + 1) \cos^2 \varphi - 1 = 0.$$

Men kan zich thans hierin verder oefenen door de oplossing der navolgende goniometrische vergelijkingen.

- I. $a \sin (\varphi + \alpha) + b \sin (\varphi + \beta) = c$
- II. $a \sin (\varphi + \alpha) + b \cos (\varphi + \beta) + c \sin \varphi = 0$
- III. $\cos (\varphi + \alpha) \cos (\varphi + \beta) = a$
- IV. $a \sin \varphi + b \sin 2\varphi = c$
- V. $a \sin \varphi + b \cos 2\varphi = c$
- VI. $a \cos \varphi + b \operatorname{tg} \varphi = c$
- VII. $\sin \varphi - \cos \varphi = 4 \cos^2 \varphi \sin \varphi.$

§ VI.

Over het gebruik der sinustafels bij de herleiding en oplossing van vergelijkingen van den eersten, tweeden, en derden graad.

29. In de cijferkunde wordt geleerd hoe samengestelde getallen-uitdrukkingen voor de berekening met logarithmen geschikt of, zoo

als men het wel noemt, *logarithmisch* gemaakt worden. Door toepassing van de goniometrische tafels kan men dat logarithmisch maken zeer bevorderen en daarom zijn deze tafels onmisbaar voor elk, die groote getallenberekeningen te verrichten heeft. Enkele en daaronder eenige voornamen toepassingen laten wij als voorbeeld volgen.

Zij in de eerste plaats gevraagd de uitdrukking

$$x = A + B$$

logarithmisch te maken, dat wil hier zeggen, zoodanig om te zetten, dat men om de waarde van x te berekenen, niet van de getallenwaarde der grootheden A en B , die beide *positief* ondersteld worden, doch alleen van hare logarithmen gebruik behoeft te maken. Daartoe brengen wij haar in den vorm

$$x = A \left(1 + \frac{B}{A} \right)$$

en nemen nu een hulphoek α aan, die bepaald wordt door

$$\tan^2 \alpha = \frac{B}{A},$$

hetgeen altijd kan geschieden, omdat de tangens dus ook zijn vierkant alle mogelijke positieve waarden kan aannemen. Hierdoor wordt

$$x = A (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{A}{\cos^2 \alpha},$$

en hiermede is het doel bereikt, want de waarde van x wordt nu gevonden door het volgende schema

$$\left. \begin{array}{l} \log \tan \alpha = \frac{1}{2} (\log B - \log A) \\ \log x = \log A - 2 \log \cos \alpha, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

hierin toch komen A en B alleen door hare logarithmen voor.

Is eene der beide grootheden negatief, dus

$$x = A - B,$$

dan kan men aannemen, dat $A > B$, want mocht $A < B$, dan kan men schrijven

$$x = -(B - A)$$

en zou door x negatief te nemen en A met B te verwisselen, op hetzelfde neer komen.

Schrijft men nu

$$x = A \left(1 - \frac{B}{A} \right)$$

en stelt

$$\frac{B}{A} = \sin^2 \alpha,$$

hetgeen kan geschieden, omdat $\frac{B}{A}$ eene gewone breuk is, dan wordt

$$x = A (1 - \sin^2 \alpha) = A \cos^2 \alpha.$$

Derhalve heeft men nu het volgende schema

$$\left. \begin{aligned} \log \sin \alpha &= \frac{1}{2} (\log B - \log A) \\ \log x &= \log A + 2 \log \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Het zal later zoowel bij de rechtlijnige als bolvormige driehoeksmeting blijken, van welk groot nut en uitgestrekte toepassing deze herleiding is.

Zij in de tweede plaats te herleiden de uitdrukking

$$x = m \left(\frac{a-b}{a+b} \right),$$

dan schrijft men haar in den vorm

$$x = m \left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} \right)$$

en stelt de breuk

$$\frac{b}{a} = \tan \alpha.$$

Hierdoor wordt, lettende op form. (46) § III,

$$x = m \left(\frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} \right) = m \tan (45^\circ - \alpha),$$

zoodat x bekend is, zoodra men den hoek α uit de sinustafel gevonden heeft.

Is $a > b$, dan wordt $\tan \alpha < 1$, derhalve $\alpha < 45^\circ$, zoodat α positief wordt; voor $a < b$ is $\alpha > 45^\circ$, dus x negatief, hetgeen met de oorspronkelijke uitdrukking overeenkomt.

Is $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ of $x = \sqrt{a^2 + b^2}$

dan stelt men in het eerste geval

$$b = a \sin \alpha \text{ of } \sin \alpha = \frac{b}{a},$$

en in het tweede, $b = a \tan \alpha$ of $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

Hierdoor vindt men achterevolgens

$$x = a \cos \alpha \text{ en } x = a \sec \alpha$$

zonder dat hierbij eenige worteltrekking gevorderd wordt.

Heeft men de vergelijking

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2},$$

dan stelle men $b = a \operatorname{tg} \alpha$ of $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$,

waardoor zij overgaat in (form. (43) § III)

$$x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \cos 2\alpha.$$

Zij $x = \sqrt{\left(\frac{m-n}{m+n}\right)},$

zoo stelle men $n = m \cos \alpha$ of $\cos \alpha = \frac{n}{m},$

dan wordt $x = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right)} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$, volgens form. (36).

Heeft men de vergelijking

$$x = \sqrt{\left(\frac{a \sin \alpha - b \cos \alpha}{a \sin \alpha + b \cos \alpha}\right)},$$

dan vindt men eveneens, door $\frac{b}{a} \cot \alpha = \cos \beta$ te stellen,

$$x = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta.$$

30. De vergelijking

$$\sqrt{a + bx} + \sqrt{a - bx} = c$$

kan aldus opgelost worden. Men stelle

$$bx = a \sin \varphi \text{ of } x = \frac{a \sin \varphi}{b}.$$

Hierdoor verandert zij in

$$\sqrt{a(1 + \sin \varphi)} + \sqrt{a(1 - \sin \varphi)} = c$$

of, volgens form. (68) § III,

$$2\sqrt{a} \cdot \cos \frac{1}{2} \varphi = c \text{ dus } \cos \frac{1}{2} \varphi = \frac{c}{2\sqrt{a}} \sqrt{2}.$$

De hoek φ op deze wijze bekend zijnde, zoo vindt men vervolgens x door de vergelijking

$$x = \frac{a}{b} \sin \varphi,$$

waarin φ zoo wel positief als negatief kan genomen worden.

Zij gegeven de vergelijking

$$\frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}} = c.$$

Dezelfde substitutie als voren geeft onmiddellijk

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \varphi = c \quad \text{en} \quad x = \frac{a}{b} \sin \varphi.$$

Laat gegeven zijn de vergelijking

$$x\sqrt{a-bx^2} = c.$$

Men stelle

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sin \varphi,$$

dan wordt zij

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \sin \varphi \cos \varphi = c, \quad \text{dus} \quad \sin 2\varphi = \frac{2c\sqrt{b}}{a},$$

waaruit voor φ twee verschillende waarden ontstaan, waarvan de eene het complement der andere is.

De twee van elkander in grootte verschillende wortels der opgegeven vergelijking zijn alzoo

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sin \varphi, \quad \text{en} \quad x' = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \cos \varphi.$$

Heeft men de vergelijkingen

$$ax + \frac{a}{x} = b, \quad ax - \frac{a}{x} = b,$$

op te lossen, dan zal men, $x = \operatorname{tg} \varphi$ stellende, ingevolge de form. (41) en (42) § III, de eerste doen overgaan in

$$\operatorname{cosec} 2\varphi = \frac{b}{2a} \quad \text{of} \quad \sin 2\varphi = \frac{2a}{b},$$

en de tweede, door $x = \cot \varphi$ te stellen, in

$$\cot 2\varphi = \frac{b}{2a} \quad \text{of} \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a}{b}.$$

waardoor in elke der gegeven vergelijkingen, de beide waarden van x bekend worden, vermits men, in het eerste geval, 2φ ook door $180^\circ - 2\varphi$, en dus $\operatorname{tg} \varphi$ door $\cot \varphi$ vervangen mag, terwijl men, in het tweede geval, voor 2φ ook $180^\circ + 2\varphi$ kunnende schrijven, hierdoor $x = \cot(90^\circ + \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi$ bekomt.

31. Alle vergelijkingen van den tweeden graad zijn voor eene goniometrische oplossing vatbaar.

Beschouwen wij namelijk de algemeene vergelijking

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

waarin de derde term C positief ondersteld wordt.

Men stelle in de eerste plaats

$$x = y \sqrt{\frac{C}{A}}.$$

Hierdoor verandert zij in

$$Cy^2 + B \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot y + C = 0$$

of, na door Cy gedeeld te hebben,

$$y + \frac{1}{y} = - \frac{B}{\sqrt{AC}}$$

Zij nu wederom $y = tg \varphi$, dan komt er, volgens (41) § III,

$$\sin 2\varphi = \frac{-2\sqrt{AC}}{B},$$

terwijl de beide wortels zijn

$$x = \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot tg \varphi, \quad x' = \sqrt{\frac{C}{A}} \cot \varphi,$$

welke beide negatief zullen zijn, indien B positief is.

Tot de bestaanbaarheid van den hoek φ wordt blijkbaar gevorderd, dat $\frac{2\sqrt{AC}}{B} < 1$ of $B^2 > 4AC$, hetgeen met de gewone wijze van oplossen der gegevene tweede machtsvergelijking overeenstemt.

Voor het geval waarin de term C negatief is, komt men door dezelfde substitutie tot

$$y - \frac{1}{y} = - \frac{B}{\sqrt{AC}},$$

en $y = tg \varphi$ stellende, vindt men, volgens (42) § III,

$$tg 2\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B}.$$

De beide wortels zijn alsdan

$$x = \sqrt{\frac{C}{A}} \cdot tg \varphi, \quad \text{en} \quad x' = -\sqrt{\frac{C}{A}} \cdot \cot \varphi.$$

Zie hier nog eene derde oplossings-wijze, welke zoo wel voor positieve als negatieve waarden van C geldig is.

In de onderstelling dat de wortels bestaanbaar zijn, kan men hunne getallenwaarden altijd door $tg \varphi$ en $tg \varphi'$ uitdrukken. Men heeft derhalve, volgens eene hoofdeigenschap der vierkantsvergelijkingen,

$$tg \varphi + tg \varphi' = \frac{-B}{A}, \quad tg \varphi \cdot tg \varphi' = \frac{C}{A},$$

waaruit terstond volgt

$$\operatorname{tg}(\varphi + \varphi') = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{-B}{A-C} = \frac{B}{C-A}$$

verder heeft men op grond der betrekking

$$\frac{\cos(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi + \varphi')} = \frac{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \varphi'}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \varphi'}$$

$$\cos(\varphi - \varphi') = - \left(\frac{A+C}{B} \right) \sin(\varphi + \varphi').$$

Hierdoor worden $(\varphi + \varphi')$ en $(\varphi - \varphi')$, en dus ook φ en φ' bekend, waaruit vervolgens $\operatorname{tg} \varphi$ en $\operatorname{tg} \varphi'$ kunnen worden berekend.

In het geval van onbestaanbaarheid der wortels kan men aldus te werk gaan. Zij $\frac{B}{A} = a$, $\frac{C}{A} = b$, dan wordt de vergelijking

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Men stelle voor de beide wortels

$$\alpha + \beta \sqrt{-1} \quad \text{en} \quad \alpha - \beta \sqrt{-1},$$

dan heeft men

$$2\alpha = a \quad \text{en} \quad \alpha^2 + \beta^2 = b.$$

$$\text{Zij} \quad \alpha = \sqrt{b} \cdot \sin \varphi \quad \text{en} \quad \beta = \sqrt{b} \cdot \cos \varphi,$$

$$\text{dan is} \quad 2\sqrt{b} \cdot \sin \varphi = a \quad \text{dus} \quad \sin \varphi = \frac{a}{2\sqrt{b}},$$

waardoor de hoek φ bekend is. Voor de wortels heeft men vervolgens

$$\sqrt{b} \{ \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi \} \quad \text{en} \quad \sqrt{b} \{ \sin \varphi - \sqrt{-1} \cos \varphi \},$$

waarin voor a en b hunne voorgaande waarden kunnen gesubstitueerd worden.

Zie hier nog een voorbeeld van twee vergelijkingen met twee onbekenden.

$$\text{Gegeven zijnde} \quad x \sqrt{a - by^2} + y \sqrt{a - bx^2} = c$$

$$x \sqrt{a - by^2} - y \sqrt{a - bx^2} = c',$$

$$\text{zoo stelle men} \quad x = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sin \varphi \quad \text{en} \quad y = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sin \varphi'.$$

Hierdoor gaat de eerste vergelijking over in

$$\frac{a}{\sqrt{b}} \{ \sin \varphi \cos \varphi' + \sin \varphi' \cos \varphi \} = c$$

$$\text{of} \quad \sin(\varphi + \varphi') = \frac{c}{a} \sqrt{b}.$$

Op dezelfde wijze besluit men uit de tweede vergelijking,

$$\sin(\varphi - \varphi') = \frac{c'}{a} \vee b,$$

$$\text{dus} \quad \varphi + \varphi' = Rg \sin\left(\frac{c}{a} \vee b\right)$$

$$\text{en} \quad \varphi - \varphi' = Rg \sin\left(\frac{c'}{a} \vee b\right),$$

waardoor de hoeken φ , φ' , en dus ook de waarden van x en y gemakkelijk te berekenen zijn.

Men zal opmerken dat elke dezer beide onbekenden slechts eene waarde kan hebben. Immers, nemende voor $\varphi + \varphi'$ en $\varphi - \varphi'$ hunne supplementen, dan zal φ insgelijks in zijn supplement overgaan, doch φ' zijne waarde behouden, waardoor $\sin \varphi$ en $\sin \varphi'$, en dus ook x en y onveranderd blijven.

32. Tot eene der fraaiste toepassingen, welke men in lateren tijd van de goniometrische vormen gemaakt heeft, behoort ongetwijfeld haar gebruik bij de oplossing van derdemachts-vergelijkingen, waarin de tweede term ontbreekt, inzonderheid in het geval waarin alle drie wortels bestaanbaar zijn, en hetwelk, bij toepassing van den regel van CARDANUS, zoo als bekend is, tot het zoogenaamde *onherleidbare geval* aanleiding geeft. Wij gaan thans tot de verklaring dezer handelwijze over.

Zij de vergelijking

$$x^3 - ax + b = 0,$$

waarin de coëfficiënt a positief, of de tweede term negatief, en daarenboven

$$\left(\frac{1}{4}b\right)^3 < \left(\frac{1}{4}a\right)^3 \text{ of } 27b^3 < 4a^3$$

ondersteld wordt, aan welke voorwaarden de getallen a en b moeten voldoen, zal de vergelijking drie bestaانبare wortels kunnen opleveren.

Men stelle nu $x = my$, dan heeft men

$$y^3 - \frac{a}{m^2}y + \frac{b}{m^3} = 0 \dots\dots\dots (\alpha)$$

Maar uit form. (81) § III, volgt

$$\sin^3 \varphi - \frac{3}{4} \sin \varphi + \frac{1}{4} \sin 3\varphi = 0.$$

De termen der laatste vergelijking met die der vorige (α) vergelijkende, zoo blijkt hieruit, dat, indien men den coëfficiënt m zodanig bepaalt, dat

$$\frac{a}{m^2} = \frac{3}{4} \quad \text{of} \quad m = \sqrt{\frac{4a}{3}} = 2\sqrt{\frac{a}{3}},$$

en vervolgens $\frac{4b}{m^3} = \sin 3\varphi$

stelt, alsdan $y = \sin \varphi$, en dus $x = 2\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot \sin \varphi$ wordt; zijnde

$$\varphi = \frac{1}{3} Rg \sin \left(\frac{4b}{m^3} \right) = \frac{1}{3} Rg \sin \left(\frac{3b}{2a\sqrt{\frac{1}{3}a}} \right);$$

welke uitdrukking altijd eene bestaanbare waarde voor den hoek φ zal opleveren, aangezien uit de aangenomen onderstelling

$$\frac{b^2}{4} < \frac{a^3}{27},$$

noodzakelijk volgt,

$$\frac{b}{2} < \frac{a}{3} \sqrt{\frac{a}{3}} \quad \text{of} \quad 3b < 2a\sqrt{\frac{1}{3}a},$$

en dus $\sin 3\varphi < 1$.

Om nu daaruit tevens de beide overige bestaanbare wortels, x' , x'' af te leiden, merke men op, dat in de vergelijking

$$\frac{4b}{m^3} = \sin 3\varphi \quad \text{of} \quad 3\varphi = Rg \sin \left(\frac{4b}{m^3} \right)$$

voor den hoek 3φ , insgelijks kan geschreven worden $\pi - 3\varphi$ en $-(\pi + 3\varphi)$, zoodat men behalve den hoek φ nog twee andere hoeken $60^\circ - \varphi$ en $-(60^\circ + \varphi)$ bekomt, waardoor

$$x' = 2\sqrt{\frac{1}{3}a} \cdot \sin(60^\circ - \varphi) \quad \text{en} \quad x'' = -2\sqrt{\frac{1}{3}a} \cdot \sin(60^\circ + \varphi).$$

Had men voor den hoek 3φ geschreven $2\pi + 3\varphi$ en $4\pi + 3\varphi$, waardoor de beide hoeken φ zouden overgaan in $120^\circ + \varphi$ en $(240^\circ + \varphi)$, dan zoude men, aangezien

$$\sin(120^\circ + \varphi) = \sin(60^\circ - \varphi)$$

$$\sin(240^\circ + \varphi) = -\sin(60^\circ - \varphi)$$

voor x' en x'' blijkbaar dezelfde uitkomsten als voren verkregen hebben.

Wellicht zou men kunnen denken, dat er voor 3φ andere hoeken te nemen zijn, waaruit voor $\sin \varphi$, en dus voor x , nieuwe waarden, van de voorgaande verschillende, zouden af te leiden zijn. Doch het is gemakkelijk zich van het tegendeel te overtuigen. Immers, schrijvende voor 3φ de opklimmende reeksen van bogen

$$\pi - 3\varphi, 3\pi - 3\varphi, 5\pi - 3\varphi, 7\pi - 3\varphi \text{ enz. } (2n+1)\pi - 3\varphi, \\ 2\pi + 3\varphi, 4\pi + 3\varphi, 6\pi + 3\varphi, 8\pi + 3\varphi \text{ enz. } 2n\pi + 3\varphi,$$

die alle voor $\sin 3\varphi$ dezelfde waarde opleveren, dan ziet men terstond in, dat zoodra $n=3$ of eenig veelvoud van 3 wordt, φ met 2π toeneemt, en dus $\sin \varphi$ zijne waarde behoudt. Er blijven dus van elke reeks slechts de drie eerste termen ter beschouwing overig.

$$\begin{aligned}\text{Nu is} \quad \sin \left(\frac{3\pi - 3\varphi}{3} \right) &= \sin (\pi - \varphi) = \sin \varphi \\ \sin \left(\frac{5\pi - 3\varphi}{3} \right) &= \sin (2\pi - \frac{\pi}{3} - \varphi) = -\sin \left(\frac{\pi}{3} + \varphi \right) \\ \sin \left(\frac{2\pi + 3\varphi}{3} \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{3} - \varphi \right) \\ \sin \left(\frac{4\pi + 3\varphi}{3} \right) &= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} + \varphi \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{3} + \varphi \right) \\ \sin \left(\frac{6\pi + 3\varphi}{3} \right) &= \sin (2\pi + \varphi) = \sin \varphi\end{aligned}$$

waaruit blijkt dat men steeds dezelfde waarden voor x terug bekomt.

De oplossing der cubische vergelijking

$$x^3 - ax + b = 0$$

geschiedt dus, in het onherleidbaar geval, door middel van het volgende stelsel formules

$$\begin{aligned}m &= 2\sqrt{\frac{a}{3}}, \\ \varphi &= \frac{1}{3} Bg \sin \left(\frac{\frac{4}{3}b}{m^3} \right), \\ x &= m \sin \varphi, \\ x' &= m \sin (60^\circ - \varphi), \\ x'' &= -m \sin (60^\circ + \varphi);\end{aligned}$$

welke met behulp der logarithmen gemakkelijk te berekenen zijn *).

33. Men had de oplossing der gegeven vergelijking insgelijks kunnen afleiden uit de vergelijking

$$\cos^3 \varphi - \frac{3}{4} \cos \varphi - \frac{1}{4} \cos 3\varphi = 0$$

voortvloeiende uit (86) § III, en zoude alsdan het navolgende stelsel formules verkregen hebben.

*) Dat de drie gevonden waarden van x werkelijk aan de gegeven vergelijking voldoen, wordt hierdoor bevestigd, dat men met behulp der form. (67) en (55) § III, zal bevinden

$$\begin{aligned}x + x' + x'' &= 0 \\ xx' + xx'' + x'x'' &= -a \text{ en } xx'x'' = -b.\end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{1}{3} Bg \cos\left(\frac{-4b}{m^3}\right)$$

$$x' = m \cos \varphi$$

$$x' = m \cos (120^\circ - \varphi) = -\sin (30^\circ - \varphi)$$

$$x'' = m \cos (120^\circ + \varphi) = -\sin (30^\circ + \varphi).$$

Om de voorgaande wijze van oplossen door een voorbeeld nader toe te lichten, zoo laat gevraagd worden de wortels te berekenen der vergelijking

$$x^3 - 21x + 37 = 0$$

waarin $a = 21$, $b = 37$, en dus $(\frac{1}{3}b)^3 < (\frac{1}{3}a)^3$.

Zie hier den loop der berekening volgens de eerste oplossing

$$\frac{1}{3}a = 7, \quad 4b = 148.$$

$$\log 7 = 0,8450980$$

$$\log m = 0,7235790$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 0,4225490 \end{array}$$

$$\log \sin \varphi = 9,6870266$$

$$\log 2 = 0,3010300$$

$$\log x = 0,4106056$$

$$\log m = 0,7235790$$

$$x = 2,573982$$

$$\log m^3 = 2,1707370$$

$$\log m = 0,7235790$$

$$\log 148 = 2,1702617$$

$$\log \sin (60^\circ - \varphi) = 9,7104909$$

$$\log \sin 3\varphi = 9,9995247$$

$$\log x' = 0,4340699$$

$$3\varphi = 87^\circ 19' 12''$$

$$x' = 2,716877$$

$$\varphi = 29^\circ 6' 24''$$

$$60^\circ - \varphi = 30^\circ 53' 36''$$

$$\log m = 0,7235790$$

$$60^\circ + \varphi = 89^\circ 6' 24''$$

$$\log \sin (60^\circ + \varphi) = 9,9999472$$

$$\log x'' = 0,9235262$$

$$x'' = -5,290859$$

34. Het is echter niet alleen in het geval van drie bestaانبare wortels, maar ook in dat, waarin de vergelijking slechts een bestaانبaren wortel bezit, dat men zich van eene goniometrische oplossing met voordeel kan bedienen. Zie hier den weg, dien men daartoe kan inslaan, zonder hierbij, zoo als gewoonlijk geschiedt, de formule van CARDANUS tot grondslag te nemen.

Men onderstelle vooreerst in de vergelijking

$$x^3 - ax + b = 0$$

a positief en $\frac{4}{m^3}b > 1$, of $(\frac{1}{3}b)^3 > (\frac{1}{3}a)^3$. Zij wederom

$$x = my, \quad \text{en} \quad m = 2\sqrt{\frac{a}{3}}.$$

Laat nu in de hieruit afgeleide vergelijking

$$y^3 - \frac{2}{3}y + \frac{b}{m^3} = 0$$

$$\frac{m^3}{\frac{2}{3}b} = \sin \varphi, \quad \text{dus } \frac{b}{m^3} = \frac{1}{3} \operatorname{cosec} \varphi,$$

en eindelijk
$$y = -\frac{1}{3} \left(p + \frac{1}{p} \right)$$

gesteld worden, dan is blijkbaar

$$y^3 - \frac{2}{3}y = -\frac{1}{3} \left(p^3 + \frac{1}{p^3} \right) = \frac{-b}{m^3}$$

en dus $p^3 + \frac{1}{p^3} = \frac{8b}{m^3} = 2 \operatorname{cosec} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cot \frac{\varphi}{2};$

aan welke vergelijking mitsdien zal kunnen voldaan worden, door

$$p = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg} \psi$$

te stellen, gevende alzoo

$$x = my = -\frac{m}{2} (\operatorname{tg} \psi + \cot \psi) = \frac{-m}{\sin 2\psi}.$$

De beide overige wortels der vergelijking worden aldus verkregen.

Daar namelijk uit $p^3 = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, tevens volgt

$$p = r \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}, \quad \text{en} \quad p = r' \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}},$$

zijnde hierin $r = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ en $r' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, of $r' = \frac{1}{r}$,

zoo bekomt men voor de beide onbestaanbare wortels

$$x' = -\frac{m}{2} \{ r \operatorname{tg} \psi + r' \cot \psi \}$$

$$\text{en } x'' = -\frac{m}{2} \{ r' \operatorname{tg} \psi + r \cot \psi \};$$

welke beide uitdrukkingen gemakkelijk tot den navolgenden vorm kunnen herleid worden.

$$x' = -\frac{m}{2} \{ \operatorname{cosec} 2\psi + \sqrt{-3} \cdot \cot 2\psi \}$$

$$x'' = -\frac{m}{2} \{ \operatorname{cosec} 2\psi - \sqrt{-3} \cdot \cot 2\psi \}.$$

Beschouwen wij eindelijk de vergelijking

$$x^3 + ax + b = 0$$

waarin a positief zij, en welke dus altijd twee onbestaanbare wortels moet opleveren.

Stellende wederom $x = my$, $m = 2\sqrt{\frac{a}{3}}$, dan heeft men

$$y^3 + \frac{2}{3}y + \frac{b}{m^3} = 0.$$

Zij thans $y = \frac{1}{3} \left(p - \frac{1}{p} \right)$,

en dus $y^3 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3} \left(p^3 - \frac{1}{p^3} \right) = \frac{-b}{m^3}$;

aan welke vergelijking voldaan wordt, door

$$\frac{4b}{m^3} = \cot \varphi, \quad \text{of} \quad \frac{m^3}{4b} = \tan \varphi,$$

$$\text{en} \quad p^3 = \tan \frac{\varphi}{2} \quad \text{of} \quad p = \sqrt[3]{\tan \frac{\varphi}{2}} = \tan \psi$$

te stellen. Hierdoor vindt men voor den bestaanbaren wortel

$$x = -m \cot 2\psi$$

en voor de beide onbestaanbare wortels

$$x' = \frac{m}{2} \{ r \tan \psi - r' \cot \psi \}$$

$$x'' = \frac{m}{2} \{ r' \tan \psi - r \cot \psi \}$$

welke beide laatste ook aldus kunnen voorgesteld worden :

$$x'' = \frac{m}{2} \{ \cot 2\psi + \sqrt{-3} \operatorname{cosec} 2\psi \}$$

$$x'' = \frac{m}{2} \{ \cot 2\psi - \sqrt{-3} \operatorname{cosec} 2\psi \}.$$

Een enkel voorbeeld zal genoegzaam zijn, om insgelijks de formules voor een der beide gevallen van onbestaanbaarheid van twee wortels nader toe te lichten.

Te dien einde zij gegeven de vergelijking

$$x^3 + 24x - 68 = 0,$$

waarin $a = 24$ en $b = -68$, dus $\frac{1}{3}a = 8$ en $4b = -272$.

Deze vergelijking tot het laatste der drie voorgaande gevallen behorende, zoo heeft men hierbij de navolgende bewerking :

$\log 8 = 6,9030900$	$\log m = 0,7525750$
$\log 2 = 0,3010300$	$\log \cot 2 \psi = 9,6121322$
$\log m = 0,7525750$	$\log x = 0,3647072$
$\log m^3 = 2,2577250$	$x = 2,315833$
$\log 272 = 2,4345689$	—
$\log \operatorname{tg} \varphi = 2,8231561$	$\frac{m}{2} \cot 2 \psi = -1,157916$
$\varphi = -33^\circ 38' 39'',3$	—
$\frac{\varphi}{2} = -16^\circ 49' 19'',65$	$\log m = 0,7525750$
	$\log \sin \psi = 9,9663536$
$\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 9,4804944$	$\log m \operatorname{cosec} 2 \psi = 0,7862214$
$\log \operatorname{tg} \psi = 9,8268315$	$m \operatorname{cosec} 2 \psi = 6,112534$
$\psi = -33^\circ 52' 5'',76$	$\frac{1}{4} m \operatorname{cosec} 2 \psi = 3,056267$
$2\psi = -67^\circ 44' 11'',52$	

zoodat de beide onbestaanbare wortels zullen zijn

$$x' = -1,157916 - 3,056267 \sqrt{-3}$$

$$\text{en } x'' = -1,157916 + 3,056267 \sqrt{-3}.$$

35. Het zal wellicht niet onnuttig zijn, hier ten slotte nog aan te toonen, hoe men eene bijzondere klasse van volledige cubische vergelijkingen kan verkrijgen, welke, zonder voorafgaande verdrijving van den tweeden term, insgelijks voor eene rechtstreeksche goniometrische oplossing vatbaar zijn *).

Men stelde namelijk in de form. (25) § III, $b = 2a$, dan komt er

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 2a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} 2a}$$

en hierin vervolgens voor $\operatorname{tg} 2a$, zijne waarde $\frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$ substituërende, verkrijgt men, na eene lichte herleiding,

$$\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\text{waaruit } \operatorname{tg}^3 a - 3 \operatorname{tg} 3a \cdot \operatorname{tg}^2 a - 3 \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} 3a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

*) Voor zoo veel ons bekend is, wordt hieromtrent bij geen anderen schrijver eenige opmerking medegedeeld.

Beschouwen wij thans de vergelijking

$$x^3 - ax^2 - bx + c = 0,$$

welke voor $x = my$, overgaat in

$$y^3 - \frac{a}{m} y^2 - \frac{b}{m^2} y + \frac{c}{m^3} = 0,$$

en bepalen wij m zoodanig dat

$$\frac{a}{m} = \frac{3c}{m^3} \quad \text{en dus} \quad m = \sqrt[3]{\frac{3c}{a}} \text{ zij.}$$

Vergelijken wij thans de coëfficiënten der vorige vergelijking met die van (α), dan blijkt hieruit terstond dat, indien er tusschen de drie coëfficiënten a , b , c , eene zoodanige betrekking bestaat, dat

$$\frac{b}{m^2} = \frac{ba}{3c} = 3 \quad \text{of} \quad ab = 9c, \quad \text{dus} \quad m = \sqrt[3]{\frac{b}{3}},$$

$$\text{voorts} \quad \frac{c}{m^3} = \frac{a}{3m} = \frac{a}{\sqrt[3]{3b}} = \text{tg } 3\varphi$$

gesteld wordt, en men hierbij in het oog houdt, dat

$$\text{tg } 3\varphi = \text{tg } (180^\circ + 3\varphi) = \text{tg } (360^\circ + 3\varphi),$$

de drie wortels der opgegevene vergelijking alle drie bestaanbaar zijn, en voorgesteld zullen worden door de formules

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{3}} \cdot \text{tg } \varphi,$$

$$x' = \sqrt[3]{\frac{b}{3}} \cdot \text{tg } (60^\circ + \varphi),$$

$$x'' = -\sqrt[3]{\frac{b}{3}} \cdot \text{tg } (60^\circ + \varphi);$$

zijnde hierin

$$\varphi = \frac{1}{3} Bg \text{ tang } \left(\frac{a}{\sqrt[3]{3b}} \right).$$

Bij de vierde en hoogere machts-vergelijkingen zouden er insgelijks bijzondere klassen op te sporen zijn, waarop de goniometrische oplossing rechtstreeks konde worden toegepast; doch ons bestek niet gedoogende hier in eenig verder onderzoek dienaangaande te treden, zullen wij thans tot de eigenlijke driehoeksmeting overgaan.

TWEEDE HOOFDSTUK.

RECHTLIJNIGE OF VLAKKE DRIEHOEKSMETING.

§ VII.

Over de oplossing der rechthoekige driehoeken.

36. Volgens het besprokene in § I zullen wij nu de goniometrische grootheden niet meer als lijnen, maar als verhoudingen beschouwen, door invoering van den straal, die in de goniometrie om de aangevoerde gronden gelijk aan de eenheid gesteld mocht worden.

Zij ABC (fig. 7) een driehoek, die rechthoekig is in C en waarvan wij de hoeken door de groote letters bij de hoekpunten geplaatst en de zijden door de kleine letters, die overeenkomen met de groote letters der overstaande hoekpunten, zullen aanwijzen, zoodat $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, even als in de meetkunde. Beschouwen wij nu AB als den straal eens cirkels, die uit A als middelpunt wordt beschreven, dan is overeenkomstig de oorspronkelijke bepaling der goniometrische grootheden:

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}, \quad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}. \quad (2)$$

Evenzoo verkrijgen wij, door B als het middelpunt, AB als den straal eens cirkels aan te merken,

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De formules (3) en (4) kunnen onmiddellijk uit (1) en (2) worden afgeleid door op te merken, dat B het complement is van A. Omgekeerd ligt in het gelijktijdig bestaan der vergelijkingen (1) en (4) of (2) en (3) opgesloten, dat de driehoek rechthoekig is in C.

Door de vergelijkingen (1) en (2) en ook (3) en (4) op elkander te deelen, volgt

$$\begin{aligned} \tan A &= \cot B = \frac{a}{b} \\ \cot A &= \tan B = \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

welke formules overeenkomen met de oorspronkelijke bepaling der tangenten. Wanneer men namelijk A als middelpunt, AC als straal eens cirkels beschouwt, is

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b},$$

en door B als middelpunt, BC als straal te nemen,

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

De formules (1) — (4) verbonden met de theorema van PYTHAGORAS,

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

zijn voldoende voor de oplossing der rechthoekige driehoeken; zij zijn gemakkelijk in het geheugen te prenten, wanneer men ze op de volgende wijze in woorden brengt.

De sinus van elken scherp en hoek is gelijk aan de verhouding tusschen de overstaande rechthoekszijde en de hypothenusa.

De cosinus van elken scherp en hoek is gelijk aan de verhouding tusschen de aangelegen rechthoekszijde en de hypothenusa.

De tangens van elken scherp en hoek is gelijk aan de verhouding tusschen de overstaande en de aangelegen rechthoekszijde.

De som der vierkanten van de beide rechthoekszijden is gelijk aan het vierkant der hypothenusa.

37. Zooals in de meetkunde geleerd is, heeft men voor de bepaling van een rechthoekigen driehoek, behalve den rechten hoek, nog

twee elementen noodig en even als daar het doel is, in elk geval den driehoek te construeren, moet nu in elk geval uit de getallenwaarde der gegevene elementen, die van de onbekende afgeleid worden. De verschillende gevallen van oplossing, die zich hierbij kunnen voordoen, zijn:

1. Gegeven de hypothenusa en eene rechthoekszijde, te berekenen de andere zijde en de beide scherpe hoeken.

2. Gegeven de hypothenusa en een scherp hoek, te berekenen den anderen hoek en de beide rechthoekszijden.

3. Gegeven eene rechthoekszijde en een scherp hoek, te berekenen de hypothenusa, de andere rechthoekszijde en den anderen scherp hoek.

4. Gegeven de beide rechthoekszijden, te berekenen de hypothenusa en de scherpe hoeken.

Voor dat men eenigen driehoek in getallen gaat berekenen, is het noodig te onderzoeken of de gegevens onderling bestaanbaar zijn, dat is, of uit de gegeven elementen een driehoek kan samengesteld worden. Daarom zullen wij bij elk geval de voorwaarden, waaraan de gegevens moeten voldoen, opnoemen; mochten de getallen opgaven daarmede niet overeenkomen, dan kan men de berekening sparen, omdat men op onmogelijke uitkomsten zou stuiten.

Bij elke oplossing moet men zoo veel mogelijk trachten elk der onbekenden onmiddellijk uit te drukken in de gegevens en niet de eene onbekende afleiden uit de anderen. Daarbij toch zou eene fout, in de eerste berekening gemaakt, overgaan op de volgende, terwijl bij de eerstgenoemde handelwijze eene fout in eene berekening van geen invloed is op de andere.

Eindelijk moet elke formule, die de getallenwaarde van een element oplevert, zoo zij het niet mocht zijn, voor de berekening met logaritmen geschikt gemaakt worden. De regels en voorbeelden van § V en § VI kunnen hierbij veel dienst bewijzen.

Wij zullen nu de vier genoemde gevallen van oplossing achtereenvolgens behandelen, en bij elk een voorbeeld in getallen voegen.

1^e GEVAL.

38. *Gegeven de hypothenusa c en eene rechthoekszijde a , te berekenen de derde zijde b en de beide scherpe hoeken A en B .*

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarde $c > a$, omdat de hypothenusa altijd de langste zijde eens rechthoekigen driehoeks is.

De formules, die elk der onbekenden uitdrukken in de gegevens, zijn

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \sin A = \cos B = \frac{a}{c}.$$

Om de eerste voor de berekening met logarithmen geschikt te maken, schrijft men haar in den vorm

$$b = \sqrt{(c + a)(c - a)}.$$

De laatste geeft terstond de waarden van A en B. Men heeft dus voor de berekening het volgende stelsel

$$\log b = \frac{1}{2} \{ \log(c + a) + \log(c - a) \}$$

$$\log \sin A = \log \cos B = \log a - \log c.$$

Voorbeeld. Zij $a = 542,84$ $c = 981,374$.

Berekening.

$c - a = 438,534$	$\log a = 2,7346718$
$c + a = 1524,214$	$\log c = 2,9918346$
$\log c + a = 3,1830460$	
$\log c - a = 2,6420033$	$\log \sin A = 9,7428372$
	$A = 33^\circ 34' 58",4$
$5,8250493$	$B = 56^\circ 25' 1",6$
$\log b = 2,9125246$	
$b = 817,569$	

Aanmerking. Indien de hoek A weinig van 90° verschilt (hetgeen uit de gegevens blijkt, wanneer a en c weinig verschillen) en alzoo niet zeer nauwkeurig door zijn sinus kan worden bepaald *), zal het, ingeval eene zeer juiste berekening van dien hoek gevorderd wordt, verkieslijker zijn den volgende weg in te slaan.

De formules (32) en (36) § III geven

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{2}}, \quad \tan \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}},$$

*) Hoe minder de hoeken van 90° verschillen, des te kleiner worden de verschillen van hunne sinussen, en hierdoor ontstaat er eenige onzekerheid bij de berekening van het ontbrekende aantal seconden en verdere onderdeelen, naar het voorschrift van § IV.

of omdat $\cos B = \frac{a}{c}$

$$\sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{c-a}{2c}\right)}, \quad \tan \frac{1}{2} B = \sqrt{\left(\frac{c-a}{c+a}\right)};$$

door elk van deze formules kan de kleine hoek $\frac{1}{2} B$ zeer nauwkeurig berekend worden.

II^e G E V A L.

Gegeven de hypotenusa c en een scherpe hoek A, te berekenen den hoek B en de beide rechthoekszijden a en b.

De gegevens behoeven aan geene andere voorwaarde te voldoen dan $A < 90^\circ$.

De betrekkingen tusschen elke onbekende en de gegevens zijn

$$B = 90^\circ - A$$

$$a = c \sin A, \quad b = c \cos A,$$

of in logarithmen

$$\log a = \log c + \log \sin A, \quad \log b = \log c + \log \cos A.$$

Voorbeeld. Zij $c = 786,73$. $A = 63^\circ 28' 17'', 3$.

Berekening.

$$B = 90^\circ - A = 26^\circ 31' 42'', 7$$

$$\log c = 2,8958257$$

$$\log c = 2,8958257$$

$$\log \sin A = 9,9516833$$

$$\log \cos A = 9,6499609$$

— opg.

opg.

$$\log a = 2,8475090$$

$$\log b = 2,5457866$$

$$a = 703,897.$$

$$b = 351,388.$$

III^e G E V A L.

Gegeven zijnde eene rechthoekszijde a en een scherpe hoek A of B, te berekenen den anderen hoek, de hypotenusa c en de derde zijde b.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen behalve A of B $< 90^\circ$.

Den onbekenden scherp hoek vindt men telkens uit den gegevens door het complement te nemen.

Verder zijn hier de formules

$$c = \frac{a}{\sin A},$$

$$b = a \cot A,$$

$$\log c = \log a - \log \sin A,$$

$$\log b = \log a + \log \cot A.$$

Voorbeeld. Zij $a = 804,498$. $A = 40^{\circ} 32' 50'',8$.

Berekening.

$$\begin{array}{rcl}
 B = 90^{\circ} - A = 49^{\circ} 27' 9'',2 & & \\
 \log a = 2,9055250 & \log a = 2,9055250 & \\
 \log \sin A = 9,8129652 & \log \cot A = 0,0677730 & \\
 \hline \text{afg.} & \hline \text{opg.} & \\
 \log c = 3,0925598 & \log b = 2,9732980 & \\
 c = 1237,542. & b = 940,368. &
 \end{array}$$

IV^e GEVAL.

Gegeven zijnde de beide rechthoekszijden a en b , te berekenen de hypotenusa c en de beide scherpe hoeken.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarden te voldoen.

Om de onbekenden in de gegevens uit te drukken, dienen de formules

$$\begin{aligned}
 c &= \sqrt{a^2 + b^2} \\
 \tan A &= \cot B = \frac{a}{b}.
 \end{aligned}$$

De eerste is bij groote getalwaarden van a en b niet geschikt voor de berekening met logarithmen, maar kan naar het voorschrift van § VI geschikt gemaakt worden, door te stellen

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}, \text{ dan is } c = \frac{a}{\sin \alpha},$$

hetgeen op het zelfde neêrkomt, als dat men eerst den hoek $\alpha = A$ berekent en van dezen hoek gebruik maakt om c te vinden. Hier moet men dus van den regel om elke onbekende in de gegevens uit te drukken afwijken, omdat men anders op eene niet logarithmische formule stuit.

Voor de berekening heeft men nu:

$$\log \tan A = \log a - \log b, \quad \log c = \log a - \log \sin A.$$

Voorbeeld. Zij $a = 3004,56$, $b = 5682,095$.

Berekening.

$$\begin{array}{rcl}
 \log a = 3,4776809 & \log a = 3,4777809 & \\
 \log b = 3,7545085 & \log \sin A = 9,6697344 & \\
 \hline \text{afg.} & \hline \text{afg.} & \\
 \log \tan A = 9,7232724 & \log c = 3,8080465 & \\
 A = 27^{\circ} 52' 7'',84 & c = 6427,564. & \\
 B = 62^{\circ} 7' 52'',16. & &
 \end{array}$$

Aanmerking. Men kan de onbekende hoeken ook door de navolgende formule bepalen.

$$\text{Uit de vergelijking} \quad \operatorname{tg} 2B = \frac{2 \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg}^2 B},$$

volgt namelijk, omdat $\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}$,

$$\operatorname{tg} 2B = \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{2ab}{(a+b)(a-b)},$$

maar $A - B = 90^\circ - 2B$ zijnde, zal

$$\operatorname{tg} (A - B) = \cot 2B = \frac{(a+b)(a-b)}{2ab},$$

en hierdoor het verschil der onbekende hoeken gevonden worden. Men heeft vervolgens

$$A = 45^\circ + \frac{1}{2}(A - B) \quad \text{en} \quad B = 45^\circ - \frac{1}{2}(A - B).$$

§ VIII.

Over de oplossing der scheefhoekige driehoeken.

39. Zij ABC een willekeurige scheefhoekige (fig. 8) of stomphoekige (fig. 9) driehoek, waarin wij weder de zijden, staande over de hoeken A, B, C, door de kleine letters a , b , c zullen aanwijzen, en laat uit een der hoekpunten B, eene loodlijn BD op de overstaande zijde AC worden neêrgeleten, waardoor twee rechthoekige driehoeken ontstaan. Wij zullen alsnu, uit de in de vorige § reeds gevonden formules, gemakkelijk de meer algemeene formules kunnen afleiden, welke tot de oplossing der onderscheidene gevallen van de scheefhoekige driehoeken moeten dienen.

Men heeft namelijk in elk der rechthoekige driehoeken ABD, DBC,

$$BD = AB \sin A = BC \sin C$$

$$\text{dat is} \quad c \sin A = a \sin C$$

$$\text{of} \quad a : c = \sin A : \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Op gelijke wijze zou men, door de loodlijn uit eene der beide andere hoekpunten te trekken, gevonden hebben,

$$a : b = \sin A : \sin B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\text{dus} \quad a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ons leerende, dat in elken driehoek de zijden tot elkander in reden staan als de sinussen van de overstaande hoeken.

De standvastige verhouding van den sinus eens hoeks en de tegenovergelegen zijde wordt de *modulus* des driehoeks genoemd, zoodat

$$M = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Het zal den lezer niet moeielijk vallen aan te toonen, dat deze modulus het omgekeerde voorstelt van de middellijn des cirkels, die om den driehoek kan beschreven worden.

Uit (6) kan men de volgende evenredigheid afleiden:

$$a + b : a - b = \sin A + \sin B : \sin A - \sin B.$$

Derhalve volgens form. (57) § III

$$a + b : a - b = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B);$$

dat is:

In elken driehoek staat de som van twee zijden tot haar verschil, als de tangens van de halve som der overstaande hoeken tot den tangens van het halve verschil dezer hoeken.

Omdat $\frac{1}{2} (A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C$, kan de voorgaande evenredigheid ook aldus geschreven worden:

$$a + b : a - b = \cot \frac{1}{2} C : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B),$$

waaruit
$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C (8)$$

of ook
$$\operatorname{tg} (B + \frac{1}{2} C) = \left(\frac{a + b}{a - b} \right) \operatorname{tg} \frac{1}{2} C (9)$$

als zijnde $\frac{1}{2} (A - B) = \frac{1}{2} (180^\circ - 2B - C) = 90^\circ - (B + \frac{1}{2} C).$

40. Uit de evenredigheid (7) laten zich nog twee andere fraaie betrekkingen afleiden, welke, even als de voorgaande, bij een der gevallen van oplossing hare toepassing vinden, zoo als straks nader zal aangetoond worden. Die evenredigheid geeft namelijk tevens de volgende:

$$a + b : c = \sin A + \sin B : \sin C = \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) : \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C.$$

Maar, aangezien $A + B = 180^\circ - C$, is

$$\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) = \cos \frac{1}{2} C.$$

Derhalve
$$a + b : c = \cos \frac{1}{2} (A - B) : \sin \frac{1}{2} C (10)$$

Op gelijke wijze vindt men

$$a - b : c = \sin \frac{1}{2} (A - B) : \cos \frac{1}{2} C (11)$$

welke beide evenredigheden door deeling op nieuw de formule (8) te voorschijn brengen.

Zij geven daarenboven

$$c = (a + b) \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (A - B)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (12)$$

$$\text{en } c = (a - b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2} (A - B)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (13)$$

waardoor men eene der zijden van een driehoek zoude kunnen berekenen, indien men gegeven had de som of het verschil der beide overige zijden, den ingesloten hoek, benevens het verschil der overstaande hoeken.

Elke dezer laatste formules in het vierkant brengende, zoo leidt men hieruit gemakkelijk af

$$c^2 = (a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} C + (a - b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} C \cdot \cdot \cdot (14)$$

welke vergelijking, na ontwikkeling, en met inachtneming dat

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} C &= \cos C, \\ \text{geeft} \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (15) \end{aligned}$$

Deze voorname formule stemt geheel overeen met en kan gemakkelijk afgeleid worden uit de bekende meetkundige betrekking tusschen de drie zijden en de projectie van eene der zijden op eene andere. Zij gaat onmiddellijk in die betrekking over, wanneer men volgens fig. 8

$$a \cos C = CD$$

en volgens fig. 9

$$-a \cos C = a \cos (180^\circ - C) = CD \text{ stelt.}$$

41. De vergelijking (14) geeft te kennen, dat de zijde c de hypothenusa voorstelt eens rechthoekigen driehoeks, tot rechthoekszijden hebbende

$$(a + b) \sin \frac{1}{2} C \quad \text{en} \quad (a - b) \cos \frac{1}{2} C,$$

eene eigenschap, welke tevens door de navolgende vrij eenvoudige constructie afzonderlijk kan betoogd worden.

Men beschrijve namelijk uit het hoekpunt C des driehoeks ABC (fig. 10) als middelpunt, met een straal gelijk aan de grootste der beide zijden a en b , een halven cirkel, en trekke daarin de middellijn DCE, de koorden DB, EB, en uit A de loodlijn AF op BD, dan zal, omdat die beide koorden op elkander loodrecht staan, AF evenwijdig met BE loopen. Nu is

$$AD = a + b, \quad AE = a - b, \quad CDB = \frac{1}{2} C,$$

$$\text{dus} \quad AF = AD \times \sin D = (a + b) \sin \frac{1}{2} C.$$

$$\text{Maar} \quad AE : BF = AD : FD = 1 : \cos \frac{1}{2} C$$

$$\text{dus} \quad BF = (a - b) \cos \frac{1}{2} C$$

$$\text{en} \quad AB^2 = AF^2 + BF^2 = (a + b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} C + (a - b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} C.$$

Verder geeft de driehoek ABF, aangezien hoek ABF = $B + \frac{1}{2}C$, ter bepaling van de zijde AB, nog de vergelijkingen

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\cos(B+\frac{1}{2}C)} = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\sin(B+\frac{1}{2}C)} = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}$$

even als hiervoren langs een anderen weg gevonden is.

Dezelfde constructie levert tevens een eenvoudig meetkundig be-
toog op de verg. (8). Immers, uit de evenredigheid

$$EA : AD = BF : FD = \tan BAF : \tan FAD = \cot(B + \frac{1}{2}C) : \cot\frac{1}{2}C$$

$$\text{volgt} \quad \cot(B + \frac{1}{2}C) = \tan\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot\frac{1}{2}C.$$

De hiervoren gevondene form. (15)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

laat zich insgelijks rechtstreeks betoogen.

Te dien einde heeft men in fig. 8

$$BD = a \sin C \quad \text{en} \quad AD = b - a \cos C,$$

en in fig. 9

$$BD = a \sin(180^\circ - C), \quad AD = b + a \cos(180^\circ - C)$$

$$\text{of} \quad BD = a \sin C \quad AD = b - a \cos C,$$

dus in beide gevallen

$$c^2 = BD^2 + AD^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Op gelijke wijze zal men voor de beide overige zijden a en b bekomen

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

42. Het verdient opmerking dat deze betrekking tusschen de drie zijden en een der hoeken nog daarenboven kan afgeleid worden uit form. (77); bevattende eene betrekking tusschen de sinussen en cosinussen van drie hoeken, te zamen 180° uitmakende.

Schrijft men namelijk voor die hoeken: A, B, C, dan geeft de aangehaalde formule

$$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A} = 1 + \frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} - \frac{2 \sin B}{\sin A} \cos C$$

welke, uithoofde

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{c}{a} \quad \text{en} \quad \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a},$$

terstond verandert in

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Uit de beschouwing der figuur kan men tevens gemakkelijk eene formule vinden om, indien twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijn, hieruit rechtstreeks een der onbekende hoeken te bepalen. Te dien einde geeft de rechthoekige driehoek BAD

$$\operatorname{tg} A = \frac{BD}{AD} = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}$$

en evenzoo

$$\operatorname{tg} B = \frac{b \sin C}{a - b \cos C}$$

welke formules echter voor de logarithmische berekening minder geschikt zijn dan de form. (8).

De figuur levert daarenboven de navolgende betrekkingen tusschen drie zijden en twee hoeken op.

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B, \\ b &= a \cos C + c \cos A, \\ c &= a \cos B + b \cos A, \end{aligned}$$

waaruit weder alle overige trigonometrische betrekkingen kunnen afgeleid worden.

43. Ter bepaling van den hoek C uit de drie zijden, heeft men de formule

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (16)$$

welke echter op de navolgende wijze, onder een anderen en voor de berekening met logarithmen, meer geschikten vorm kan gebracht worden.

Men heeft namelijk

$$1 - \cos C = 2 \sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab},$$

$$\text{dus} \quad \sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{c^2 - (a-b)^2}{4ab} = \frac{(c+a-b)(c+b-a)}{4ab}.$$

Men stelle nu de som der drie zijden, of $a + b + c = 2s$,

$$\text{dan is} \quad \frac{c+a-b}{2} = s-b, \quad \frac{c+b-a}{2} = s-a.$$

Hierdoor gaat de laatste formule over in

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$$

of

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \quad (17)$$

Verder heeft men nog

$$1 + \cos C = 2 \cos^2 \frac{1}{2} C = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - c^2}{2ab}.$$

$$\text{dus } \cos^2 \frac{1}{2} C = \frac{(a+b)^2 - c^2}{4ab} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}$$

$$\text{of } \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \quad (18)$$

$$\text{Eindelijk } \operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} C} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \quad (19)$$

$$\text{en } \sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . (20)$$

Het is onnoodig hier te doen opmerken, dat al de tot dus ver gevonden formules, door eene behoorlijke verwisseling van letters, tevens op elke der overige hoeken van toepassing kunnen gemaakt worden. Zoo heeft men insgelijks:

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)};$$

$$\text{en } \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

44. Zie hier nog eene andere en minder bekende wijze om tot de voorgaande formules te geraken.

Volgens de evenredigheid (10), en omdat

$$\sin \frac{1}{2} C = \cos \frac{1}{2} (A+B), \quad \cos \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} (A+B),$$

heeft men, door optelling en aftrekking der termen

$$\begin{aligned} a+b+c : a+b-c &= \cos \frac{1}{2} (A-B) + \cos \frac{1}{2} (A+B) : \cos \frac{1}{2} (A-B) - \cos \frac{1}{2} (A+B) \\ &= \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B : \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \end{aligned}$$

$$\text{dus } a+b+c : a+b-c = \cot \frac{1}{2} A : \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \quad . . . (21)$$

Op gelijke wijze zal men uit (11) kunnen afleiden:

$$a-b+c : c+b-a = \sin \frac{1}{2}(A-B) + \sin \frac{1}{2}(A+B) : \sin \frac{1}{2}(A+B) - \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

dus $a-b+c : c+b-a = \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B : \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}A = \operatorname{tg} \frac{1}{2}A : \operatorname{tg} \frac{1}{2}B$. (22)

Deze laatste evenredigheid met (21) vermenigvuldigende, verkrijgt men terstond

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}A = \frac{(a+b-c)(c+b-a)}{(a+b+c)(a+c-b)}$$

$$\text{of } \operatorname{tg} \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$$

$$\begin{aligned} \text{Voorts is } \sec^2 \frac{1}{2}B &= 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}B = \frac{s(s-b) + (s-a)(s-c)}{s(s-b)} \\ &= \frac{2s^2 - (a+b+c)s + ac}{s(s-b)} = \frac{ac}{s(s-b)}, \end{aligned}$$

$$\text{dus } \cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}},$$

$$\text{waaruit verder } \sin \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

even als hiervoren gevonden is.

45. Wij gaan thans over tot de behandeling der bijzondere gevallen, die zich bij de oplossing der scheefhoekige driehoeken voordoen. Zij zijn vier in aantal. De gegevens kunnen namelijk zijn:

1. De drie zijden.
2. Eene zijde en twee hoeken.
3. Twee zijden en de tusschengelegen hoek.
4. Twee zijden en een der overstaande hoeken.

1e GEVAL.

Gegeven zijnde de drie zijden, te berekenen de drie hoeken.

De gegevens moeten aan de voorwaarden voldoen, dat elke zijde kleiner is dan de som en grooter dan het verschil der beide anderen.

De formules, die de betrekkingen tusschen de gegevens en elk der onbekenden uitdrukken, zijn:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \end{aligned}$$

gevende

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

welke formules voor de berekening van A, B, C slechts kunnen gebruikt worden, wanneer a, b, c kleine getallen zijn. In elk ander geval moeten zij logarithmisch gemaakt worden, hetgeen hierboven (n°. 43) reeds is geschied. Daar hebben wij het volgende stel formules gekregen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ \sin \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \\ \sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \\ \cos \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}, \\ \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, \\ \tan \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, \\ \tan \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \sin B = \frac{2}{ac} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \\ \sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \end{array} \right.$$

Elke van deze vier groepen kan dienen voor de berekening, doch het is niet geheel onverschillig, welke men daartoe neemt.

De laatste groep is in het algemeen het minst te verkiezen, niet zoozeer omdat de formules den langsten vorm bezitten, want de wortels hebben juist het voordeel voor de drie hoeken dezelfde te zijn, maar omdat de sinussen der *geheele* hoeken worden gevonden, waarbij het altijd twijfelachtig is, welk van de beide hoeken, tot denzelfden sinus behorende, genomen moet worden. Uit de gegevens is dit trouwens vooraf wel op te maken, want in de meetkunde wordt geleerd, dat de drie hoeken eens driehoeks scherp zijn, wanneer het vierkant van elke zijde kleiner is dan de som der vierkanten van de beide anderen, en wanneer er een stompe hoek mocht zijn, deze gelegen is tegenover die zijde, waarvan het vierkant grooter is dan de genoemde som.

De drie andere groepen geven de halve hoeken, die altijd scherp zijn, dus in het eerste kwadrant moeten genomen worden. Welke groep men neemt is tamelijk onverschillig, doch het zal aan de aandacht van een geoefend cijferaar niet ontsnappen, dat de derde de voorkeur verdient, omdat in de drie formules slechts vier verschillende getallen voorkomen en in elk der drie anderen zeven. Ook kunnen in het algemeen de tangenten uit de logarithmen nauwkeuriger bepaald worden dan de sinussen en cosinussen. Mocht

echter slechts één hoek verlangd worden, hetgeen in toepassingen dikwijls het geval is, dan kan met voordeel van eene der formules uit de tweede groep gebruik gemaakt worden, omdat daarin de eenvoudigste getallen voorkomen.

46. Om de drie hoeken te berekenen kan men nog een anderen weg inslaan. Men berekent namelijk een der hoeken op de bovengenoemde wijze en hieruit de beide anderen door de formule

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$$

Deze weg is niet aan te raden, omdat men eene der onbekenden gebruikt om de anderen te vinden en dus eene fout, in de eerste berekening gemaakt, overal van invloed is. Ook is hij minder nauwkeurig.

Men zou kunnen volstaan met twee hoeken te berekenen en den derden te bepalen door de eigenschap, dat de som van de drie hoeken $= 180^\circ$, doch deze handelwijze is zeer af te keuren, omdat genoemde eigenschap tot proef op de som voor de juistheid der berekening moet dienen.

Voorbeeld. Zij $a = 4693,25$, $b = 3627,90$, $c = 2076,01$.

Berekening.

$\begin{aligned} a &= 4693,25 \\ b &= 3627,90 \\ c &= 2076,01 \\ \hline 2s &= 10397,16 \\ s &= 5198,58 \\ s-a &= 505,33 \\ s-b &= 1570,68 \\ s-c &= 3122,57 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \log s &= 3,7158847 \\ \log(s-a) &= 2,7035751 \\ \log(s-b) &= 3,1960877 \\ \log(s-c) &= 3,4945121 \end{aligned}$
$\begin{aligned} \log(s-b) &= 3,1960877 \\ \log(s-c) &= 3,4945121 \\ C \log s &= 6,2841153 \\ C \log(s-a) &= 7,2964249 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \log(s-a) &= 2,7035751 \\ \log(s-c) &= 3,4945121 \\ C \log s &= 6,2841153 \\ C \log(s-b) &= 6,8039123 \end{aligned}$
$\begin{aligned} &\hline &0,2711400 \\ &\hline 2 &\hline \log \tan \frac{1}{2} A &= 0,1355700 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\hline &9,2861148 \\ &\hline 2 &\hline \log \tan \frac{1}{2} B &= 9,6430574 \end{aligned}$
$\begin{aligned} \frac{1}{2} A &= 53^\circ 48' 3",49 \\ A &= 107^\circ 36' 6",98 \end{aligned}$	$\begin{aligned} \frac{1}{2} B &= 23^\circ 43' 49" \\ B &= 47^\circ 27' 38" \end{aligned}$

$$\begin{aligned}
 \log (s-a) &= 2,7035751 \\
 \log (s-b) &= 3,1960877 \\
 C \log s &= 6,2841153 \\
 C \log (s-c) &= 6,5054879 \\
 \hline & \text{opg.} \\
 & 8,6892660 \\
 & 2 \hline \\
 \log \tan \frac{1}{2} C &= 9,3446330 \\
 \frac{1}{2} C &= 12^\circ 28' 7'',5 \\
 C &= 24^\circ 56' 15''.
 \end{aligned}$$

Proef op de som.

$$\begin{aligned}
 A &= 107^\circ 56' 6'',98 \\
 B &= 47^\circ 27' 38'' \\
 C &= 24^\circ 56' 15'' \\
 \hline & \text{opg.} \\
 & 179^\circ 59' 59'',98
 \end{aligned}$$

gevende een verschil van $0'',02$, zijnde zoo nauwkeurig als verlangd kan worden.

Men kan het volgende voorbeeld tevens gebruiken, om daarop achtereenvolgens elk der drie overige gevallen van toepassing te maken, hetgeen den leerling tot eene nuttige oefening zal strekken.

Voorbeeld. $a = 5036,958$, $b = 3229,151$ en $c = 6361,947$.

Men zal vinden

$$A = 52^\circ 4' 2'',4, \quad B = 30^\circ 11' 43'',8, \quad C = 97^\circ 44' 13'',8.$$

II^e G E V A L.

Gegeven eene zijde a en twee hoeken, te berekenen den derden hoek en de beide andere zijden.

De gegevens behoeven aan geene andere voorwaarde te voldoen, dan dat de som der gegeven hoeken kleiner zij dan 180° .

De derde hoek kan ook als een gegeven beschouwd worden, omdat hij onmiddellijk wordt gevonden door de som der gegeven hoeken van 180° af te trekken.

Voor de berekening der gevraagde zijden heeft men de formules

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

$$\begin{aligned}
 \text{dus} \quad \log b &= \log a - \log \sin A + \log \sin B \\
 \log c &= \log a - \log \sin A + \log \sin C.
 \end{aligned}$$

Voorbeeld. Zij $a = 100,0579$. $B = 94^{\circ} 15' 19''$. $C = 56^{\circ} 0' 25'',5$,
 dus $A = 180^{\circ} - 150^{\circ} 15' 44'',5 = 29^{\circ} 44' 15'',5$.

Berekening.

$$\begin{array}{rcl}
 \log a & = & 2,0002514 \\
 \log \sin A & = & 9,6955072 \\
 & \text{---} & \text{afg.} \\
 & 2,3047442 & 2,3047442 \\
 \log \sin B & = & 9,9988012 \\
 & \text{---} & \text{opg.} \\
 \log b & = & 2,3035454 \\
 b & = & 201,1617
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{rcl}
 & & 2,3047442 \\
 \log \sin C & = & 9,9186104 \\
 & \text{---} & \text{opg.} \\
 \log c & = & 2,2233546 \\
 c & = & 167,2455.
 \end{array}$$

III^e G E V A L.

Gegeven zijnde twee zijden a en b met den ingesloten hoek C, te vinden de beide overige hoeken A, B, benevens de derde zijde c.

47. Men vindt de beide onbekende hoeken A en B, door de formule (9)

$$\lg(B + \frac{1}{2}C) = \left(\frac{a+b}{a-b}\right) \lg \frac{1}{2}C \dots \dots \dots (\alpha)$$

waardoor B, en dus ook A kan berekend worden. Vervolgens zal men de derde zijde c vinden, door eene der formulen

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} \quad \text{of} \quad c = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

of wel door de navolgende

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\sin(B + \frac{1}{2}C)} \\
 c &= \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(A-B)} = \frac{(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\cos(B + \frac{1}{2}C)},
 \end{aligned}$$

waarin de hoek $B + \frac{1}{2}C$ reeds uit (α) gevonden is.

48. Bijaldien men eeniglijk de derde zijde c, en niet de hoeken A en B behoeft te kennen, zou men daartoe rechtstreeks kunnen geraken, door middel der hiervoren (n^o. 42) gevondene betrekking

$$\begin{aligned}
 c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\
 \text{of} \quad c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.
 \end{aligned}$$

Daar echter deze formule voor eene logarithmische berekening weinig geschikt is, zoo kan zij daartoe door de navolgende herleiding ingericht worden.

Men schrijve namelijk voor $\cos C$ zijne waarde $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$, dan komt er

$$c^2 = (a-b)^2 + 4ab \sin^2 \frac{1}{2} C = (a-b)^2 \left\{ 1 + \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2} \right\}$$

Stellende nu verder

$$tg^2 \varphi = \frac{4ab \sin^2 \frac{1}{2} C}{(a-b)^2}$$

$$\text{of } tg \varphi = \frac{2 \sin \frac{1}{2} C}{a-b} \sqrt{ab},$$

dan vindt men

$$c^2 = (a-b)^2 \{1 + tg^2 \varphi\} \quad \text{of} \quad c = \frac{a-b}{\cos \varphi} \quad . . . \quad (\beta)$$

Men kan ook $\cos C$ door $2 \cos^2 \frac{1}{2} C - 1$ vervangen, waardoor er komt

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cos^2 \frac{1}{2} C$$

en stellen hierin

$$\sin^2 \psi = \frac{4ab \cos^2 \frac{1}{2} C}{(a+b)^2}$$

$$\text{of } \sin \psi = \frac{2 \cos \frac{1}{2} C}{a+b} \sqrt{ab},$$

welk gebroken voor den hoek ψ steeds eene bestaanbare waarde zal opleveren, uithoofde $a+b$ altijd $> 2\sqrt{ab}$ zijnde, des te meer

$$a+b > 2 \cos \frac{1}{2} C \sqrt{ab} \text{ zal zijn.}$$

Hieruit volgt alzoo

$$c^2 = (a+b)^2 (1 - \sin^2 \psi) \quad \text{of} \quad c = (a+b) \cos \psi \quad . . . \quad (\gamma)$$

Voorbeeld. Zij $a = 8970,432$, $b = 7690,548$ en $C = 119^\circ 36' 45''$.

Berekening.

$a = 8970,432$	
$b = 7690,548$	
$a+b = 16660,980$	$\log(a+b) = 4,2217006$
$a-b = 1279,884$	$\log(a-b) = 3,1071706$
$C = 119^\circ 36' 45''$	1,1145300 <i>afg.</i>
$\frac{1}{2} C = 59^\circ 48' 22'',5$	$\log tg \frac{1}{2} C = 0,2351756$
	$\log tg (B + \frac{1}{2} C) = 1,3497056$
	$B + \frac{1}{2} C = 87^\circ 26' 26'',38$
	$\frac{1}{2} C = 59^\circ 48' 22'',5$
	$B = 27^\circ 38' 3'',88$
	$B + C = 147^\circ 14' 48'',88$
	$A = 32^\circ 45' 11'',12$

$\begin{array}{r} \log b = 3,8859574 \\ \log \sin C = 9,9392132 \\ \hline 3,8251706 \text{ opg.} \\ \log \sin B = 9,6663571 \\ \log c = 4,1588135 \text{ afg.} \\ \hline c = 14414,96 \end{array}$	$\begin{array}{r} \log a = 3,9528134 \\ \log \sin C = 9,9392132 \\ \hline 3,8920266 \text{ opg.} \\ \log \sin A = 9,7331132 \\ \log c = 4,1588134 \text{ afg.} \\ \hline c = 14414,96 \end{array}$
$\begin{array}{r} \log (a+b) = 4,2217006 \\ \log \sin \frac{1}{2} C = 9,9366795 \\ \hline 4,1583801 \text{ opg.} \\ \log \sin (B+\frac{1}{2}C) = 9,9995666 \\ \log c = 4,1588135 \text{ afg.} \\ \hline c = 14414,96 \end{array}$	$\begin{array}{r} \log (a-b) = 3,1071706 \\ \log \cos \frac{1}{2} C = 9,7015038 \\ \hline 2,8086744 \text{ opg.} \\ \log \cos (B+\frac{1}{2}C) = 8,6498607 \\ \log c = 4,1588137 \text{ afg.} \\ \hline c = 14414,97 \end{array}$

Deze drie verschillende wijzen van berekenen der zijde c , stemmen in de uitkomsten vrij juist met elkander overeen. Wij zullen die zijde thans ten overvloede nog met behulp der form. (β) gaan berekenen.

$$\begin{array}{r} \log a = 3,9528134 \\ \log b = 3,8859574 \\ \hline 7,8387708 \text{ opg.} \\ \log \sqrt{ab} = 3,9193854 \\ \log 2 = 0,3010300 \\ \log \sin \frac{1}{2} C = 9,9366795 \\ \hline 4,1570949 \text{ opg.} \\ \log (a-b) = 3,1071706 \\ \log \tan \varphi = 1,0499243 \text{ afg.} \\ \varphi = 84^{\circ}54'21'',9 \\ \log \cos \varphi = 8,9483569 \\ \log (a-b) = 3,1071706 \\ \hline \log c = 4,1588137 \\ c = 14414,97 \end{array}$$

hetgeen met de vorige berekeningen overeenstemt. De toepassing der formule (γ) zij den leerling ter oefening overgelaten.

49. *Aanmerking.* Nademaal de hoeken eens driehoeks eeniglijk afhankelijk zijn van de verhoudingen tusschen de drie zijden, zoo kan men het III^e Geval ook aldus voorstellen. *Gegeven zijnde de ver-*

De formule, die de betrekking tusschen de gegevens en de zijde c aanwijst, is

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

of $c^2 - 2bc \cos A - (a^2 - b^2) = 0,$

gevende

$$c = b \cos A \pm \sqrt{(b^2 \cos^2 A + (a^2 - b^2))}$$

$$= b \cos A \pm \sqrt{(a^2 - b^2 \sin^2 A)} \quad \dots \quad (\beta)$$

Om haar voor de berekening met logarithmen geschikt te maken, schrijft men

$$c = b \cos A \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2 \cos A}} \right\} \quad \dots \quad (\gamma)$$

Is nu $a > b$, dan stelle men

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2 \cos^2 A} = \tan^2 \alpha$$

dus $\tan \alpha = \frac{\sqrt{(a+b)(a-b)}}{b \cos A},$

zoo wordt

$$c = b \cos A \{ 1 \pm \sec \alpha \}$$

of volgens de formules (39) en (40) § III

$$c = \begin{cases} b \cos A \tan \alpha \cot \frac{1}{2} \alpha \\ -b \cos A \tan \alpha \tan \frac{1}{2} \alpha. \end{cases}$$

In deze formule zal altijd slechts ééne waarde positief zijn, namelijk de bovenste wanneer A scherp is, en de benedenste wanneer A stomp is, hetgeen weder geheel met de meetkundige beschouwing overeenkomt.

Is $a < b$, dus A scherp, dan stelle men

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2 \cos^2 A} = \sin^2 \alpha' \quad \text{of} \quad \sin \alpha' = \frac{\sqrt{(b+a)(b-a)}}{b \cos A}$$

hetgeen kan geschieden, omdat volgens vergelijking (α)

$$b^2 \sin^2 A < a^2,$$

of $b^2 - b^2 \cos^2 A < a^2,$

$$b^2 - a^2 < b^2 \cos^2 A,$$

dus $\frac{b^2 - a^2}{b^2 \cos^2 A} < 1.$

Formule (γ) gaat nu over in

$$c = b \cos A (1 \pm \cos \alpha')$$

$$= \begin{cases} 2b \cos A \cos^2 \frac{1}{2} \alpha' \\ 2b \cos A \sin^2 \frac{1}{2} \alpha', \end{cases}$$

zoodat in dit geval c altijd twee positieve waarden verkrijgt.

De formule (β) kan ook onmiddellijk uit de figuur worden afgeleid. Men heeft toch (fig. 11)

$$\begin{aligned} AD &= b \cos A, & CD &= b \sin A \\ BD = B'D &= \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}, \end{aligned}$$

derhalve:

$$c = \frac{AB}{AB'} = AD \pm BD = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

Het is echter verkieselijk in dit geval van den gewonen weg af te wijken en van de formule (β) in het geheel geen gebruik te maken. Liever gaat men aldus te werk.

Uit de formule (α) berekent men eerst de waarde van B, beschouwt deze als bekend en gebruikt dan de formules

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B), \\ c &= a \frac{\sin C}{\sin A} = a \frac{\sin (A + B)}{\sin A}; \end{aligned}$$

heeft men voor B twee bestaanbare waarden gevonden, dan substitueert men beide en vindt de overeenkomstige waarden van C en c, derhalve de twee driehoeken, die voldoen aan de gegevens.

Voorbeeld. Zij $a = 87,935$, $b = 539,076$, $A = 8^\circ 2'49''$.

Berekening.

$\log \sin A = 9,1460797$	
$\log a = 1,9441618$	
$\log \frac{\sin A}{a} = 7,2019179$	
$\log b = 2,7316501$	
$\log \sin B = 9,9335680$	$B = 59^\circ 6'38''$
$B = 59^\circ 6'38''$	$B' = 180^\circ - B = 120^\circ 53'22''$
$A = 8^\circ 2'49''$	$A = 8^\circ 2'49''$
$A + B = 67^\circ 9'27''$	$A + B' = 128^\circ 56'41''$
$C = 112^\circ 50'33''$	$C' = 51^\circ 3'49''$
$\log \sin C = 9,9645309$	$\log \sin C' = 9,8908926$
$\log \frac{\sin A}{a} = 7,2019179$	$\log \frac{\sin A}{a} = 7,2019179$
$\log c = 2,7626130$	$\log c' = 2,6889747$
$c = 578,9125$	$c' = 488,624$

zoodat twee driehoeken aan de gegevens voldoen, tot elementen hebbende:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 87,935 \\ b = 539,076 \\ c = 578,9125 \\ A = 8^{\circ} 2'49'' \\ B = 59^{\circ} 6'38'' \\ C = 112^{\circ}50'33''. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 87,935 \\ b = 539,076 \\ c' = 488,624 \\ A = 8^{\circ} 2'49'' \\ B' = 120^{\circ}53'22'' \\ C' = 51^{\circ} 3'49''. \end{array} \right.$$

§ IX.

Bepaling van inhouden.

49°. In de eerste plaats zullen wij de formules doen kennen, door welke de inhoud eens driehoeks kan berekend worden uit elke drie bepalende elementen. Daartoe gaan wij uit van de bekende meetkundige eigenschap, dat de inhoud eens driehoeks gemeten wordt door het halve produkt van basis en hoogte. dat is (fig. 8), den inhoud van den driehoek $ABC = I$ stellende,

$$I = \frac{1}{2} AC \times BD.$$

Nu is

$$BD = AB \sin A = c \sin A$$

derhalve

$$I = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

evenzoo vindt men

$$I = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zoodat de inhoud eens driehoeks gelijk is aan het halve produkt van twee zijden en den sinus van den ingesloten hoek.

Schrijft men volgens formule (20) der voorgaande §

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

dan gaat (1) over in

$$I = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waardoor wij de bekende fraaie uitdrukking voor den inhoud in de drie zijden terug vinden.

Om den inhoud in eene zijde en twee hoeken uit te drukken, neemt men de evenredigheid

$$b : c = \sin B : \sin (A + B),$$

gevende

$$b = c \frac{\sin B}{\sin (A+B)}$$

en deze waarde in (1) overgebracht, volgt

$$I = \frac{1}{4} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)};$$

evenzoo

$$I = \frac{1}{4} c^2 \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{1}{4} b^2 \frac{\sin A \sin C}{\sin(A+C)} = \frac{1}{4} a^2 \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}. \quad (3)$$

Om in het twijfelachtige geval den inhoud in de gegevens uit te drukken, neme men formule (β) van het vierde geval, zijnde

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

en substitueert deze in (1), dan komt

$$I = \frac{1}{4} b \sin A \{ b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} \} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

welke formule de dubbele waarde voor den inhoud oplevert, en op de in het IV^e Geval behandelde manier voor de berekening geschikt kan gemaakt worden.

Eenvoudiger is het ook hier, eerst de hoeken B en C door de sinus-formule te berekenen en daarna den inhoud volgens formule (3).

Stellen wij in de voorgaande formules $C = 90^\circ$, dan verkrijgen wij voor den rechthoekigen driehoek

$$I = \frac{1}{4} ab = \frac{1}{4} a^2 \tan A = \frac{1}{4} c^2 \sin 2A. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

50. Zij (fig. 12) ABCD een parallelogram, AC en BD de diagonalen, dan is

$$I \triangle ABC = \frac{1}{4} AB \cdot BC \sin B,$$

derhalve

$$I \triangle \text{parall. AC} = AB \cdot BC \sin B \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dat is: *de inhoud van een parallelogram is gelijk aan het produkt van de ongelijke zijden en den sinus van den tusschengelegen hoek.*

Stelt men $AB = CD = a$, $AD = BC = b$, dan wordt

$$\begin{aligned} BD^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos A, \\ AC^2 &= a^2 + b^2 + 2ab \cos A, \end{aligned}$$

door welke formules de diagonalen uit de zijden en een der hoeken kunnen berekend worden. Door optelling geven zij

$$AC^2 + BD^2 = 2(a^2 + b^2)$$

waardoor wij terugkomen op de bekende meetkundige eigenschap, dat de som van de vierkanten der diagonalen gelijk is aan de som van de vierkanten der zijden. (*Meetkunde*, I § 13.)

Volgens eene bekende meetkundige eigenschap (*Meetkunde*, I § 24.)

is de inhoud van elken vierhoek gelijk aan de helft van den inhoud van het parallelogram beschreven op de diagonalen, derhalve *is de inhoud van elken vierhoek gelijk aan het halve produkt der diagonalen en den sinus van den hoek, dien zij met elkander maken.*

51. Zij AB (fig. 13) de zijde van een regelmatig n hoek, M het middelpunt van den omgeschreven cirkel, dan is $\angle AMB = \frac{360^\circ}{n}$.

Stellen wij de zijde $AB = a$, den straal $AM = r$, dan is in driehoek AMB:

$$a = r \text{ koorde } \frac{360^\circ}{n} = 2r \sin \frac{180^\circ}{n},$$

waardoor elke der drie grootheden a , r , n , uit de beide anderen kan berekend worden.

Verder is

$$I. \triangle AMB = \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{4} a^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$$

derhalve

$$I. \text{ regelm. } n\text{-hoek} = \frac{1}{2} n r^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{4} n a^2 \cot \frac{180^\circ}{n}, \quad . \quad . \quad (7)$$

door welke formule de inhoud van elken regelm. veelhoek uit den straal of uit de zijde kan gevonden worden.

Ook de inhoud van een cirkelsegment kan in eene formule worden uitgedrukt.

Men heeft toch (fig. 13),

$$I \text{ segm. } ABC = I. \text{ sector } AMB - I. \triangle AMB$$

of

$$I \text{ segm.} = \frac{1}{2} r^2 \varphi - \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi = \frac{1}{2} r^2 (\varphi - \sin \varphi) \quad . \quad . \quad (8)$$

waarin φ de lengte van den cirkelboog met den straal $= 1$, behoorende bij hoek M, voorstelt. Mocht de hoek in graden zijn gegeven, dan is

$$\varphi = \frac{M}{180^\circ} \pi.$$

Indien de pijl p van het segment gegeven is, zal men daaruit den hoek kunnen berekenen door de formule

$$\varphi = 2B. \cos \left(\frac{r-p}{r} \right).$$

Omgekeerd uit verg. (8) voor gegeven I de waarde van φ te bepalen, behoort tot de hoogere deelen der wiskunde, omdat zoowel een hoek als een goniometrische vorm in de vergelijking voorkomt.

Aan den leerling zij overgelaten de oplossing van het vraagstuk, om den inhoud te bepalen van het gedeelte dat twee cirkels gemeen hebben, wanneer de stralen en de afstand der middelpunten bekend zijn.

§ X.

Oplossing van vraagstukken betreffende eenige bijzondere gevallen van driehoeksmeting.

52. I^e VRAAGSTUK. *Van een driehoek gegeven zijnde eene zijde benevens de som of het verschil der beide overige zijden, en de overstaande hoek, de onbekende zijden en hoeken te vinden.*

II^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde eene zijde benevens de som of het verschil der beide overige zijden, en het verschil der aanliggende hoeken, den driehoek op te lossen.*

De oplossing dezer beide vraagstukken is vervat in de reeds hier-voren (n^o. 40) gevondene evenredigheden

$$a + b : c = \cos \frac{1}{2} (A - B) : \sin \frac{1}{2} C$$

$$a - b : c = \sin \frac{1}{2} (A - B) : \cos \frac{1}{2} C$$

welke voor het 1^{ste} vraagstuk geven

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) = \frac{(a + b)}{c} \sin \frac{1}{2} C$$

$$\sin \frac{1}{2} (A - B) = \frac{(a - b)}{c} \cos \frac{1}{2} C,$$

$$\text{derhalve } A = 90^\circ - \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} (A - B)$$

$$\text{en } B = 90^\circ - \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} (A - B)$$

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C};$$

terwijl men voor het 2^{de} vraagstuk heeft

$$\sin \frac{1}{2} C = \frac{\frac{1}{2} C}{a + b} \cos \frac{1}{2} (A - B)$$

$$\cos \frac{1}{2} C = \frac{c}{a - b} \sin \frac{1}{2} (A - B);$$

waardoor de onbekende hoeken en zijden, even als voren, kunnen berekend worden.

53. III^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee zijden benevens het verschil der overstaande hoeken, den driehoek op te lossen.*

IV^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee hoeken met de som of het verschil der overstaande zijden, den driehoek op te lossen.*

De oplossing dezer beide vraagstukken is begrepen in de formule

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C$$

waaruit voor het eerste volgt

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \left(\frac{a - b}{a + b} \right) \cot \frac{1}{2} (A - B),$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{b \sin C}{\sin B},$$

en voor het tweede

$$a - b = (a + b) \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B),$$

$$a + b = \frac{(a - b) \cot \frac{1}{2} C}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)} = (a - b) \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)},$$

$$a = \frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{2} (a - b).$$

$$b = \frac{1}{2} (a + b) - \frac{1}{2} (a - b).$$

54. V^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde een der hoeken A en B met eene aanliggende zijde c, benevens de som of het verschil der beide overige zijden, den driehoek op te lossen.*

Hiertoe geven de evenredigheden (21) en (22) § VIII terstond

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \left(\frac{a + b - c}{a + b + c} \right) \cot \frac{1}{2} A,$$

$$\text{en} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \frac{c - (a - b)}{c + (a - b)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} A,$$

waardoor dus ook de hoek C bepaald wordt, en vervolgens elke der onbekende zijden a en b , door de formules

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

55. VI^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde de drie hoeken met eene der zijden, de stukken te berekenen, waarin deze zijde door de loodlijn, uit het overstaande hoekpunt vallende, verdeeld wordt.*

Oplossing. Zij b de gegeven zijde. Door het vermenigvuldigen der evenredigheden

$$c + a : b = \cos \frac{1}{2} (C - A) : \sin \frac{1}{2} B$$

$$c - a : b = \sin \frac{1}{2} (C - A) : \cos \frac{1}{2} B,$$

verkrijgt men $c^2 - a^2 : b^2 = \sin (C - A) : \sin B.$

Stellende het verschil der te bepalen stukken AD, DC (fig. 8) = x , dan is, volgens eene bekende eigenschap des driehoeks:

$$bx = c^2 - a^2$$

$$\text{dus } x = \frac{c^2 - a^2}{b} = \frac{b \sin(C - A)}{\sin B}$$

$$\begin{aligned} AD &= \frac{1}{2}(b + x) = \frac{1}{2}b \left\{ \frac{\sin B + \sin(C - A)}{\sin B} \right\} \\ &= \frac{b}{\sin B} \sin\left(\frac{B + C - A}{2}\right) \cos\left(\frac{A + B - C}{2}\right) = b \frac{\sin C \cos A}{\sin B}. \end{aligned}$$

Evenzoo

$$DC = \frac{1}{2}(b - x) = b \frac{\sin A \cos C}{\sin B};$$

welke uitkomsten ook meer rechtstreeks uit de rechthoekige driehoeken ABD, BDC af te leiden zijn. De eerste geeft namelijk

$$AD = c \cos A = b \frac{\sin C}{\sin B} \cos A,$$

en de tweede

$$CD = a \cos C = b \frac{\sin A}{\sin B} \cos C.$$

56. VII^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee zijden met den ingesloten hoek, de stukken te berekenen, waarin die hoek door de loodlijn op de derde zijde neêr gelaten, verdeeld wordt.*

Oplossing. Men stelde (fig. 8) $ABD = p$, $DBC = q$, dan is

$$\begin{aligned} ABD + BAD &= DBC + BCD, \\ \text{dus } A - C &= DBC - ABD = q - p. \end{aligned}$$

Nu is, naar aanleiding van form. (8) § VIII

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(C - A) = \left(\frac{c - a}{c + a} \right) \cot \frac{1}{2} B,$$

$$\text{dus ook } \operatorname{tg} \frac{1}{2}(p - q) = \left(\frac{c - a}{c + a} \right) \cot \frac{1}{2} B,$$

waardoor, omdat $p + q$ gegeven is, p en q elk afzonderlijk kunnen bepaald worden. Indien tevens gevraagd wordt, de lengte der loodlijn BD te berekenen, zoo kan men daartoe op de volgende wijze eene formule vinden.

Zij $BD = x$ en $\frac{1}{2}(p - q) = \delta$, dus $p = \frac{1}{2}B + \delta$, $q = \frac{1}{2}B - \delta$.

Nu is

$$\begin{aligned} \text{Inh. ABD} &= \frac{1}{2} cx \sin\left(\frac{1}{2}B + \delta\right) \\ \text{Inh. BDC} &= \frac{1}{2} ax \sin\left(\frac{1}{2}B - \delta\right) \\ \text{en Inh. ABC} &= \frac{1}{2} ac \sin B. \end{aligned}$$

Derhalve

$$cx \sin\left(\frac{1}{2}B + \delta\right) + ax \sin\left(\frac{1}{2}B - \delta\right) = ac \sin B,$$

dat is, na ontwikkeling,

$$x \left\{ (c+a) \sin \frac{1}{2} B \cos \delta + (c-a) \cos \frac{1}{2} B \sin \delta \right\} = ac \sin B$$

$$\text{of} \quad x \cos \delta \left\{ 1 + \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \delta \right\} = \frac{2ac}{c+a} \cos \frac{1}{2} B.$$

Hierin voor $\left(\frac{c-a}{c+a} \right) \cot \frac{1}{2} B$ de hiervoren gevondene waarde, namelijk $\operatorname{tg} \delta$, substitueerende, zoo komt er

$$x \cos \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \delta) = \frac{2ac}{c+a} \cos \frac{1}{2} B$$

$$\text{of} \quad x = \frac{2ac}{a+c} \cos \frac{1}{2} B \cos \delta.$$

Door de hoeken p en q als bekend aan te nemen, vindt men de gevraagde loodlijn onmiddellijk door eene der beide formules

$$x = a \cos q, \quad x = c \cos p.$$

57. VIII^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde eene zijde met de beide aanliggende hoeken, de stukken te berekenen, waarin die zijde verdeeld wordt door eene lijn, welke den overstaanden hoek midden door deelt.*

Oplossing. Laat de lijn CD (fig. 14) den hoek C midden door deelen. Nu is, volgens eene eigenschap dezer lijn,

$$AC : BC = AD : BD$$

$$\text{of} \quad a + b : a - b = c : BD - AD;$$

$$\text{maar} \quad a + b : a - b = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) : \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B).$$

$$\text{Derhalve} \quad BD - AD = c \times \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)},$$

$$\text{en} \quad BD = \frac{c}{2} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)} \right\},$$

$$AD = \frac{c}{2} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B)} \right\}.$$

De lijn CD kan vervolgens berekend worden hetzij uit den driehoek ACD, hetzij uit den driehoek BCD, door eene der twee evenredigheden

$$BD : CD = \sin \frac{1}{2} C : \sin B$$

$$AD : CD = \sin \frac{1}{2} C : \sin A,$$

$$\text{dus} \quad CD = BD \times \frac{\sin B}{\sin \frac{1}{2} C} = AD \times \frac{\sin A}{\sin \frac{1}{2} C}.$$

Wanneer echter de lengte der stukken BD, AD niet behoefte bepaald te worden, zal het gemakkelijker zijn de lijn CD aldus te berekenen.

Stellende de lengte dezer lijn $= x$, dan heeft men

$$\text{Inh. ACD} = \frac{1}{2} bx \sin \frac{1}{2} C$$

$$\text{Inh. BCD} = \frac{1}{2} ax \sin \frac{1}{2} C.$$

Maar

$$\text{Inh. ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \frac{1}{2} C.$$

Derhalve $(a + b) x \sin \frac{1}{2} C = ab \sin C = 2 ab \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$,
waaruit volgt

$$x = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{1}{2} C.$$

Verder is $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ en $b = \frac{c \sin B}{\sin C}$,

en deze waarden in de formule voor x substitueerende, komt er

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 c \sin A \sin B \cos \frac{1}{2} C}{(\sin A + \sin B) \sin C} = \frac{c \sin A \sin B}{\sin \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} (A-B)} \times \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin C} \\ &= \frac{c \sin A \sin B}{\cos \frac{1}{2} (A-B) \sin C}; \end{aligned}$$

welke uitdrukking men ook had kunnen verkrijgen, door in de bovenstaande vergelijking

$$(a + b) x \sin \frac{1}{2} C = ab \sin C,$$

voor $(a + b) \sin \frac{1}{2} C$ te schrijven $c \cos \frac{1}{2} (A - B)$.

58. IX^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde twee zijden met den ingesloten hoek, de stukken te bepalen waarin die hoek verdeeld wordt door eene lijn, welke de overstaande zijde middendoor deelt.*

Oplossing. Men onderstelle in fig. 14 dat $AD = DB$, voorts $ACD = p$, $BCD = q$ zij, dan geven de driehoeken ACD , BCD

$$CD : AD = \sin A : \sin ACD = \sin A : \sin p$$

$$CD : BD = \sin B : \sin BCD = \sin B : \sin q$$

dus $\sin p : \sin q = \sin A : \sin B = a : b$

en
$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{a + b}{a - b},$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p + q)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - q)} = \frac{a + b}{a - b},$$

waaruit volgt $\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p - q) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \dots \dots \dots (\alpha)$

$$p = \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} (p - q) \qquad q = \frac{1}{2} C - \frac{1}{2} (p - q).$$

Men kan echter de hoeken p en q ook onmiddellijk uit de hoeken des driehoeks bepalen. Immers, aangezien

$$\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B) \operatorname{tg} \frac{1}{2} C,$$

zoo heeft men

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p-q) = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} C \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A-B).$$

Wil men hierbij tevens de lengte der deellijn CD berekenen, zoo zoude men, na vooraf de derde zijde c , benevens de overige hoeken A en B bepaald te hebben, zich hiertoe van eene der bovenstaande evenredigheden

$$\sin q : \sin B = \frac{1}{2} c : CD,$$

$$\sin p : \sin A = \frac{1}{2} c : CD,$$

kunnen bedienen.

Er bestaat echter nog eene andere oplossing ter bepaling van de lengte der deellijn CD. Men stelde namelijk deze lengte $= x$, en kortheidshalve $\frac{1}{2} (p-q) = \delta$, dus

$$p = \frac{1}{2} C + \delta \quad \text{en} \quad q = \frac{1}{2} C - \delta.$$

De driehoeken ACD, BCD geven volgens form. (15)

$$AD^2 = x^2 + b^2 - 2bx \cos p$$

$$BD^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos q,$$

waaruit door aftrekking volgt,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 2x(a \cos q - b \cos p) = 2x \left\{ a \cos \left(\frac{1}{2} C - \delta \right) - b \cos \left(\frac{1}{2} C + \delta \right) \right\} \\ &= 2x \left\{ (a - b) \cos \frac{1}{2} C \cos \delta + (a + b) \sin \frac{1}{2} C \sin \delta \right\} \end{aligned}$$

$$\text{of} \quad \frac{a+b}{2} = x \cos \frac{1}{2} C \cos \delta \cdot \left\{ 1 + \frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \operatorname{tg} \delta \right\}.$$

Maar volgens (α) is

$$\frac{a+b}{a-b} \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \frac{1}{2} C,$$

en hierdoor herleidt zich de vorige vergelijking tot de meer eenvoudige

$$\frac{a+b}{2} = x \cos \frac{1}{2} C \cos \delta \left\{ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} C \right\} = \frac{x \cos \delta}{\cos \frac{1}{2} C}.$$

Dus

$$x = \frac{1}{2} (a+b) \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (p-q)},$$

in welke formule het halve verschil der hoeken p en q reeds uit (α) bekend is.

Zie hier nog eene andere wijze om tot dezelfde uitkomst te geraken. Men heeft namelijk

$$\text{Inh. drieh. BCD} = \frac{1}{2} ax \sin q$$

$$\text{Inh. drieh. ACD} = \frac{1}{2} bx \sin p$$

$$\text{Inh. drieh. ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Derhalve

$$x(a \sin q + b \sin p) = ab \sin C.$$

Maar uit de hiervoren gevondene evenredigheid

$$a : c = \sin p : \sin q$$

volgt

$$a \sin q = b \sin p$$

en $(a + b) \sin q = b (\sin p + \sin q).$

Derhalve

$$x = \frac{ab \sin C}{a \sin q + b \sin p} = \frac{b \sin C}{2 \sin q} = \frac{(a + b) \sin C}{2(\sin p + \sin q)} = \frac{\frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(p - q)}$$

even als hiervoren.

§ XI.

Toepassing der driehoeksmeting op eenige vraagstukken tot de werkdadige meetkunde behoorende.

59. De middelen, waarvan men zich, in de werkdadige meetkunde, bij het opmeten van eenig terrein bedient, tot het bepalen van hoogten, afstanden en richtingen der verschillende voorwerpen, bestaan hoofdzakelijk in meetstaven en kettingen voor het meten van afstanden, en in werktuigen bestemd tot het meten van hoeken, zoo als de sextant, het astrolabium, de graphometer, de theodoliet, de repetitie-cirkel van BORDA, en andere van gelijken aard. Het behoort niet tot het doel van dit werkje, aangaande het gebruik dezer toestellen in eenige bijzonderheden te treden. Bij gebrek van mondeling onderricht hieromtrent, zal men de werken, die opzettelijk daarover handelen, dienen te raadplegen. Wij moeten ons dan hier bepalen bij het voordragen van enkele belangrijke vraagstukken betrekkelijk de werkdadige meetkunde, waarin de hiervoren gevondene formules der driehoeksmeting eene nuttige toepassing zullen vinden.

A. Het bepalen van hoogten.

60. Om de hoogte van een verheven voorwerp AB (fig. 15) (een toren, zuil, enz.) dat tot aan den voet genaakbaar is, te bepalen, is de volgende handelwijze de eenvoudigste.

Op zekeren afstand b. v. in C plaatst men een baken CC', wiens hoogte h bekend is, meet den afstand CB en den hoek AC'B', die de lijn naar den top des torens met de horizontale lijn C'B' maakt.

Zij $CB = C'B' = a$, $\angle AC'B' = \alpha$, $AB = x$,

dan is in den rechthoekigen driehoek $AC'B'$

$$AB' = a \tan \alpha$$

of, omdat $AB = AB' + BB' = AB' + CC'$

$$x = a \tan \alpha + h \dots \dots \dots (1)$$

door welke formule de gevraagde hoogte kan berekend worden.

Is de voet van het voorwerp ongenaakbaar, maar kan toch de meting in de richting van den voet geschieden, dan plaatst men twee bakens van gelijke hoogte CC' en DD' , zoodanig dat zij met den voet in eene rechte lijn liggen, meet den afstand CD der bakens en de hoeken $AC'B'$ en $AD'B'$. Stellende

$$CC' = DD' = BB' = h, \quad CD = a, \quad AB = x$$

$$\angle AC'B' = \alpha, \quad \angle AD'B' = \beta$$

is in $\triangle AC'D'$

$$AC' : AD' : C'D' = \sin \beta : \sin \alpha : \sin (\beta - \alpha),$$

waaruit volgt

$$AC' = a \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}, \quad AD' = a \frac{\sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

De gevraagde hoogte wordt nu gevonden door de formule

$$x = AC' \sin \alpha + h = AD' \sin \beta + h = a \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)} + h \dots (2)$$

terwijl tevens de afstanden der bakens tot den voet des torens worden berekend door de formules

$$C'B' = AC' \cos \alpha = a \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin (\beta - \alpha)},$$

$$D'B' = AD' \cos \beta = a \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)}.$$

Formule (2) kan ook op de volgende wijze afgeleid worden.

In $\triangle AC'B'$ is

$$B'C' = AB' \cot \alpha$$

en in $\triangle AD'B'$

$$B'D' = AB' \cot \beta,$$

derhalve

$$a = B'C' - B'D' = AB' (\cot \alpha - \cot \beta),$$

gevende

$$AB' = \frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta} = a \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

derhalve

$$x = a \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} + h \dots \dots \dots (2)$$

Voor $p = 90^\circ$ gaat (2) over in

$$x = a \tan \alpha + h,$$

zijnde weder formule (1) en werkelijk valt in deze onderstelling de tweede baken DD' samen met den voet van het te meten voorwerp.

Voorbeeld.

$$\text{Zij } a = 89^m, 7, \quad h = 1^m, 5,$$

$$\alpha = 34^\circ 8' 30'', \quad \beta = 56^\circ 17' 10'';$$

men zal vinden

$$AB = 112^m, 595.$$

61. Is de voet van het voorwerp ongenaakbaar en kan de meting niet in de richting van den voet plaats grijpen, dan kan men den volgende weg inslaan.

Men plaatst in eene willekeurige richting twee bakens C en D (fig. 16), waarvan de afstand gemeten wordt. (De hoogte der bakens zullen wij hier en in het vervolg buiten rekening laten, daar zij, zooals wij gezien hebben, slechts bij de berekende hoogte behoeft opgeteld te worden, om de werkelijke hoogte van het voorwerp te verkrijgen). Uit elk der bakens meet men vervolgens den hoek, waaronder de toren wordt gezien en den hoek tusschen den top des torens en den anderen baken, dan heeft men een voldoende aantal gegevens om de gevraagde hoogte te berekenen.

Zij namelijk

$$CD = a, \quad AB = x, \quad \angle ACB = \alpha, \quad \angle ACD = \beta, \quad \angle ADB = \alpha', \\ \angle ADC = \beta',$$

dan is in $\triangle ACD$

$$AC : AD : a = \sin \beta' : \sin \beta : \sin(\beta + \beta'),$$

derhalve

$$AC = a \frac{\sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')}, \quad AD = a \frac{\sin \beta}{\sin(\beta + \beta')}.$$

Verder volgt uit de rechthoekige driehoeken ACB en ADB

$$AB = AC \sin \alpha = AD \sin \alpha'$$

of

$$x = a \frac{\sin \alpha \sin \beta'}{\sin(\beta + \beta')} = a \frac{\sin \alpha' \sin \beta}{\sin(\beta + \beta')} \dots \dots \dots (3)$$

Uit deze uitkomst blijkt, dat de gemeten hoeken onderling niet

onafhankelijk zijn, maar tusschen hen de betrekking bestaat

$$\sin \alpha \sin \beta' = \sin \alpha' \sin \beta,$$

welke uit de figuur ook gemakkelijk kan afgeleid worden. Daardoor zou men van de vier hoeken slechts drie behoeven te meten en den vierden kunnen berekenen, doch het is beter al de hoeken te meten en de betrekking als verificatie voor de juistheid der meting te gebruiken.

De afstanden van de bakens tot het voorwerp worden gegeven door de formules

$$CB = AC \cos \alpha = a \frac{\cos \alpha \sin \beta'}{\sin (\beta + \beta')},$$

$$DB = AD \cos \alpha' = a \frac{\cos \alpha' \sin \beta}{\sin (\beta + \beta')}.$$

62. Onder dezelfde omstandigheden kan de bepaling van de hoogte ook op de volgende wijze geschieden.

Men plaatst in eene willekeurige horizontale rechte lijn drie bakens C, D, E (fig. 17), waarvan de onderlinge afstanden worden gemeten; vervolgens meet men de hoeken, waaronder het voorwerp AB uit de bakens wordt gezien. Zij

$$CD = a, \quad DE = b, \quad \angle ACB = \alpha, \quad \angle ADB = \beta, \quad \angle AEB = \gamma,$$

en laat men uit B eene loodlijn BF op CE neêr, dan is in de driehoeken CBD en DBE:

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 + 2CD \cdot DF,$$

$$BE^2 = DE^2 + BD^2 - 2DE \cdot DF,$$

of omdat

$$CB = x \cot \alpha, \quad DB = x \cot \beta, \quad EB = x \cot \gamma,$$

$$x^2 \cot^2 \alpha = a^2 + x^2 \cot^2 \beta + 2a \cdot DF$$

$$x^2 \cot^2 \gamma = b^2 + x^2 \cot^2 \beta - 2b \cdot DF$$

en hieruit DF eliminerende, komt er

$$x^2(b \cot^2 \alpha + a \cot^2 \gamma) = (a+b) x^2 \cot^2 \beta + ab(a+b)$$

gevende

$$x = \sqrt{\frac{ab(a+b)}{b \cot^2 \alpha - (a+b) \cot^2 \beta + a \cot^2 \gamma}} \quad \dots \quad (4)$$

Opdat deze uitdrukking bestaanbaar zij, moet de noemer positief zijn en dit kan altijd verkregen worden door β grooter te nemen dan α en γ . Daartoe moet deze hoek het dichtst bij, dus α en γ ter

wederzijde van de loodlijn BF gelegen zijn. Op de volgende wijze kan formule (4) voor de berekening met logarithmen geschikt gemaakt worden.

Schrijft men haar in den vorm

$$\begin{aligned}
 x^2 &= \frac{ab(a+b)}{a(\cot^2 \gamma - \cot^2 \beta) + b(\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta)} \\
 &= \frac{ab(a+b)}{a(\cot \gamma + \cot \beta)(\cot \gamma - \cot \beta) + b(\cot \alpha + \cot \beta)(\cot \alpha - \cot \beta)} \\
 &= \frac{ab(a+b) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{a \sin^2 \alpha \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma) + b \sin^2 \gamma \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} \\
 &= \frac{a(a+b) \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{a \sin^2 \alpha \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}{b \sin^2 \gamma \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}}
 \end{aligned}$$

Stellende nu

$$\frac{a \sin^2 \alpha \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}{b \sin^2 \gamma \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)} = \tan^2 \varphi$$

of

$$\tan \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \sqrt{\frac{a \sin(\beta + \gamma) \sin(\beta - \gamma)}{b \sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}},$$

dan wordt

$$x^2 = a(a+b) \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cos^2 \varphi}{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}$$

derhalve

$$x = \sin \alpha \sin \beta \cos \varphi \sqrt{\frac{a(a+b)}{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}}$$

waardoor ons doel is bereikt.

Stelt men de bakens C en E ter wederzijde op gelijken afstand van de loodlijn BF, dan wordt $\alpha = \gamma$ en hierdoor gaat (4) over in de veel eenvoudiger uitdrukking

$$\begin{aligned}
 x &= \sqrt{\frac{ab}{\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta}} \\
 &= \sin \alpha \sin \beta \sqrt{\frac{ab}{\sin(\beta + \alpha) \sin(\beta - \alpha)}}
 \end{aligned}$$

B. Het bepalen van afstanden.

63. Om afstanden, die niet rechtstreeks kunnen gemeten worden, te bepalen, moet men meestal gebruik maken van hoeken, waaronder

twee plaatsen uit een zeker oogpunt worden gezien, dat zijn de hoeken, gevormd door de lijnen uit het oogpunt naar die plaatsen getrokken. Bij de berekening worden die hoeken ondersteld te zijn gelegen in het horizontale vlak, zoodat zij tot dit vlak moeten herleid worden, wanneer de meting daarin niet heeft plaats gehad. Deze *herleiding van een hoek tot den horizon*, welke in de geodesie herhaaldelijk moet toegepast worden, kan op de volgende wijze volbracht worden.

Zij ACB (fig. 18) de hoek, die uit het oogpunt C in de ruimte is gemeten en herleid moet worden, A'C de projectie van AC en B'C de projectie van BC op het horizontale vlak, dan moet $\angle A'CB'$ worden bepaald. Daartoe meet men de hoeken ACC' en BCC' , die de lijnen AC en BC met de verticaal van C maken, waarvoor ook de hoeken tusschen deze lijnen en hare projectiën kunnen gemeten worden, zijnde de complementen van de eerstgenoemden.

Stellende nu

$$\angle ACB = \alpha, \angle ACC' = \beta, \angle BCC' = \beta' \text{ en } \angle A'CB' = \varphi,$$

dan neme men op de lijnen AC, CB twee stukken Ca , Cb , elk gelijk aan de eenheid van lengtemaat en trekke de loodlijn aa' , bb' op het horizontale vlak, zoo is

$$\begin{aligned} aa' &= \cos \beta & Ca' &= \sin \beta \\ bb' &= \cos \beta' & Cb' &= \sin \beta' \end{aligned}$$

en in $\triangle a'Cb'$

$$a'b'^2 = \sin^2 \beta + \sin^2 \beta' - 2 \sin \beta \sin \beta' \cos \varphi.$$

Trekkende verder ad evenwijdig aan $a'd'$,

dan is

$$bd^2 = (\cos \beta - \cos \beta')^2 = \cos^2 \beta + \cos^2 \beta' - 2 \cos \beta \cos \beta',$$

derhalve

$$ab^2 = a'b'^2 + bd^2 = 2 - 2 \cos \beta \cos \beta' - 2 \sin \beta \sin \beta' \cos \varphi.$$

Maar in den driehoek C ab is tevens $ab^2 = 2 - 2 \cos \alpha$, waaruit door gelijkstelling dezer beide waarden voor ab^2 onmiddellijk volgt

$$\cos \alpha = \sin \beta \sin \beta' \cos \varphi + \cos \beta \cos \beta',$$

en alzoo

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \beta'}{\sin \beta \sin \beta'} \dots \dots \dots (5)$$

door welke formule de hoek φ , dat is de horizontale projectie van den hoek α , kan berekend worden. Wij zullen echter in het volgende hoofdstuk eene andere oplossing van dit vraagstuk geven,

afgeleid uit de bolvormige driehoeksmeting, en daarbij tevens eene voor de logarithmische berekening meer geschikte formule ter bepaling van den hoek φ mededeelen.

64. Om van eene plaats B (fig. 19), waar men zich bevindt, den afstand tot eene zichtbare maar ontoegankelijke plaats C te bepalen, is de volgende handelwijze de eenvoudigste. Men stelt een baken op een punt A, dat van B genaakbaar en waaruit ook C zichtbaar is, meet den afstand AB, benevens de hoeken waaronder men uit elk der punten B, A de plaats C en het andere punt ziet. Stellende

$$AB = a, \angle CAB = \alpha, \angle CBA = \beta,$$

dan is in $\triangle ABC$:

$$AB : BC : AC = \sin(\alpha + \beta) : \sin \alpha : \sin \beta$$

gevende:

$$BC = a \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad AC = a \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}. \quad (6)$$

waardoor de afstanden van A en B tot C kunnen berekend worden.

Is men echter niet voorzien van instrumenten voor het meten van hoeken, dan handelt men als volgt. In de richting van C naar B plaatst men een baken B' en evenzoo in de richting van C naar A een baken A' en meet behalve $AB = a$ nog de afstanden

$$BB' = b, AA' = b', BA' = c, AB' = c',$$

dan zijn van de driehoeken ABB' en ABA' de drie zijden bekend, zoodat de hoeken kunnen berekend worden. Hieruit vindt men α en β als supplementen van $\angle BAA'$ en $\angle ABB'$, en deze gesubstitueerd in verg. (6) geven de gevraagde afstanden.

Voorbeeld. Zij $a = 38^m$, $b = 86^m$, $b' = 60^m$, $c = 81^m$, $d' = 97^m$. Men zal vinden $BC = 91^m, 547$.

65. Wil men den afstand bepalen van twee plaatsen A en B (fig. 20), die beiden ongenaakbaar zijn, dan stelle men bakens in twee punten C en D, die onderling toegankelijk en van waar de plaatsen A en B zichtbaar zijn, meet den afstand CD en uit elk der punten de hoeken, waaronder de beide plaatsen en de andere bakens gezien worden. Zij

$$AB = x, CD = a, \angle ACD = p, \angle BCD = q, \angle ADC = r, \angle ADB = s.$$

Nu zijn in elk der driehoeken ACD, CDB bekend eene zijde CD, met twee aanliggende hoeken; hierdoor verkrijgt men de lengte der vier afstanden CA, CB, DA, DB, zoodat in elk der driehoeken

ACB, ADB, ter berekening van den begeerden afstand AB, bekend worden twee zijden met den ingesloten hoek.

Noemende de vier voormelde afstanden respectivelijk $\delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$, dan heeft men blijkbaar voor hunne waarden,

$$\begin{aligned}\delta &= a \frac{\sin r}{\sin(p+q+r)}, & \delta_1 &= a \frac{\sin(r+s)}{\sin(q+r+s)}, \\ \delta_2 &= a \frac{\sin(p+q)}{\sin(p+q+r)}, & \delta_3 &= a \frac{\sin q}{\sin(q+r+s)}.\end{aligned}$$

Wil men nu de onbekende zijde AB door middel van δ, δ_1 en den ingesloten hoek p berekenen, zoo kan men, ingevolge de aanmerking op het III^e geval der scheefhoekige driehoeken (bladz. 78), $\frac{\delta_1}{\delta} = \operatorname{tg} \varphi$ stellen, en de hoeken A en B bepalen door eene der formules

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B-A) &= \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \cot \frac{1}{2}p \\ \text{of} \quad \operatorname{tg}(A + \frac{1}{2}p) &= \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2}p,\end{aligned}$$

waarin alzoo

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin(r+s) \sin(p+q+r)}{\sin r \sin(q+r+s)}.$$

Eindelijk geeft de driehoek ACB

$$x = \frac{\delta \sin p}{\sin B} = \frac{\delta_1 \sin p}{\sin A}.$$

Gelijkssoortige formules vindt men ter berekening van x uit den driehoek ADB.

Voorbeeld. Zij $a = 76^{\text{m}},9$. $p = 14^\circ 59'5$. $q = 25^\circ 16'25$.
 $r = 90^\circ 25'40$. $s = 36^\circ 54'50$. Men zal vinden $x = 36^{\text{m}},8823$.

Aanmerking. De basis CD kan verschillende standen hebben ten aanzien van de lijn AB, zoo als zulks afzonderlijk in de figuren 21, 22 en 23 wordt aangewezen. Na de hiervoren gegevene oplossing zal het den leerling gemakkelijk vallen, voor elk dezer bijzondere standen, de formules te vinden ter berekening van den afstand AB uit de vijf gegevens.

Onderstelt men den afstand AB (fig. 20) bekend, en even als in het vorige vraagstuk de vier hoeken ACB, BCD, ADC, ADB gemeten, zoo kan hieruit den afstand CD door de volgende beschouwing bepaald worden.

Het is duidelijk dat, indien men op eene willekeurige lijn CD, met behulp der vier gegevene hoeken, den vierhoek ABCD con-

strueert, deze figuur alsdan gelijkvormig zijn zal aan den vierhoek, waarin de onbekende lijn CD met die willekeurige lijn, eene gelijkstandige zijde is. Men kan alzoo, door middel der oplossing van het vorige vraagstuk, den afstand AB berekenen, overeenstemmende met eene basis CD gelijk aan de eenheid van lengtemaat. Vindt men dus dezen afstand $= d$ ellen, en is $AB = a$ ellen, dan zal de begeerde afstand $CD = x$ gevonden worden door de evenredigheid

$$d : 1 = a : x,$$

waaruit

$$x = \frac{a}{d} \text{ ellen.}$$

Poorbeeld. Zij $a = 50^m, 75$. $p = 12^\circ 4' 18''$. $q = 27^\circ 13' 20''$. $r = 20^\circ 16' 24''$ en $s = 32^\circ 4' 6''$. Men zal vinden $x = 120^m, 6927$.

66. Van vier ontoegankelijke plaatsen A, B, C, D, (fig. 24) op eene rechte lijn gelegen, zijn de afstanden AB en CD tusschen de beide eerste en de beide laatste bekend. Indien men nu uit eenige standplaats P, de drie gezichtshoeken APB, BPC, CPD, heeft kunnen waarnemen, zal men hieruit den afstand BC, tusschen het tweede en derde voorwerp, zoo wede de afstanden van het punt P tot elk der vier plaatsen op de volgende wijze kunnen berekenen.

Men stelle de drie gemeten hoeken $= p, q, r$; verder de bekende afstanden AB, CD $= a, b$, en den begeerden afstand BC $= x$. De in de figuur aanwezige driehoeken leveren de navolgende evenredigheden op:

$$\begin{aligned} a : BP &= \sin p : \sin A \\ PB : x &= \sin C : \sin q \\ b : PD &= \sin r : \sin C \\ PD : AD &= \sin A : \sin (p + q + r). \end{aligned}$$

Al deze evenredigheden met elkander vermenigvuldigende, komt er, na weglating der gemeenschappelijke factoren, en stellende kortheidshalve $p + q + r = P$,

$$ab : x (a + b + x) = \sin p \sin r : \sin q \sin P,$$

dus
$$x^2 + (a + b)x = ab \times \frac{\sin q \sin P}{\sin p \sin r}.$$

Zij $x = \frac{1}{2}(a + b)y$, dan verandert de laatste vergelijking in

$$y^2 + 2y = \frac{4ab}{(a + b)^2} \times \frac{\sin q \sin P}{\sin p \sin r}.$$

Men stelle nu

$$tg \alpha = \frac{2}{a + b} \sqrt{\frac{ab \sin q \sin P}{\sin p \sin r}},$$

dan komt er

$$y + 1 = \pm \sec \alpha$$

en

$$y = -1 \pm \sec \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha,$$

indien men zich namelijk, ter vermijding eener negatieve waarde van y , bij het bovenste teeken bepaalt. Derhalve

$$x = \frac{1}{2} (a + b) \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha.$$

Ter berekening der vier afstanden PA, PB, PC, PD, stelle men in den driehoek APC, waarin de som der hoeken A en C = $180^\circ - (p + q) = 2\beta$,

$$A = \beta + \varphi \quad \text{en} \quad C = \beta - \varphi,$$

dan volgt uit de driehoeken ABP, BCP,

$$BP = \frac{a \sin (\beta + \varphi)}{\sin p} = \frac{x \sin (\beta - \varphi)}{\sin q},$$

$$\text{of} \quad \frac{\sin (\beta - \varphi)}{\sin (\beta + \varphi)} = \frac{a \sin q}{x \sin p} = \operatorname{tg} \mu.$$

De afstand x door de hiervoren gevondene formule reeds bekend zijnde, zoo zal hierdoor de hulphoek μ insgelijks bepaald zijn.

Men heeft alzoo de evenredigheid

$$\sin (\beta - \varphi) : \sin (\beta + \varphi) = \operatorname{tg} \mu : 1$$

of

$$\sin \beta \cos \varphi : \cos \beta \sin \varphi = 1 + \operatorname{tg} \mu : 1 - \operatorname{tg} \mu$$

dus

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (45^\circ - \mu) \operatorname{tg} \beta,$$

zoodat al de hoeken in de figuur thans bekend zijn. Derhalve

$$PA = \frac{a \sin (p + A)}{\sin p} \quad PB = \frac{a \sin A}{\sin p}.$$

$$PC = \frac{(a + x) \sin A}{\sin (p + q)} = \frac{x \sin (p + A)}{\sin q}.$$

$$PD = \frac{(a + b + x) \sin A}{\sin (p + q + r)} = \frac{(b + x) \sin (p + A)}{\sin (q + r)} = \frac{b \sin C}{\sin r}.$$

Voorbeeld. Zij $a = 589^m, 8$. $b = 475^m, 7$. $p = 36^\circ$. $q = 27^\circ$. $r = 18^\circ$, dan zal men vinden $x = 455^m, 4$.

C. Problema van Snellius.

67. Tot de merkwaardigste toepassingen van de driehoeksmeting op de geodesie behoort het vraagstuk, dat hier te lande algemeen onder den naam van *problema van SNELLIUS*, in het buitenland ook onder dien van vraagstuk van POTHENOT, bekend staat. SNELLIUS

toch maakte gebruik van dit vraagstuk bij zijne bekende graadmeting, ter bepaling van de grootte des aardbols, en bij alle latere geodetische opmetingen is het van uitgestrekte toepassing gebleven.

Het vraagstuk komt neêr op de bepaling van de ligging van een vierde punt ten opzichte van drie reeds in kaart gebrachte punten door middel van twee hoekmetingen.

Zijn b. v. de onderlinge afstanden van drie plaatsen A, B, C (fig. 25) bekend, dan is het de vraag de afstanden van elk dezer plaatsen tot een vierde in hetzelfde vlak gelegen punt D te bepalen, wanneer men de hoeken ADB en BDC waargenomen heeft, waaronder deze plaatsen twee aan twee uit het gemelde punt gezien worden.

Onderscheidene wiskundigen hebben hiervan in lateren tijd verschillende oplossingen gegeven, waaronder echter de hiernavolgende, welke van DELAMBRE afkomstig is, ongetwijfeld de voorkeur verdient, daar zij voor de berekening met logarithmen het meest geschikt is.

Wat de meetkundige constructie van dit vraagstuk betreft, zoo kan men daarbij op twee verschillende wijzen te werk gaan. Eerstens is het gemakkelijk in te zien, dat, bijaldien men op de zijden AB en BC van den gegeven driehoek ABC, cirkelsegmenten beschrijft, welke respectvelijk de hoeken ADB, BDC bevatten, alsdan het snijpunt dezer beide segmenten, het begeerde punt D zal opleveren *). In de tweede plaats kan men aldus redeneren. Men onderstelle om den driehoek ADC een cirkel beschreven, snijdende de lijn BD in E, en trekke vervolgens de koorden AE, CE, dan is, volgens de eigenschappen des cirkels,

$$\angle ACE = \angle ADB \quad \text{en} \quad \angle CAE = \angle BDC,$$

waaruit alzoo de navolgende constructie voortvloeit. Trek uit A en C twee lijnen, makende met AC twee hoeken gelijk aan de gemeten hoeken BDC, ADB, en elkander in E snijdende. Verleng BE onbepaald, en maak $\angle ACD = \angle AED$, dan zal het begeerde punt D bepaald worden door de snijding der lijnen BE en CD. Men zoude te dien einde insgelijks uit A de lijn AD hebben kunnen trekken. zoodanig dat $\angle CAD = \angle DEC$ zij. Deze constructie, waarbij, gelijk men ziet, geene cirkelsegmenten behoeven beschreven te worden, levert de gemakkelijkste graphische oplossing van het problema op. Wij gaan thans tot de trigonometrische over.

*) In onze figuur is deze constructie wegens hare eenvoudigheid niet uitgevoerd.

Daar de ligging der drie punten A, B, C gegeven is, kan men hierbij als bekend aannemen: $AB = a$, $BC = b$ en $\angle ABC = \alpha$; wijders $\angle ADB = p$, $\angle BDC = q$, $\angle BAD = x$, $\angle BCD = y$, en de onbekende afstanden DA, DB, DC = δ , δ_1 , δ_2 .

De driehoeken BAD, BDC geven de evenredigheden

$$a : \delta_1 = \sin p : \sin x,$$

$$b : \delta_1 = \sin q : \sin y,$$

$$\text{dus} \quad \delta_1 = \frac{a \sin x}{\sin p} = \frac{b \sin y}{\sin q},$$

waaruit volgt:

$$\sin x : \sin y = b \sin p : a \sin q.$$

Stel $\frac{a \sin q}{b \sin p} = \tan \varphi$, dan verandert de voorgaande evenredigheid in

$$\sin x : \sin y = 1 : \tan \varphi,$$

$$\text{dus} \quad \sin x + \sin y : \sin x - \sin y = 1 + \tan \varphi : 1 - \tan \varphi$$

$$\text{of} \quad \tan \frac{1}{2}(x+y) : \tan \frac{1}{2}(x-y) = 1 : \tan(45^\circ - \varphi),$$

$$\text{en} \quad \tan \frac{1}{2}(x-y) = \tan(45^\circ - \varphi) \tan \frac{1}{2}(x+y).$$

Nu is in deze vergelijking $\frac{1}{2}(x+y)$ bekend; immers, in den vierhoek ABCD heeft men

$$\alpha + p + q + x + y = 360^\circ,$$

$$\text{derhalve} \quad \frac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p + q).$$

$$\text{Zij nu korthedshalve } 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p + q) = \beta,$$

$$\text{dan is} \quad \frac{1}{2}(x+y) = \beta.$$

De oplossing van ons vraagstuk is derhalve vervat in het navolgende stelsel formules:

$$\tan \varphi = \frac{a \sin q}{b \sin p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p + q) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\tan \frac{1}{2}(x-y) = \tan \beta \tan(45^\circ - \varphi) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$x = \beta + \frac{1}{2}(x-y), \quad y = \beta - \frac{1}{2}(x-y) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\delta = \frac{a \sin(p+x)}{\sin p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\delta_1 = \frac{a \sin x}{\sin p} = \frac{b \sin y}{\sin q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$\delta_2 = \frac{b \sin(q+y)}{\sin q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

waardoor de onbekenden met behulp der logarithmen gemakkelijk kunnen berekend worden.

Is de driehoek ABC door zijne drie zijden gegeven, dan zal men daarenboven de hoeken A en C kunnen berekenen. De hoeken x en y volgens de voorgaande formules bepaald zijnde, zoo heeft men hierdoor in den driehoek ADC bekend de zijde $AC = c$, en de beide aanliggende hoeken $x - A$, $y - C$, waaruit dus de afstanden δ , δ_1 , nog kunnen bepaald worden door de formules

$$\delta = \frac{c \sin(y - C)}{\sin(p + q)}, \quad \delta_1 = \frac{c \sin(x - A)}{\sin(p + q)},$$

strekken de gelijktijdig tot proef op de juistheid der volgens form. (5) en (7) berekende waarden dezer afstanden.

Voorbeeld. Zij $a = 2817^m, 1$. $b = 3033^m, 8$. $c = 3250^m, 4$. $p = 100^\circ 9' 20''$. $q = 117^\circ 14' 25''$. Men zal vinden $\delta = 1776^m, 38$. $\delta_1 = 1895^m, 54$ en $\delta_2 = 1654^m, 99$.

68. *Aanmerking.* In de voorgaande oplossing is het standpunt D buiten den driehoek ABC, en wel binnen den hoek B aangenomen. Dat punt kan intusschen ten aanzien der drie bekende punten A, B, C op verschillende wijzen gelegen zijn, welke tot zoo vele verschillende gevallen van oplossing aanleiding geven, die echter allen, met inachtneming der teekens van de goniometrische vormen, in de hierboven gevonden formules bevat zijn, en waaromtrent wij het niet ondienstig geoordeeld hebben, hier in eenige bijzonderheden te treden.

I^e *Geval.* Onderstellen wij in de eerste plaats dat het punt D zich juist in de richting der lijn AC bevindt. In dat bijzonder geval zal men hebben:

$$\begin{aligned} p + q &= 180^\circ, \\ \text{dus} \quad \frac{1}{2}(x + y) &= \beta = 90 - \frac{1}{2}\alpha \\ \text{tg } \varphi &= \frac{a}{b}. \quad \text{tg } \frac{1}{2}(x - y) = \text{tg}(45^\circ - \varphi) \cot \frac{1}{2}\alpha. \end{aligned}$$

De hoeken x en y zijn hier niets anders dan de hoeken A en C des driehoeks ABC. De formules ter berekening der drie afstanden δ , δ_1 , δ_2 blijven dezelfde als voren.

II^e *Geval.* Indien het punt D valt in het verlengde van BA (fig. 26), moet in het stelsel formules $p = 0$ gesteld worden.

Hierdoor wordt $\varphi = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$,

$$\delta_1 = DB = b \frac{\sin(\alpha + q)}{\sin q},$$

$$\delta_2 = DC = b \frac{\sin \alpha}{\sin q},$$

welke uitkomsten uit de figuur onmiddellijk kunnen ontleend wor-

den. Het punt A vervalt hierbij geheel, zooals ook uit den aard der zaak blijkt, tenzij de afstanden BA en CA moeten dienen om α te berekenen.

III^e *Geval*. Zij het punt D binnen den driehoek ABC (fig. 27) gelegen. De hoeken $\angle ABD$, $\angle BDC$ worden alsdan stomp. Vervangt men deze door hunne supplementen, zoo heeft men

$$\beta = \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(p + q - \alpha).$$

De waarden van δ en δ_2 worden thans

$$\delta = \frac{a \sin(p - x)}{\sin p}, \quad \delta_2 = \frac{b \sin(q - y)}{\sin q},$$

terwijl de overige formules geene verandering ondergaan.

IV^e *Geval*. Het punt D ligge binnen den hoek A"CB" (fig. 28). De hoeken DBC en BDC worden bij dien stand der lijn BD blijkbaar negatief, terwijl de hoek y zal moeten vervangen worden door $360^\circ - y$, zoodat men heeft, in plaats der form. (2):

$$\frac{1}{2}(x + 360^\circ - y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p - q)$$

$$\text{of} \quad \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}(\alpha + p - q).$$

De hoek φ tegelijk met q negatief wordende, zoo verandert de form. (3) in

$$tg \frac{1}{2}(x + y - 360^\circ) = tg \frac{1}{2}(x - y + 360^\circ) tg(45^\circ + \varphi)$$

$$\text{of} \quad tg \frac{1}{2}(y + x) = tg \frac{1}{2}(x - y) tg(45^\circ + \varphi).$$

De formules ter bepaling van δ , δ_1 , δ_2 blijven dezelfde. Immers, daar $\sin(q + y)$ overgaat in $\sin(360^\circ - y - q) = -\sin(q + y)$, zal de breuk $\frac{\sin(q + y)}{\sin q}$ hierdoor geene verandering ondergaan.

V^e *Geval*. Bevindt zich het punt D binnen den hoek BAC, dan zal de hoek y wederom te vervangen zijn door $360^\circ - y$, en daarbij de hoek q als negatief moeten in rekening gebracht worden, waaruit dus dezelfde formules als voor het IV^e geval ontstaan.

Men zou echter even goed den hoek y als negatief kunnen beschouwen, en daarbij q vervangen door $360^\circ - q$. Hierdoor verkrijgt men

$$\frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}(q - p - \alpha)$$

$$\text{en} \quad tg \frac{1}{2}(x + y) = tg \frac{1}{2}(x - y) tg(45^\circ + \varphi)$$

als zijnde φ thans insgelijks negatief geworden, terwijl de overige formules geene verandering ondergaan, hetgeen met de uitkomsten voor het IV^e geval verkregen, geheel overeenstemt.

VI^e *Geval*. Bij de ligging van het punt D binnen den hoek A"BC",

veranderen de hoeken p en q in hunne supplementen, terwijl x en y elk negatief worden. Hierdoor heeft men

$$\beta = -\frac{1}{2}(x+y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + 360^\circ - p - q)$$

$$\text{of} \quad \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}(\alpha - p - q)$$

$$\text{en} \quad tg \frac{1}{2}(x-y) = tg \frac{1}{2}(x+y) tg(45^\circ - \varphi)$$

zonder dat de overige formules hierdoor eenige wijziging ondergaan.

Men kan dit geval ook onmiddellijk tot dat van fig. 25, waarop onze formules gegrond zijn, terug brengen, door slechts te onderstellen dat het hoekpunt B des driehoeks ABC beneden de lijn AC valle, als waardoor α in $360^\circ - \alpha$ overgaat, en dus $\frac{1}{2}(x+y)$ in $\frac{1}{2}(\alpha - p - q)$, even als hiervoren.

VII^e Geval. Het punt D zij binnen den hoek ACB gelegen. De hoek x wordt alsdan negatief, terwijl p verandert in $360^\circ - p$, waardoor

$$\frac{1}{2}(y-x) = \frac{1}{2}(p-q-\alpha)$$

$$\text{en} \quad tg \frac{1}{2}(x+y) = tg \frac{1}{2}(x-y) tg(45^\circ + \varphi).$$

Dit geval is blijkbaar gelijkvormig aan het V^e, en kan daaruit afgeleid worden door verwisseling van x in y , van p in q en van a in b .

VIII^e Geval. Ligt eindelijk het punt D binnen den hoek B'AC", dan wordt p negatief, en x verandert in $360^\circ - x$. Men heeft alzoo

$$\frac{1}{2}(360^\circ - x + y) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha - p + q)$$

$$\text{of} \quad \frac{1}{2}(x-y) = \frac{1}{2}(\alpha - p + q)$$

$$\text{en} \quad tg \frac{1}{2}(x+y) = tg \frac{1}{2}(y-x) tg(45^\circ + \varphi),$$

even als zulks onmiddellijk uit het IV^e geval had kunnen afgeleid worden, door eene gelijksoortige onderlinge verwisseling als hiervoren in het VII^e geval.

In elk dezer gevallen blijven de formules ter bepaling van δ , δ_1 , δ_2 insgelijks van toepassing.

IX^e Geval. Onderstellen wij nog, dat de drie punten A, B, C op eene rechte lijn gelegen zijn, waardoor $\alpha = 180^\circ$. Men heeft alsdan ter bepaling der hoeken x en y ,

$$\beta = \frac{1}{2}(x+y) = 90^\circ - \frac{1}{2}(p+q)$$

$$tg \varphi = \frac{a \sin q}{b \sin p}, \quad tg \frac{1}{2}(x-y) = \frac{tg(45^\circ - \varphi)}{tg \frac{1}{2}(p+q)},$$

terwijl de formules voor δ , δ_1 , δ_2 ook hier zonder eenige verandering kunnen gebruikt worden.

69. Het problema van SNELLIUS is voor de volgende uitbreiding vatbaar.

Drie punten A, B, C, (fig. 29) in ligging gegeven zijnde, heeft men uit twee andere in hetzelfde vlak gelegen punten D, E, de hoeken ADB, BDE, DEB, CEB waargenomen; men vraagt hoedanig de plaats dezer beide laatste punten ten aanzien der drie gegebene punten door berekening kan worden bepaald.

Men stelde $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = B$, en neme deze grootheden als bekend aan; zij voorts $\angle ADB = \alpha$, $\angle BDE = \beta$, $\angle BED = \gamma$, $\angle BEC = \delta$, en de onbekende hoeken BAD, BCE $= x$ en y .

De driehoeken ADB, BDE, BEC geven de evenredigheden:

$$\begin{aligned} a : DB &= \sin \alpha : \sin x \\ DB : BE &= \sin \gamma : \sin \beta \\ BE : b &= \sin y : \sin \delta, \end{aligned}$$

waaruit door vermenigvuldiging ontstaat

$$\begin{aligned} a : b &= \sin \alpha \sin \gamma \sin y : \sin x \sin \beta \sin \delta, \\ \text{of} \quad \sin x : \sin y &= b \sin \alpha \sin \gamma : a \sin \beta \sin \delta. \end{aligned}$$

$$\text{Men stelde} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \beta \sin \delta}{b \sin \alpha \sin \gamma},$$

$$\text{dus} \quad \sin x + \sin y : \sin x - \sin y = 1 + \operatorname{tg} \varphi : 1 - \operatorname{tg} \varphi$$

$$\begin{aligned} \text{of} \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y) : \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) &= 1 : \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) &= \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x+y). \end{aligned}$$

Nu is $\frac{1}{2}(x+y)$ bekend, vermits in den vijfhoek ABCED,

$$x + y + \alpha + \beta + \gamma + \delta + B = 540^\circ,$$

$$\text{dus} \quad \frac{1}{2}(x+y) = 270^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma + \delta + B) = \mu.$$

De oplossing van dit algemeene vraagstuk is alzoo vervat in het navolgende stelsel formulen:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a \sin \beta \sin \delta}{b \sin \alpha \sin \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) \operatorname{tg} \mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$x = \mu + \frac{1}{2}(x-y), \quad y = \mu - \frac{1}{2}(x-y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} DA &= \frac{a \sin(x+\alpha)}{\sin \alpha}, & DB &= \frac{a \sin x}{\sin \alpha} \\ BE &= \frac{b \sin y}{\sin \delta}, & EC &= \frac{b \sin(y+\delta)}{\sin \delta} \\ \text{en } DE &= BD \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin \gamma} = BE \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin \beta}; \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

welke formules in die van het voorgaande vraagstuk overgaan, zoodra men de punten D, E in elkander doet vallen, en dus $\beta + \gamma = 180^\circ$ of $\sin \beta = \sin \gamma$ stelt. Zulks zal eveneens plaats hebben, indien het punt D op de lijn AE gelegen, en dus $\alpha + \beta = 180^\circ$ is, of ook indien het punt E op de lijn DC gelegen, en dus $\gamma + \beta = 180^\circ$ is.

Voorbeeld. Zij $a = 4567^m$. $b = 3998^m,5$. $B = 113^\circ 27' 30''$.
 $\alpha = 39^\circ 27' 20''$. $\beta = 65^\circ 8' 39''$. $\gamma = 74^\circ 49' 50''$. $\delta = 33^\circ 55' 10''$.
 Men zal vinden

$$AD = 4579^m,912, \quad BD = 7054^m,478, \quad EC = 3991^m,486, \\ BE = 6632^m,903, \quad DE = 4701^m,615.$$

70. De meetkundige constructie van dit vraagstuk laat zich gemakkelijk tot die van het voorgaande terug brengen.

Men trekke namelijk door de uiteinden D en E eener willekeurige lijn DE (fig. 30), twee lijnen onder de hoeken β en γ , elkander in B snijdende, verder nog twee andere lijnen EC, DA, makende met BE en BD de hoeken δ en α . Verlengt men nu die lijnen tot aan hare ontmoeting in P , dan is de vierhoek DBEP gelijkvormig aan den overeenkomstigen vierhoek van fig. 29, en dus zijn hierdoor bekend de hoeken p en q , waaronder A, B, C uit het punt P worden waargenomen. Dit laatste punt nu bepaald zijnde volgens de constructie van het problema van SNELLIUS, zoo vindt men verder de punten D en E, door uit B lijnen te trekken, makende met BP, de hoeken PBD en PBE van fig. 29.

Aanmerking. Dit vraagstuk kan insgelijks, ten aanzien van de onderlinge ligging der hoekpunten van den vijfhoek, tot vele bijzondere gevallen aanleiding geven, waarvoor echter steeds dezelfde formules gelden, met inachtneming slechts der veranderingen, welke de teekens der goniometrische vormen zullen ondergaan, indien eenige der hoeken van de figuur negatief of grooter dan 180° worden. Na de uitvoerige behandeling van het problema van SNELLIUS mogen wij het onderzoek der hierbedoelde gevallen den lezer ter eigen oefening overlaten.

71. Eindelijk kan het problema van SNELLIUS nog de volgende wijziging of uitbreiding ondergaan.

Drie punten A, B, C (fig. 31) in ligging bekend zijnde, zoo heeft men de beide eerste uit een vierde punt D, onder den gezichtshoek ADB waargenomen. Om het derde punt C te kunnen zien, is men verplicht geweest in de richting BD tot in E terug te gaan, en heeft men aldaar den hoek BEC waargenomen. Zoo nu tevens de afstand DE bekend is,

eraagt men hier uit de ligging der punten D, E ten aanzien van den driehoek ABC te bepalen.

Oplossing. Men stelde $AB = a$, $BC = b$, $DE = \delta$, de bekende hoeken ABC , ADB , $BEC = \alpha$, p , q . Nu is blijkbaar de som der hoeken BAD , $BCE = 360^\circ - (\alpha + p + q)$.

Zij nu $\beta = 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + p + q)$, dan kan men $\angle BAD = \beta + x$ en $\angle BCE = \beta - x$ stellen. Uit de driehoeken ADB , BEC volgt nu

$$BD = \frac{a \sin(\beta + x)}{\sin p} \quad \text{en} \quad BE = \frac{b \sin(\beta - x)}{\sin q}.$$

Men heeft derhalve, ter bepaling van x , de vergelijking

$$b \frac{\sin(\beta - x)}{\sin q} - a \frac{\sin(\beta + x)}{\sin p} = \delta.$$

Zij $t\gamma \varphi = \frac{a \sin q}{b \sin p}$, dan verandert de voorgaande vergelijking in

$$(1 - t\gamma \varphi) \sin \beta \cos x - (1 + t\gamma \varphi) \cos \beta \sin x = \frac{\delta \sin q}{b}.$$

Men stelde verder

$$\frac{(1 - t\gamma \varphi) \sin \beta}{(1 + t\gamma \varphi) \cos \beta} = t\gamma (45^\circ - \varphi) t\gamma \beta = t\gamma \mu,$$

dan komt er

$$t\gamma \mu \cos x - \sin x = \frac{\delta \sin q}{b \cos \beta (1 + t\gamma \varphi)}$$

$$\text{of} \quad \sin(\mu - x) = \frac{\delta \sin q \cos \mu \cos \varphi}{b \cos \beta \cos(45^\circ - \varphi) \sqrt{2}} \dots \dots (12)$$

welke formule tot de logarithmische berekening zeer geschikt is, en voor den hoek $\mu - x$ twee verschillende waarden zal opleveren, die elkanders supplementen zijn.

Heeft men dus gevonden $\sin(\mu - x) = k$, dan volgt hieruit

$$x = \mu - Fg \sin k$$

en

$$x = \mu + Bg \sin k - 180^\circ,$$

terwijl de vier afstanden DA, DB, EB, EC bepaald worden door de formules

$$DA = \frac{a \sin(p + \beta + x)}{\sin p}, \quad DB = \frac{a \sin(\beta + x)}{\sin p} \dots (13)$$

$$CE = \frac{b \sin(\beta + q - x)}{\sin q}, \quad BE = \frac{b \sin(\beta - x)}{\sin q}.$$

De form. (12) toont aan dat het vraagstuk slechts voor ééne oplossing vatbaar is, zoodra de gegevens zoodanig zijn dat de breuk k gelijk aan de eenheid wordt. Bevindt men echter $k > 1$, dan blijkt hieruit, dat de gegevens met het vraagstuk onbestaanbaar zijn. In elk ander geval zullen er twee bijzondere standen der lijn DE met de gegevens overeenstemmen, gelijk zulks door de navolgende meetkundige constructie nader bevestigd wordt.

72. Men beschrijve op AB en BC (fig. 32) twee cirkelsegmenten, welke respectievelijk de hoeken p en q kunnen bevatten, dan laat zich gemakkelijk uit de figuur opmaken, dat het problema hierop nederkomt, om uit het snijpunt B eene koorde BE te trekken, zoodanig dat het stuk DE, tusschen de beide cirkel-omtrekken bevat, de gegeven lengte δ hebbe. Te dien einde trekke men uit C de lijn CF onder den hoek $BCF = p$, en beschrijve verder op de lijn FA een cirkelsegment kunnende den hoek p bevatten. Nu make men in dat segment de koorden FG, Fg, elk gelijk aan de lijn δ ; trekke uit A, de lijnen AG, Ag, snijdende het op AB beschreven cirkelsegment in de punten D en d, en vereenige B met D en met d, dan zullen hierdoor de twee standen der lijn BE bepaald zijn, die aan de gegevens voldoen. Immers, daar $\angle FEB = \angle FCB = p = \angle ADB = \angle FGD$, zoo is de vierhoek FEDG blijkbaar een parallelogram, en dus $DE = FG = \delta$. Hetzelfde bewijs geldt voor de tweede lijn dBe.

Is de gegebene lijn δ juist zoo lang als de middellijn des cirkels op AF als koorde beschreven, dan vereenigen zich beide lijnen BE, Be, even als de lijnen FG, Fg, tot eene enkele, in welk geval het vraagstuk slechts ééne oplossing toelaat. Is echter die lijn δ grooter dan de middellijn van genoemden cirkel, dan strekt zulks ten bewijze dat de gegevens onderling onbestaanbaar zijn. Ziehier nu ter toepassing een voorbeeld in getallen.

Zij $a = 785^m$. $b = 414^m$. $\alpha = 117^\circ 41' 26''$. $p = 50^\circ 30'$. $q = 17^\circ 45'$. $\delta = 306^m$. Men zal voor de eene oplossing vinden

$$\begin{aligned} BD &= 1003^m, 739, & BE &= 1309^m, 739, & AD &= 510, 553, \\ CE &= 1356^m, 758, \end{aligned}$$

en voor de andere oplossing:

$$\begin{aligned} BD &= 582^m, 077, & BE &= 888^m, 077, & AD &= 1014^m, 058, \\ CE &= 532^m, 601. \end{aligned}$$

Aanmerking. Dit vraagstuk, hetwelk bij de onderstelling van $\delta = 0$, in dat van SNELLIUS overgaat, is even als het voorgaande voor

velerlei belangrijke beschouwingen vatbaar, ten aanzien van de onderlinge ligging der vijf punten. Ons bestek niet toelatende dienaangaande in bijzonderheden te treden, zoo vermeenen wij den weetgierigen lezer te moeten verwijzen naar de *Verzameling van voorstellen*, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap: *Een onvermoeide arbeid komt alles te boven*, 1815. II deel, bladz. 128 en 205, alwaar de beide laatste vraagstukken op eene meer uitvoerige en leerzame wijze behandeld worden.

DERDE HOOFDSTUK.

BOLVORMIGE DRIEHOEKSMETING.

§ XII.

Algemeene beschouwing der bolvormige driehoeken.

73. Indien men op het oppervlak van een bol drie punten A, B en C naar welgevallen neemt, en deze door bogen van groote cirkels vereenigt, dan ontstaat hieruit een bolvormige driehoek ABC (fig. 33), waarvan de inhoud bepaald wordt door dat gedeelte van het oppervlak des bols, hetwelk binnen de drie gemelde bogen besloten is. Zij M het middelpunt van dezen bol, waaruit de stralen MA, MB, MC naar de drie hoekpunten des driehoeks getrokken zijn. De hierdoor gevormde drievlakkige hoek is blijkbaar samengesteld uit drie zijvlakken of hoeken AMB, AMC, BMC, welke respectievelijk de bogen of zijden AB, AC, BC van den driehoek tot maat zullen hebben.

Onder de hoeken eens bolvormigen driehoeks verstaat men de standhoeken tusschen twee der zijvlakken van den drievlakkigen hoek, welke in het middelpunt des bols gevormd wordt. Aldus is bijv. de hoek CAB niets anders dan de standhoek der zijvlakken CMA, BMA, wiens grootte bepaald wordt door den hoek, begrepen tusschen de beide raaklijnen, die men in het punt A aan de bogen AC, AB kan trekken; hetwelk eveneens geldt van elken der twee overige hoeken B en C. Bij deze wijze van beschouwen der op den bol beschreven driehoeken wordt tevens stilzwijgend aangenomen, dat elk der drie bogen minder dan 180° bedraagt.

74. Elke bolvormige driehoek bevat zes onderscheidene samenstellende deelen of elementen, welke noodzakelijk zoodanig met elkander verbonden zijn, dat drie derzelve voldoende zijn ter bepaling van elk der drie overigen. De bolvormige driehoeksmeting heeft hoofdzakelijk ten doel de betrekkingen op te sporen, welke tusschen de bekende en de onbekende elementen des driehoeks bestaan, ten einde hieruit de regels af te leiden, ter berekening van deze onbekenden in elk der onderscheidene gevallen.

Van belang is het hier te doen opmerken, dat, aangezien deze zes elementen geene andere zijn, dan de drie standhoeken der zijvlakken, en de drie hoeken gevormd door de ribben des drievlakkigen hoeks, zij geheel onafhankelijk zijn van den straal des bols. Zij worden steeds door graden uitgedrukt, en bezitten alzoo slechts eene betrekkelijke waarde.

75. In de meetkunde der vlakken wordt betoogd dat de som der hoeken, waaruit een drievlakkige hoek samengesteld is, minder dan $4R$ of 360° bedraagt, zoo mede dat de som van twee dezer hoeken altijd grooter dan de derde hoek is. Deze beide eigenschappen op den bolvormigen driehoek overgebracht, leeren ons dat

$$1^\circ. \quad AB + AC + BC < 4R, \text{ en}$$

$$2^\circ. \quad AC + AB > BC; \quad AC + BC > AB; \quad AB + BC > AC;$$

dat is, in woorden uitgedrukt:

1°. *De som der drie zijden eens bolvormigen driehoeks bedraagt altijd minder dan $4R$.*

2°. *De som van twee der zijden is altijd grooter dan de derde zijde.*

76. Wanneer men twee zijden AC , AB des driehoeks ABC (fig. 34) tot aan hare ontmoeting in A' verlengt, dan zullen, zoo als bekend is, de bogen ACA' , ABA' elk gelijk aan 180° zijn, en $\angle A' = \angle A$. De hieruit ontstane driehoek $A'BC$ heeft alzoo met den eerstgemelden eene gemeenschappelijke zijde BC en een gelijken overstaanden hoek, terwijl de beide overige zijden en hoeken de supplementen zijn van de overeenkomstige elementen in den driehoek $A'BC$. Uit dien hoofde wordt de driehoek $A'BC$ de *supplements-driehoek* van den anderen genaamd, eene benaming die ook wederkeerig geldt. Op elke der drie zijden eens driehoeks laat zich een dusdanige supplements-driehoek beschrijven. Past men nu de eerste der hiervoren vermelde eigenschappen op den supplements-driehoek $A'BC$ toe, dan komt er

$$A'C + A'B + BC < 4R;$$

$$\text{dat is} \quad 2R - AC + 2R - AB + BC < 4R,$$

$$\text{of} \quad AC + AB > BC,$$

waaruit blijkt, hoedanig zich de tweede der bedoelde eigenschappen gemakkelijk uit de eerste laat afleiden.

De boog DE uit een der hoekpunten A, A' als pool met een straal gelijk aan de koorde des kwadrants beschreven, zal de maat van den hoek A zijn, uithoofde de bogen AD, AE, elk 90° zijnde, de stralen MD, ME loodrecht op de middellijn AA' des bols staan, en dus $\angle DME$ den standhoek der vlakken DAM, EAM voorstelt.

77. Behalve den supplements driehoek beschouwt men in de bolvormige driehoeksmeting nog den *pool- of aspunts* driehoek. Deze laatste ontstaat door de snijding van drie bogen van groote cirkels A'C', B'C', A'B' (fig. 35), uit de drie hoekpunten A, B, C als polen beschreven. De driehoek A'B'C' wordt alsdan de pooldriehoek van ABC genaamd, en bezit de belangrijke eigenschap dat *zijne drie zijden en hoeken respectievelijk met de supplementen der overstaande hoeken en zijden des gegeven driehoeks overeenkomen*. Zie hier het betoog dezer eigenschap.

Men verlange de drie zijden AB, BC, AC, (welke hier ondersteld zijn elk kleiner dan een kwadrant), tot op die des pool-driehoeks, dan zullen de bogen $A_c, A_d, B_e, B_f, C_a, C_b$, blijkbaar elk 90° zijn, terwijl de hoeken A, B, C tot maat zullen hebben de bogen c', e' en ab . Verder blijkt uit deze constructie ten duidelijkste, dat de hoeken in b en e recht, en dus de bogen $A'e, A'b$ elk gelijk 90° zullen zijn; waaruit volgt, dat het hoekpunt A' wederkeerig de pool is van den overstaanden boog BC, en op gelijke wijze, dat B', C' de polen zijn der overstaande bogen AC, AB. Nu is klaarblijkelijk

$$A'b + B'a = 180^\circ,$$

of wel

$$A'B' + ab = 180^\circ,$$

en aangezien a' de maat is van den hoek C, zal $A'B' = 180^\circ - C$, of het supplement van den overstaanden hoek C zijn. Op gelijke wijze betoogt men dat

$$B'C' = 180^\circ - A, \text{ en } A'C' = 180^\circ - B.$$

De bogen B_e, C_b , elk een kwadrant zijnde, zoo heeft men

$$B_e + C_b = BC + be = 180^\circ,$$

maar de boog be de maat van den hoek A' voorstellende, zoo volgt hieruit $A' = 180^\circ - BC$, en op gelijke wijze $B' = 180^\circ - AC$, $C' = 180^\circ - AB$, waardoor de genoemde tweeledige eigenschap be-
wezen is.

Bijaldien eene of twee zijden des driehoeks grooter dan een kwadrant mochten zijn, gaat de eigenschap even goed door, waarvan

men zich door eené bijzondere daartoe betrekkelijke figuur gemakkelijk zal kunnen overtuigen. Het geval waarin elke der drie zijden $> 90^\circ$, wordt reeds door onze figuur zelve betoogd, dewijl $A'B'C'$ zulk een driehoek, en ABC zijn pool-driehoek voorstelt. Vereenigt men voorts de hoekpunten C, C' door een boog des grooten cirkels, snijvende de zijden $AB, A'B'$ in de punten D, D' , dan zal het vlak van dien boog, uithoofde C de pool van $A' B'$ is, tegelijkertijd loodrecht staan op de zijden $AB, A'B'$. en omdat $C'D = CD' = 90^\circ$, zoo volgt hieruit tevens

$$C'D + CD' = CD + C'D' = 180^\circ.$$

De loodrechte bogen in beide driehoeken zijn dus mede elkanders supplementen. Uit het hiervoren betoogde kan men nu onmiddellijk de beide volgende eigenschappen der bolvormige driehoeken afleiden, namelijk:

1°. *De som der drie hoeken is altijd $> 2R$ en $< 6R$.*

2°. *De som van twee der hoeken verminderd met den derden hoek is altijd $< 2R$.*

Immers heeft men in den pool-driehoek (n°. 75)

$$B'C' + A'C' + A'B' < 4R$$

dat is $2R - A + 2R - B + 2R - C < 4R$

of $A + B + C > 2R,$

en daar elk der drie hoeken $< 2R$, zal ook

$$A + B + C < 6R$$

moeten zijn.

Voorts heeft men in denzelfden driehoek

$$B'C' + A'C' > A'B'$$

of wel $2R - A + 2R - B > 2R - C$

dat is $A + B - C < 2R.$

Het zal later blijken welk hulpmiddel de beschouwing zoo des pool-driehoeks als der supplement-driehoeken oplevert, tot opsporing der betrekkingen tusschen de elementen eens bolvormigen driehoeks bestaande.

78. Even als de vlakke driehoeken worden ook de bolvormige in *rechthoekige* en *scheefhoekige* driehoeken onderscheiden. Wanneer twee der zijvlakken BMC, AMB (fig. 33) op elkander loodrecht staan, zal de hoek B recht zijn, en ABC een rechthoekige bolvormige driehoek genaamd worden. De beide overige hoeken A, C kunnen als-

dan zoo wel scherp als stomp zijn (n°. 77), en worden met den naam van scheve hoeken bestempeld. Staat de ribbe MC tevens loodrecht op het vlak MAB, dan is ook de hoek A recht, en de zijden AC, BC zullen elk een kwadrant zijn. Daarenboven kan nog de hoek C recht zijn, als wanneer men een driehoek met drie rechte hoeken verkrijgt, waarvan elke zijde een kwadrant is, terwijl het oppervlak van zoodanigen driehoek het achtste gedeelte van dat des bols bedraagt. Is geen der hoeken recht, dan wordt de driehoek een *scheefhoekige* genaamd.

79. Onder een gelijkbeenigen bolvormigen driehoek verstaat men een zoodanigen, waarvan twee zijden even groot zijn. De hoeken aan de basis zullen alsdan insgelijks aan elkander gelijk zijn. Om zulks te betoogen, zoo stelle ABC (fig. 36) zulk een driehoek voor; laat de basis in het punt D midden door gedeeld, en B met D door den boog eens grooten cirkels vereenigd worden. De driehoeken ABD, BDC, wier zijden elk in het bijzonder aan elkander gelijk zijn, zullen alsdan gelijke hoeken hebben. Zulks volgt onmiddellijk uit de in de meetkunde betoogde eigenschap dat, wanneer de zijvlakken van twee drielakkige hoeken elk in het bijzonder aan elkander gelijk zijn, de overeenkomstige standhoeken dezer vlakken mede aan elkander zullen gelijk zijn. Het vlak van den boog BD deelt alzoo den tophoek midden door, en zal, omdat $\angle ADB = \angle BDC$, loodrecht op den boog AC staan. De driehoeken ADB, BDC zijn derhalve beide rechthoekig in D. Omgekeerd volgt nu ook terstond uit de beschouwing des pool-driehoeks, dat elke bolvormige driehoek gelijkbeenig is, wanneer twee zijner hoeken even groot zijn.

In elken bolvormigen driehoek staat de grootste zijde tegenover den grootsten hoek, en ook omgekeerd. Laat, om zulks te betoogen, in fig. 37 $\angle C > \angle A$ ondersteld worden, dan kan men door het hoekpunt C den boog CD zoodanig trekken, dat $\angle ACD = \angle DAC$ zij, als wanneer de driehoek ADC gelijkbeenig zal zijn. Nu is in den driehoek BDC, $CD + BD > BC$ (n°. 75), dus zal $AD + BD$ of $AB > BC$. Het omgekeerde der eigenschap wordt op gelijke wijze als bij de vlakke driehoeken betoogd, kunnende zulks onmiddellijk met behulp des pool-driehoeks geschieden.

Passen wij de zoo even betoogde eigenschap op den supplements-driehoek ABC (fig. 34) toe, dan zal, in de onderstelling van $BC > AC$, ook $\angle BAC > \angle ABC$ zijn, dat is indien $BC > 2R - A'C$ of $BC + A'C > 180^\circ$, zal tevens $\angle CA'B = \angle CAB > 180^\circ - \angle CBA'$ of $\angle CA'B + \angle CBA' > 180^\circ$. Had men $BC < AC$ ondersteld, dan zou elke dezer sommen $< 180^\circ$ bevonden zijn; waaruit wij

deze nieuwe eigenschap des bolvormigen driehoeks leeren kennen, dat de som van twee der hoeken grooter of kleiner dan 180° is, naar dat de som der overstaande zijden grooter of kleiner dan 180° is, en zoo ook omgekeerd; eene belangrijke eigenschap, welke, gelijk wij hierna zullen zien, een geschikt kenmerk oplevert om bij de oplossing van enkele gevallen, spoedig te doen beslissen of een der elementen scherp of stomp moet genomen worden.

Zie hier twee gevolgen, welke zich uit de beide laatste eigenschappen onmiddellijk laten afleiden.

Indien de som van twee zijden $> 180^\circ$, zal de hoek over de grootste dezer zijden altijd stomp, en ook de zijde over den grootsten der beide hoeken gelegen, stomp zijn. Indien de som van twee zijden $< 180^\circ$, zal de hoek over de kleinste dezer zijden altijd scherp, en ook de zijde over den kleinsten der beide hoeken scherp zijn.

Na deze algemeene eigenschappen der bolvormige driehoeken verklaard te hebben, gaan wij over tot het onderzoek der betrekkingen, die tusschen hunne hoeken en zijden bestaan, en tot de oplossing der onderscheidene gevallen moeten strekken.

§ XIII.

Afleiding der grondformulen.

80. Daar een bolvormige driehoek even als een drievlakkige hoek in het algemeen door elke drie zijner elementen is bepaald, zullen de formules, die de betrekkingen tusschen de elementen uitdrukken, minstens vier dezer grootheden moeten bevatten, zoodat door elke betrekking een onbekend element uit drie gegevene kan opgelost worden. De zes elementen van den driehoek kunnen op vijftien manieren, vier aan vier, gecombineerd worden, zoodat er vijftien betrekkingen tusschen de verschillende elementen des driehoeks, vier aan vier moeten bestaan, opdat het mogelijk zal zijn uit elke drie gegeven elementen de drie andere onafhankelijk van elkander te berekenen. Deze vijftien betrekkingen worden genoemd de *grondformulen*; zij bevatten in hare verschillende samenstellingen de oplossing van alle vraagstukken, die in de bolvormige driehoeksmeting kunnen voorkomen. Met hare afleiding zullen wij ons in de eerste plaats bezig houden.

81. Zij ABC (fig. 38) een bolvormige driehoek, O het middelpunt van den bol, waarop hij is beschreven; trekken wij dan in

een der hoekpunten A raaklijnen tot de cirkelbogen, die in dat punt samen komen, waarvan de eene AD de ribbe OB in D en de andere de ribbe OC in E snijdt, zoo is $\angle DAE$ de bolvormige hoek A en tevens de standhoek der vlakken BOA en COA. Stellen wij den straal des bols gelijk aan de eenheid, dat geschieden kan, omdat hij de straal is van alle groote cirkelbogen, dus ook van hunne goniometrische grootheden, en noemen als in de vlakke driehoeksmeting de zijden met de kleine letters der overliggende hoekpunten, dus

$$\begin{aligned} \text{boog } AB &= \angle AOB = c \\ \text{boog } AC &= \angle AOC = b \\ \text{boog } BC &= \angle BOC = a, \end{aligned}$$

dan is in den rechthoekigen driehoek OAD,

$$AD = \tan c, \quad OD = \sec c;$$

evenzoo is in $\triangle AOE$

$$AE = \tan b, \quad OE = \sec b.$$

Verder is in $\triangle DAE$ en $\triangle DOE$

$$\begin{aligned} DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos A \\ &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos a \end{aligned}$$

dat is door substitutie der voorgaande waarden,

$$\tan^2 c + \tan^2 b - 2 \tan c \tan b \cos A = \sec^2 c + \sec^2 b - 2 \sec c \sec b \cos a$$

of, omdat $\sec^2 a = 1 + \tan^2 a$,

$$\begin{aligned} -2 \tan c \tan b \cos A &= 2 - 2 \sec c \sec b \cos a, \\ \sec c \sec b \cos a &= 1 + \tan c \tan b \cos A, \end{aligned}$$

vermenigvuldigende met $\cos b \cos c$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

zijnde eene betrekking tusschen vier elementen eens bolvormigen driehoeks.

Door dezelfde bewerking op elk der hoekpunten toe te passen en ook volgens den gewonen regel der symmetrie, vindt men door behoorlijke omzetting van letters:

$$\left. \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Daar in deze drie formules de zes elementen des driehoeks voor-

komen, zouden zij, streng genomen, voldoende zijn voor de oplossing van alle gevallen der driehoeksmeting, omdat men, de drie gevraagde elementen als onbekenden beschouwende, altijd drie vergelijkingen met drie onbekenden zou hebben. In de meeste gevallen echter zou de oplossing groote moeielijkheden opleveren en de vergelijkingen tot hoogen graad opklimmen, weshalve het beter is de andere betrekkingen, die tusschen de elementen moeten bestaan, op te sporen. Die betrekkingen kunnen alle door herleiding uit de formules (1) worden afgeleid, om welke reden wij aan dezen den naam van *hoofdformulen* zullen geven.

82. Uit de eerste formule (1) volgt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

derhalve

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{\frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}} \\ &= \frac{\sqrt{\{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2\}}}{\sin b \sin c} \\ &= \frac{\sqrt{\{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c\}}}{\sin b \sin c} \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sqrt{\{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c\}}}{\sin a \sin b \sin c}$$

Het tweede lid dezer vergelijking is geheel symmetrisch ten opzichte der grootheden a , b , c , en ondergaat dus geene verandering wanneer de letters behoorlijk verwisseld worden; derhalve moet hetzelfde met het eerste lid het geval zijn, hetgeen alleen kan plaats hebben, wanneer

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin A}{\sin a} &= \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \\ \text{of} \quad \sin a : \sin b : \sin c &= \sin A : \sin B : \sin C \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

waaruit wij leeren, dat in elken bolvormigen driehoek de sinussen der zijden evenredig zijn aan de sinussen der tegenovergelegen hoeken. De standvastige verhouding tusschen den sinus eens hoeks en den sinus

eener tegenovergelegen zijde wordt de *modulus* van den driehoek genoemd, zoodat

$$M = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \dots\dots\dots (a)$$

De formule (2) wordt overeenkomstig hiermede de *sinus-* of *modulus-formule* genoemd.

83. Door achtereenvolgens de waarde voor $\cos c$ uit de derde in de eerste en die van $\cos b$ uit de tweede in de eerste der formules (1) over te brengen, volgt:

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) + \sin b \sin c \cos A \\ \cos a &= \cos c (\cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B) + \sin b \sin c \cos A \\ \text{of } \cos a (1 - \cos^2 b) &= \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A \\ \cos a (1 - \cos^2 c) &= \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A \end{aligned}$$

deelende de eerste door $\sin a \sin b$, de tweede door $\sin a \sin c$,

$$\left. \begin{aligned} \cot a \sin b &= \cos b \cos C + \frac{\sin c}{\sin a} \cos A \\ \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \frac{\sin b}{\sin a} \cos A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (b)$$

of, omdat volgens (2)

$$\begin{aligned} \frac{\sin c}{\sin a} &= \frac{\sin C}{\sin A}, & \frac{\sin b}{\sin a} &= \frac{\sin B}{\sin A} \\ \cot a \sin b &= \cos b \cos C + \cot A \sin C \\ \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \cot A \sin B, \end{aligned}$$

en deze beide, als bevattende ieder vier elementen, behooren weder tot de grondformules. Door behoorlijke verwisseling van letters, geven zij het volgende stelsel:

$$\left. \begin{aligned} \cot a \sin b &= \sin C \cot A + \cos b \cos C \\ \cot a \sin c &= \sin B \cot A + \cos c \cos B \\ \cot b \sin a &= \sin C \cot B + \cos a \cos C \\ \cot b \sin c &= \sin A \cot B + \cos c \cos A \\ \cot c \sin a &= \sin B \cot C + \cos a \cos B \\ \cot c \sin b &= \sin A \cot C + \cos b \cos A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

Deze zes grondformules worden ter onderscheiding van de anderen de *formules der cotangenten* genoemd. Den opmerksamen leerling zal het niet moeielijk vallen een regel te ontdekken, waardoor deze formules gemakkelijk in het hoofd zijn te prenten.

84. Om het laatste stel grondformulen te ontdekken, keeren wij terug tot de voorgaande formulen (b), en schrijven de eerste in den vorm

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A,$$

evenzoo is

$$\cos b \sin a = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B;$$

door de laatste met $\cos C$ te vermenigvuldigen en bij de eerste op te tellen, volgt:

$$\cos a \sin b = \cos a \sin b \cos^2 C + \sin c (\cos A + \cos B \cos C)$$

$$\text{dus } \cos A + \cos B \cos C = \cos a \frac{\sin b}{\sin c} (1 - \cos^2 C).$$

daar echter

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$\text{wordt } \cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C \cos a$$

$$\text{of } \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

door behoorlijke omzetting van letters, verkrijgen wij hieruit

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

en hiermede is ons vooruit aangekondigd stelsel van vijftien grondformulen volledig gevonden. Door de formulen (1) — (4) moeten dus alle gevallen der driehoeksmeting opgelost kunnen worden.

85. De voorgaande afleiding der grondformulen, het eerst door EULER en LAGRANGE gegeven, verdient de voorkeur omdat hierbij alle uit eene enkele, die wij de hoofdformule hebben genoemd, zijn gevonden. Wij zullen nu tot bevestiging en toelichting aantoonen, hoe zij ook door meetkundige beschouwing aan de figuur kunnen ontleend worden.

Daartoe laten wij uit een der hoekpunten B (fig. 38) eene loodlijn BG neer op het overstaande zijvlak, trekken BH en BL loodrecht op OA en OC, dan zijn volgens bekende meetkundige eigenschappen ook GH en GL loodrecht op OA en OC, zoodat de hoeken BHG en BLG de standhoeken op de ribben OA en OC, dat zijn de hoeken A en C, voorstellen. Trekken wij nog HI evenwijdig aan GL en GK evenwijdig aan OC, dan is de figuur voor ons doel volledig.

Nu is:

$$1^{\text{e}}. \quad OL = OI + IL.$$

$$\begin{aligned} \text{Maar} \quad OL &= OB \cos a = \cos a, \\ OI &= OH \cdot \cos b = OB \cos a \cdot \cos b = \cos a \cos b, \\ IL &= KG = HG \sin GHK, \end{aligned}$$

of, omdat wegens onderling loodrechten stand der beenen

$$\angle GHK = \angle AOC = b,$$

$$\text{en} \quad HG = BH \cos A = OB \sin c \cdot \cos A = \sin c \cdot \cos A,$$

$$\text{wordt} \quad IL = \sin b \sin c \cos A;$$

door substitutie volgt

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \dots \dots \dots (1)$$

zijnde de hoofdformule, op eene andere wijze dan in het begin dezer paragraaf uit de figuur afgeleid.

2^e. De rechthoekige driehoeken BHG en BLG geven:

$$BG = BH \sin A = BL \sin C$$

$$\text{of} \quad \sin c \sin A = \sin a \sin C \dots \dots \dots (2)$$

zijnde de sinus of modulus-formule.

$$3^{\text{e}}. \quad IH = IK + KH.$$

Hierin is

$$\begin{aligned} IH &= OH \sin b = \sin b \cos c \\ IK &= LG = BL \cos C = \sin a \cos C \\ KH &= GH \cos GHK = GH \cos b \\ &= BH \cos A \cos b = \cos b \sin c \cos A, \end{aligned}$$

derhalve

$$\sin b \cos c = \sin a \cos C + \cos b \cos c \cos A,$$

of door $\sin c$ deelende en $\frac{\sin a}{\sin c}$ door $\frac{\sin A}{\sin C}$ vervangende

$$\cot c \sin b = \sin A \cot C + \cos b \cos A \dots \dots \dots (3)$$

zijnde eene der cotangenten-formulen.

Passen wij nu de formules (1)—(3) toe op den pool-driehoek, waarvan de gelijknamige elementen door accenten zullen aangeduid worden, dan wordt

$$\begin{aligned} \cos a' &= \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A', \\ \sin c' \sin A' &= \sin a' \sin C', \\ \cot c' \sin b' &= \sin A' \cot C' + \cos b' \cos A', \end{aligned}$$

vervangende hierin, overeenkomstig de eigenschappen van den pool-driehoek (n°. 77), a' door $180^\circ - A$, A' door $180^\circ - a$, enz., dan wordt

$$\cos(180^\circ - A) = \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - C) + \sin(180^\circ - B) \sin(180^\circ - C) \cos(180^\circ - a),$$

$$\sin(180^\circ - C) \sin(180^\circ - a) = \sin(180^\circ - A) \sin(180^\circ - c),$$

$$\cot(180^\circ - C) \sin(180^\circ - B) = \sin(180^\circ - a) \cot(180^\circ - c) + \cos(180^\circ - B) \cos(180^\circ - a),$$

of $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \dots (4)$

$$\sin C \sin a = \sin A \sin c \dots (2)$$

$$\cot c \sin a = \sin B \cot C + \cos a \cos B \dots (3)$$

Op deze wijze is uit formule (1) eene formule (4) gevonden, formule (2) bleef onveranderd, formule (3) geeft eene andere formule van hetzelfde stelsel terug. Door behoorlijke verwisseling van letters verkrijgen wij derhalve het geheele stel der vijftien grondformulen.

§ XIV.

Formulen voor de rechthoekige driehoeken.

86. Is in een bolvormigen driehoek een der hoeken recht, dan zijn twee gegevens voldoende om den driehoek te bepalen. De formules, die de betrekkingen tusschen de elementen uitdrukken, mogen derhalve slechts drie grootheden bevatten, en daar vijf grootheden drie aan drie op tien wijzen kunnen gecombineerd worden, zal men voor de oplossing van alle gevallen tien formules moeten hebben. Deze kunnen gemakkelijk uit de grondformulen worden afgeleid door een der hoeken als recht aan te nemen.

Stellen wij in de formules (1)–(4) der vorige paragraaf $C = 90^\circ$, dan wordt c de hypothenusa, a en b zijn de rechthoekszijden, A en B de scheve hoeken.

De grondformulen, waarin A niet voorkomt, komen voor de rechthoekige driehoeken niet in aanmerking, omdat zij meer dan drie elementen bevatten.

De formules (1) geven nu

$$\cos c = \cos a \cos b \dots (5)$$

De formules (2) gaan over in

$$\left. \begin{aligned} \sin a &= \sin c \sin A \\ \sin b &= \sin c \sin B \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

De formules (3) worden

$$\begin{aligned} \cot a \sin b &= \cot A \\ \cot b \sin a &= \cot B \\ \cot c \sin a &= \cos a \cos B \\ \cot c \sin b &= \cos b \cos A, \end{aligned}$$

of:
$$\left. \begin{aligned} \tan a &= \sin b \tan A \\ \tan b &= \sin a \tan B \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan a &= \tan c \cos B \\ \tan b &= \tan c \cos A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

Eindelijk geven de formules (4)

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \cos a \sin B \\ \cos B &= \cos b \sin A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

en
$$\cos A \cos B = \sin A \sin B \cos c$$

of
$$\cos c = \cot A \cot B \dots \dots \dots (10)$$

waardoor de tien aangekondigde *grondformulen voor de rechthoekige driehoeken* gevonden zijn.

87. Voor dat wij tot de nadere beschouwing dezer formules overgaan, is het niet ondienstig aan te toonen hoe zij onafhankelijk van de oorspronkelijke grondformulen op zichzelf uit eene figuur kunnen gevonden worden.

Zij namelijk ABC (fig. 39) een bolvormige driehoek, die rechthoekig is in C en zij BE loodrecht op MA, BD loodrecht op MC, zoodat $\angle BED = A$ is. Nu volgt uit $\triangle MED$

$$ME = MD \cos b$$

of
$$\cos c = \cos a \cos b \dots \dots \dots (5)$$

In $\triangle BED$ is

$$BD = BE \sin A$$

of
$$\sin a = \sin c \sin A \dots \dots \dots (6)$$

en
$$BD = ED \tan A;$$

maar in $\triangle MED$ is

$$ED = MD \sin b = \cos a \sin b,$$

derhalve door substitutie in de voorgaande

$$\sin a = \cos a \sin b \tan A,$$

of
$$\tan a = \sin b \tan A \dots \dots \dots (7)$$

Eindelijk is nog

$$ED = BE \cos A;$$

Verder doen ons de voorgaande formules de volgende eigenschappen der rechthoekige bolvormige driehoeken kennen.

De hypothenusa zal scherp zijn, indien de rechthoekszijden of de scheve hoeken beide scherp of beide stomp, dat is, gelijksoortig zijn. De hypothenusa zal stomp zijn, indien de beide rechthoekszijden of de beide scheve hoeken ongelijksoortig zijn. Elke scheve hoek is van dezelfde soort als de overstaande rechthoekszijde, dat is, indien eene dezer zijden $< = \text{of} > 90^\circ$, zal ook de overstaande hoek $< = \text{of} > 90^\circ$ zijn, en omgekeerd.

89. Ziehier thans eene eenvoudige constructie, strekkende om met behulp van eene der zes hiervoren gevondene betrekkingen, de vijf overige spoedig te bekomen. Zij ABC (fig. 40) een rechthoekige bolvormige driehoek, waarvan elke der beide rechthoekszijden BC, AC kleiner dan een kwadrant ondersteld wordt. Uit B als pool beschrijve men een boog des grooten cirkels, snijdende de verlengde zijden des driehoeks in de drie punten a , b , C' , dan zal de hieruit ontstaande driehoek $AC'a$ rechthoekig in a zijn; voorts is $Aa = 90^\circ - AB$, $AC' = 90^\circ - AC$, $C'a = 90^\circ - B$ en $\angle C' = 90^\circ - BC$.

Men neme nu als bewezen aan de form. (6) $\sin a = \sin c \sin A$, en deze kiezen wij hiertoe bij voorkeur, uithoofde zij, wegens hare overeenkomst met die voor de vlakke rechthoekige driehoeken, het gemakkelijkst van alle overige in het geheugen te prenten is, dan zal in gemelden driehoek $AC'a$

$$\sin Aa = \sin AC' \cdot \sin C \quad \text{en} \quad \sin a C' = \sin AC' \cdot \sin A$$

$$\text{dat is} \quad \cos c = \cos a \cos b \quad \text{en} \quad \cos B = \cos b \sin A.$$

Om nu de drie overige formules te vinden, redenere men aldus. Uit de vergelijkingen

$$\sin a = \sin c \sin A, \quad \sin b = \sin c \sin B,$$

$$\text{volgt} \quad \sin b \sin A = \sin a \sin B.$$

$$\text{Maar} \quad \cos b \sin A = \cos B,$$

$$\text{derhalve} \quad tg b = \sin a tg B.$$

Passen wij [deze nieuwe betrekking wederom toe op elke rechthoekszijde van den driehoek $AC'a$, dan komt er

$$tg aC' = \sin Aa \cdot tg A \quad tg Aa = \sin a C' \cdot tg C'$$

$$\text{of wel} \quad \cot B = \cot c tg A \quad \cot c = \cos B \cot a$$

$$\text{dus} \quad \cos c = \cot A \cot B \quad tg a = tg c \cos B,$$

waardoor de ontbrekende formules gevonden zijn.

90. Behalve de voorgaande bestaat er nog eene andere, geheel verschillende handelwijze, om tot de oplossing van alle gevallen der rechthoekige driehoeken te geraken, en welke wij vermeend hebben hier insgelijks te moeten mededeelen, dewijl zij een geschikt hulpmiddel oplevert om de zes formules van n°. 81 in een enkelen regel te omvatten, en het geheugen alzoo te gemoet te komen.

ABC (fig. 41) zij namelijk een willekeurige rechthoekige driehoek. Men neme op den bol nog drie andere punten D, E, F, respectievelijk de polen voorstellende der bogen AC, AB, BC, dan is het duidelijk, vooreerst, dat de punten D en F in het verlengde der bogen CB, CA zullen liggen, en de bogen CF, CD elk een kwadrant zullen zijn. Vereenigt men nu de punten D, E, F door bogen van groote cirkels, en trekt men uit A dergelijke bogen naar E en D, welke noodzakelijk elk een kwadrant zullen zijn, dan zal het punt A de pool van den boog DE, en even zoo het punt B die van den boog EF zijn. Verder heeft men $\angle EAB = \angle DAC = 90^\circ$. Derhalve $\angle BAC = \angle EAD = \text{boog } ED$. Op gelijke wijze betoogt men dat $\angle ABC = \text{boog } EF$.

De bolvormige vijfhoek ABDEF is alzoo van dien aard, dat hij door drie op elkander volgende hoekpunten geheel bepaald wordt, dewijl de twee overige hoekpunten, zoo als uit de figuur terstond op te maken is, steeds de polen zijn der twee bogen, welke de drie gegevene hoekpunten naar rangorde vereenigen. Hieruit mag men besluiten, dat elke betrekking tusschen drie achtereenvolgende zijden des vijfhoeks, insgelijks van toepassing zal zijn op drie andere zijner zijden, elkander in gelijke rangorde opvolgende.

Dit opgemerkt hebbende, zoo neme men eene der tien formules (5)–(10), bijv. formule (6), als bewezen aan, en brenge deze op den vijfhoek over, wiens zijden blijkbaar van de vijf elementen des driehoeks afhankelijk zijn, dan zal, uithoofde in den driehoek ABC

$$\sin BC = \sin AB \sin A,$$

voor den vijfhoek

$$\cos BD = \sin AB \sin DE$$

zijn; welke betrekking aldus in woorden kan uitgedrukt worden:

De cosinus van eene der zijden des vijfhoeks is gelijk aan het product der sinussen van de beide aangrenzende zijden. (a)

Passen wij nu deze eigenschap op elke der overige vier zijden toe, hierbij acht gevende dat $DE = \angle A$, $FE = \angle B$, $BD = 90^\circ - a$ en $AF = 90^\circ - b$, dan verkrijgen wij achterevolgens:

$$\begin{array}{ll}
\cos DE = \sin BD \sin EF & \text{of} \quad \cos A = \cos a \sin B \\
\cos FE = \sin AF \sin DE & \gg \quad \cos B = \cos b \sin A \\
\cos FA = \sin AB \sin EF & \gg \quad \sin b = \sin c \sin B \\
\cos AB = \sin AF \sin BD & \gg \quad \cos c = \cos a \cos b ;
\end{array}$$

welke formules met de hiervoren gevondene (9), (5), (6), volkomen overeenstemmen. Uit den zoo even gevonden regel (a) laat zich thans een tweede afleiden, welke ons de vijf overige formules zal opleveren.

Men vermenigvuldige namelijk de beide voorgaande vergelijkingen

$$\begin{array}{l}
\cos BD = \sin AB \sin DE \\
\cos DE = \sin BD \sin EF
\end{array}$$

met elkander, dan geeft haar produkt

$$\cot BD \cot DE = \sin AB \sin EF = \cos AF;$$

welke vergelijking eene betrekking bevat tusschen eene zijde des vijfhoeks, en twee andere daarop niet onmiddellijk volgende of twee afgelegene zijden. Men kan die nieuwe betrekking aldus uitdrukken:

De cosinus van eene der zijden is gelijk aan het produkt der cotangenten van de beide afgelegene zijden. (b)

De toepassing daarvan op elke zijde des vijfhoeks zal achtereenvolgens geven:

$$\begin{array}{ll}
\cos AB = \cot DE \cot EF & \text{of} \quad \cos c = \cot A \cot B \\
\cos BD = \cot AF \cot FE & \gg \quad \sin a = \tan b \cot B \quad \text{of} \quad \tan b = \sin a \tan B \\
\cos DE = \cot AB \cot AF & \gg \quad \cos A = \cot c \tan b \quad \gg \quad \tan b = \tan c \cos A \\
\cos FE = \cot AB \cot BD & \gg \quad \cos B = \cot c \tan a \quad \gg \quad \tan a = \tan c \cos B \\
\cos AF = \cot BD \cot DE & \gg \quad \sin b = \tan a \cot A \quad \gg \quad \tan a = \sin b \tan A,
\end{array}$$

welke formules met (10), (7) en (8) geheel overeenstemmen.

Uit de beide voorgaande regels laat zich terstond het nuttige gebruik inzien, dat van den bedoelden vijfhoek te maken is bij de oplossing van de onderscheidene gevallen der rechthoekige driehoeken. Men behoeft namelijk slechts de drie elementen des driehoeks, waarvan twee tot de gegevens behooren, en de derde de onbekende is, in den vijfhoek over te brengen, en dan zal de eerste of tweede regel, naar dat de drie elementen al dan niet op elkander volgen, de formule opleveren, waardoor zich de onbekende zijde of hoek uit de beide gegeven elementen, laat berekenen.

Men kan echter, en deze opmerking is niet onbelangrijk, de beide hiervoren verkregen regels (*a*) en (*b*) in diervoege wijzigen, dat hun gebruik geheel onafhankelijk worde van de beschouwing des vijfhoek, zoodat zij hierdoor onmiddellijk op den driehoek zelven van toepassing te maken zijn. Te dien einde denke men zich de zijden en hoeken des driehoeks (den rechten hoek hierbij niet mede rekenende) in geregelde orde op elkander te volgen, dan zal het, uit de inzage der figuur, gemakkelijk blijken, dat de *aangrenzende* elementen of deelen in den driehoek, zullen overeenkomen met de *afgelegene* in den vijfhoek, en zoo ook omgekeerd, mits hierbij de twee rechthoekszijden door hare complementen vervangende. Bij samentrekking dezer beide regels ontstaat hieruit alsdan de navolgende enkele regel voor de oplossing van alle gevallen der rechthoekige driehoeken, welke, naar den wiskundige, die hem het eerst bekend maakte, de regel van NEPER genaamd wordt, te weten:

De cosinus van een der deelen of elementen des driehoeks is gelijk aan het produkt der sinussen van de afgelegene deelen, of gelijk aan dat der cotangenten van de aangrenzende deelen, mits hierbij voor elke rechthoekszijde haar complement nemende.

Van dezen vrij eenvoudigen regel, die gemakkelijk in het geheugen te prenten is, zal men zich steeds met vrucht kunnen bedienen, zoo dikwerf men in de oplossing van een der gevallen, de daartoe betrekkelijke formule niet meer voor den geest mocht hebben. Bij het gebruik daarvan zal men slechts behooren in acht te nemen, om de drie elementen, tusschen welke eene betrekking gezocht wordt, ten einde de onbekende uit de beide gegevens te kunnen berekenen, in diervoege te rangschikken, dat twee derzelve als *aangrenzende* of wel als *afgelegene* deelen ten aanzien van het derde of *middelste* deel te beschouwen zijn, hetgeen, zoo als uit het volgende tafeltje zal blijken, altijd mogelijk is; moettende hierbij, gelijk hiervoren reeds opgemerkt is, de rechte hoek niet mede gerekend, en voor de rechthoekszijden hare complementen genomen worden.

<i>Middelste deel.</i>	<i>Aangrenzende deelen.</i>	<i>Afgelegene deelen.</i>
<i>c.</i>	<i>A, E.</i>	<i>a, b.</i>
<i>b.</i>	<i>A, a.</i>	<i>c, B.</i>
<i>a.</i>	<i>B, b.</i>	<i>c, A.</i>
<i>A.</i>	<i>b c</i>	<i>a, B.</i>
<i>B.</i>	<i>a, c.</i>	<i>, A.</i>

§ XV.

Oplossing der rechthoekige driehoeken.

91. Volgens het geleerde in § XII moeten de hoeken eens bolvormigen driehoeks voldoen aan de voorwaarden

$$\begin{aligned} A + B + C &> 2R, \\ A + B - C &< 2R, \\ A - B + C &< 2R. \end{aligned}$$

Stellende hierin $C = R$, dan verkrijgt men als betrekkingen tusschen de scheve hoeken van een rechthoekigen driehoek

$$\begin{aligned} 3R &> A + B > R \\ A - B &< R, \end{aligned}$$

dat is in woorden: *de som der scheve hoeken moet gelegen zijn tusschen drie en één rechten hoek en het verschil kleiner zijn dan een rechte hoek.*

Zooals wij reeds hebben opgemerkt, is een rechthoekige driehoek door twee elementen behalve den rechten hoek bepaald. Derhalve kan de driehoek opgelost worden, wanneer gegeven zijn:

- 1^e. de hypothenusa en een scheve hoek.
- 2^e. de hypothenusa en eene rechthoekszijde.
- 3^e. de beide rechthoekszijden.
- 4^e. de beide scheve hoeken.
- 5^e. eene rechthoekszijde met den aangrenzenden scheven hoek.
- 6^e. eene rechthoekszijde met den overstaanden hoek.

Deze zes gevallen zullen wij achtereenvolgens gaan behandelen, daarbij telkens als bij de vlakke driehoeken de voorwaarden noemende waaraan de gegevens moeten voldoen, opdat de driehoek bestaanbaar zij, en bij elk geval een voorbeeld in getallen voegen. Slechts moet men in het oog houden om telkens die formules te kiezen, waardoor elk der onbekenden onmiddellijk in de gegevens wordt uitgedrukt.

I^e GEVAL.

Gegeven zijnde de hypothenusa c met een der scheve hoeken A, den anderen scheven hoek B, benevens de beide rechthoekszijden a en b te berekenen.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarden te voldoen.

Oplossing. Hiertoe gebruikt men de formules

$$\sin a = \sin c \sin A, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos A,$$

$$\cot B = \cos c \operatorname{tg} A.$$

Voorbeeld. Zij $c = 71^{\circ}24'30''$. $A = 105^{\circ}52'39''$.

Berekening.

$$\log \sin c = 9,9767235$$

$$\log \operatorname{tg} c = 0,4731759$$

$$\log \sin A = 9,9831068$$

$$\log \cos A = 9,4370868—$$

$$\log \sin a = 9,9598303$$

$$\log \operatorname{tg} b = 9,9102627—$$

$$a = 114^{\circ}15'54''$$

$$b = 140^{\circ}52'40''$$

De zijde a moet $> 90^{\circ}$, uithoofde $A > 90^{\circ}$.

De zijde b moet $> 90^{\circ}$, vermits $\operatorname{tg} b$ negatief is.

$$\log \cos c = 9,5035475$$

$$\log \operatorname{tg} A = 0,5460201—$$

$$\log \cot B = 0,0495676—$$

$$B = 138^{\circ}15'45'',4.$$

De hoek B moet $> 90^{\circ}$ zijn, vermits $\cot B$ negatief is, of ook uithoofde de zijde $b > 90^{\circ}$ is.

Uit de gevonden zijde a zou men de andere rechthoekszijde b insgelijks hebben kunnen berekenen door de formule

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}.$$

Aanmerking. Bijaldien de zijde a dicht bij 90° is, en alzoo uit haren sinus niet zeer nauwkeurig kan berekend worden, zal men de eerste formule de navolgende verandering doen ondergaan. Men heeft namelijk

$$\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \frac{1 - \sin c \sin A}{1 + \sin c \sin A}.$$

Zij $\operatorname{tg} \varphi = \sin c \sin A$, dan komt er

$$\operatorname{tg} (45^{\circ} - \tfrac{1}{2}a) = \pm \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi}} = \pm \sqrt{\operatorname{tg} (45^{\circ} - \varphi)};$$

zijnde alsnu $45^{\circ} - \tfrac{1}{2}a$ een kleine hoek. Het dubbele teeken voor de wortelgrootheid zal, even als in de voorgaande oplossing, twee verschillende waarden voor a opleveren, die elkanders supplementen zijn, en wier keuze door den overstaanden hoek A bepaald wordt.

II^e GEVAL.

Gegeven zijnde de hypotenusa c met eene rechthoekszijde a , de andere rechthoekszijde b , benevens de beide scherpe hoeken te berekenen.

Oplossing. De form. (5), (6) en (8) geven

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos B = \frac{tg a}{tg c}$$

Tot de bestaanbaarheid des driehoeks wordt gevorderd dat

$$\begin{aligned} c > a & \text{ indien } a \text{ en } c \text{ beide } < 90^\circ \\ c < a & \text{ „ } a \text{ en } c \text{ „ } > 90^\circ \\ c + a > 180^\circ, & \text{ „ } a > 90^\circ \text{ en } c < 90^\circ \\ c + a < 180^\circ, & \text{ „ } a < 90^\circ \text{ en } c > 90^\circ. \end{aligned}$$

Voorbeeld. Zij $c = 95^\circ 39' 20''$. $a = 72^\circ 25' 2''$.

Berekening.

$$\begin{aligned} \log \cos c &= 8,9936472 - & \log \sin a &= 9,9792214 \\ \log \cos a &= 9,4801269 & \log \sin c &= 9,9978808 \\ \log \cos b &= 9,5135203 - & \log \sin A &= 9,9813403 \\ b &= 109^\circ 2' 23'',8 & A &= 73^\circ 19' 27'',6 \\ \log tg a &= 0,4990943 \\ \log tg c &= 1,0042337 - \\ \log \cos B &= 9,4948606 - \\ B &= 180^\circ 12' 37'',5. \end{aligned}$$

Aanmerking. Uit de drie voorgaande formules kan men gemakkelijk nog de volgende afleiden.

$$\begin{aligned} tg \frac{1}{2} b &= \pm \sqrt{tg \frac{1}{2} (c + a) \cdot tg \frac{1}{2} (c - a)} \\ tg (45^\circ - \frac{1}{2} A) &= \pm \sqrt{\frac{tg \frac{1}{2} (c - a)}{tg \frac{1}{2} (c + a)}} \\ tg \frac{1}{2} B &= \pm \sqrt{\frac{\sin (c - a)}{\sin (c + a)}}, \end{aligned}$$

wier gebruik verkieslijk is, ingeval het onbekende element niet nauwkeurig genoeg uit zijn sinus of zijn cosinus kan berekend worden.

III^e GEVAL.

Gegeven zijnde de beide rechthoekszijden, te berekenen de hypothenusa, zoo mede elk der scheve hoeken.

Tusschen de gegevens bestaat geene voorwaarde.

Oplossing. De onbekenden zullen gevonden worden door de form. (5) en (7),

$$\cos c = \cos a \cos b. \quad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}. \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a}.$$

Voorbeeld. Zij $a = 76^{\circ}33'10''$. $b = 103^{\circ}18'30''$.

Berekening.

$$\begin{array}{rcl} \log \cos a & = & 9,3665155 \\ \log \cos b & = & 9,3620889 - \\ \log \cos c & = & 8,7286044 - \\ c & = & 93^{\circ}4'6'',9 \\ \log \operatorname{tg} b & = & 0,6260888 \\ \log \sin a & = & 9,9879273 \\ \log \operatorname{tg} A & = & 0,6332341 \\ A & = & 76^{\circ}54'4'',6 \\ \log \operatorname{tg} B & = & 0,6381615 - \\ B & = & 102^{\circ}57'21'',4. \end{array}$$

IV^e GEVAL.

Gegeven zijnde de beide scheve hoeken, te vinden de hypothenusa en de beide rechthoekszijden.

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden

$$270^{\circ} > A + B > 90^{\circ}, \quad A - B < \pm 90^{\circ}.$$

Oplossing. Hiertoe gebruikt men de formules (10) en (9),

$$\cos c = \cot A \cot B. \quad \cos a = \frac{\cos A}{\sin B}. \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin A}.$$

Voorbeeld. Zij $A = 97^{\circ}13'14'',9$. $B = 104^{\circ}45'20'',9$.

Men zal door toepassing der voorgaande formules vinden

$$c = 88^{\circ}5'14'',54. \quad a = 97^{\circ}28'6'',41. \quad b = 104^{\circ}52'35'',32.$$

Aanmerking. Ter berekening der zijde c zal men ook de volgende formule uit (10) kunnen afleiden:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \pm \sqrt{-\frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}}$$

Insgelijks geven de form. (9),

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{2} a &= \pm \sqrt{\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (A-B) + 45^\circ \right] \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (A+B) - 45^\circ \right]} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} b &= \pm \sqrt{\operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (B-A) + 45^\circ \right] \operatorname{tg} \left[\frac{1}{2} (A+B) - 45^\circ \right]};\end{aligned}$$

welke laatste formules eene toepassing vinden, ingeval eene der onbekende zijden eene geringe waarde heeft, en dus door zijn cosinus niet nauwkeurig te bepalen is.

V^e GEVAL.

Gegeven zijnde eene rechthoekszijde a met den aangrenzenden scheeven hoek B, de drie overige onbekende elementen te vinden.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen.

Oplossing. De form. (7), (8) en (9) geven

$$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} B. \quad \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos B}. \quad \cos A = \cos a \sin B.$$

Voorbeeld. Zij $a = 125^\circ 26' 40''$, $B = 95^\circ 10' 30''$.

Door toepassing der voorgaande formules zal men vinden

$$b = 96^\circ 20' 36'', \quad c = 86^\circ 19' 34'', \quad A = 125^\circ 16' 42'',$$

Aanmerking. Stellende $\cos a \sin B = \operatorname{tg} \varphi$, dan zal men ter berekening van den hoek A, ingeval deze eene geringe waarde heeft, nog de volgende formule verkrijgen:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\operatorname{tg} (45^\circ - \varphi)}.$$

VI^e GEVAL.

Gegeven zijnde eene rechthoekszijde a met den overstaanden hoek A, de drie overige onbekende elementen te vinden.

Oplossing. Hiertoe gebruikt men de formules (6), (7) en (9), gevende

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin A}, \quad \sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} A}, \quad \sin B = \frac{\cos A}{\cos a}.$$

Tot de bestaanbaarheid van den driehoek wordt gevorderd

1^o. dat de zijde a en de hoek A gelijksoortig zijn.

2°. dat $A >$ of $< a$ naar dat elk derzelven $<$ of $> 90^\circ$ is.

Dit zesde geval wordt het *twijfelachtige* bij de rechthoekige driehoeken genaamd, dewijl elk der drie onbekenden door zijn sinus bepaald wordende, voor twee verschillende waarden die elkanders supplementen zijn, vatbaar is; waaruit alzoo twee verschillende driehoeken moeten ontstaan, welke beiden met de gegevens overeenstemmen. Zulks kan nader aanschouwelijk gemaakt worden, met behulp van fig. 34, alwaar, in de onderstelling dat $\angle ABC$ recht is, BCA' den supplements-driehoek van den rechthoekigen driehoek ABC voorstelt, dezelve zijde a en een gelijken overstaanden hoek bezittende, terwijl de drie overige elementen b, c, C , respectivelijk de supplementen zijn van die in den driehoek ACB .

Bij het doen der keuzen tusschen de scherpe en stompe hoeken of zijden, zal men dienen te letten, om deze zoodanig met elkander te doen overeenstemmen, dat hierdoor aan de vereischten, ten slotte van n°. 88 vermeld, voldaan worde.

1e. *Voorbeeld.* Zij $A = 76^\circ 13' 24''$. $a = 24^\circ 14' 49''$, 06. Men zal vinden

$$\begin{aligned} c &= 25^\circ 0' 49'', 3. & b &= 6^\circ 20' 25'', 45. & B &= 15^\circ 8' 33'', 9 \\ \text{of } c &= 154^\circ 59' 10'', 7. & b &= 173^\circ 39' 34'', 55. & B &= 164^\circ 51' 26'', 1 \end{aligned}$$

2e. *Voorbeeld.* Zij $a = 93^\circ 21' 12''$. $A = 91^\circ 41' 17''$. Men zal vinden

$$\begin{aligned} c &= 87^\circ 6' 7'', 8. & b &= 149^\circ 48' 12'', 7. & B &= 149^\circ 45' 38'', 9 \\ \text{of } c &= 91^\circ 53' 42'', 2. & b &= 30^\circ 11' 47'', 3. & B &= 30^\circ 14' 21'', 1. \end{aligned}$$

Aanmerking. Voor het geval waarin een of meer der onbekende elementen weinig van 90° verschilt, zal men zich van de navolgende uit (6), (7) en (9) af te leiden formules kunnen bedienen.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (45^\circ - \tfrac{1}{2} c) &= \pm \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A - a)}{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A + a)}} \\ \operatorname{tg} (45^\circ - \tfrac{1}{2} b) &= \pm \sqrt{\frac{\sin (A - a)}{\sin (A + a)}} \\ \operatorname{tg} (45^\circ - \tfrac{1}{2} B) &= \pm \sqrt{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A + a) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (A - a)}. \end{aligned}$$

Men zal zich nu verdere oefening in de oplossing der rechthoekige driehoeken kunnen verschaffen, door elk der hiervoren uitgewerkte driehoeken, waarvan de vijf elementen thans bekend zijn, tot voorbeelden te nemen, en uit twee willekeurige elementen van elken driehoek de drie overige te berekenen.

92. Alvorens tot de behandeling der scheefhoekige driehoeken in het algemeen over te gaan, zullen wij nog eene bijzondere klasse van driehoeken, *rechtzijdige* genaamd, beschouwen, hebbende eene der zijden gelijk aan een kwadrant. Aangezien deze driehoeken ontstaan uit het construeren van den pooldriehoek eens rechthoekigen driehoeks, zoo zal men, naar aanleiding der in n°. 77 betoogde eigenschappen, de betrekkingen tusschen de elementen der rechtzijdige driehoeken, onmiddellijk uit die voor de rechthoekige kunnen afleiden, door slechts in de formules van n°. 86, de zijden en hoeken door hunne supplementen te vervangen, waardoor de cosinussen, tangenten en cotangenten negatief worden, en vervolgens de zijden in de hoeken, en wederkeerig, te veranderen. Zij dan ABC een rechtzijdige driehoek, waarin de zijde $AB = c = 90^\circ$, $AC = b$ en $BC = a$, dan bekomt men terstond de navolgende zes verschillende betrekkingen, op zoodanigen driehoek toepasselijk.

- I. $\cos C = -\cos A \cos B$
- II. $\cos C = -\cot a \cot b$
- III. $\sin A = \sin C \sin a$
- IV. $\operatorname{tg} A = \sin B \operatorname{tg} a$
- V. $\operatorname{tg} B = -\operatorname{tg} C \cos a$
- VI. $\cos a = \cos A \sin b$,

waaruit gelijksoortige gevolgtrekkingen kunnen afgeleid worden, als voor de rechthoekige driehoeken opgegeven zijn.

§ XVI.

Herleiding der grondformulen.

93. Het zal niet ondienstig zijn aan te toonen, hoe de algemeene grondformulen, uit die voor de rechthoekige kunnen worden afgeleid, even als in § XIV de laatsten uit de eersten zijn gevonden; en daar de formules voor de rechthoekige driehoeken ook op zich zelve aan de figuur zijn ontleend, verkrijgen wij op die wijze nog eene zelfstandige afleiding voor de algemeene formules.

Wanneer men door de ribbe MC van den drievlakkigen hoek M (fig. 33), een vlak denkt, loodrecht op het grondvlak AMB staande, en het oppervlak des bols snijdende volgens den boog CD (fig. 42), dan zal de driehoek ABC hierdoor in twee driehoeken ADC, BDC, elk rechthoekig in D zijnde, verdeeld worden. CD is alsdan een loodrechte boog, vallende op de zijde AB; en aangezien er op de

beide overige zijden AC, BC, eveneens soortgelijke bogen uit de overstaande hoekpunten kunnen worden neêrgelaten, zoo zal elke bolvormige driehoek, evenals een vlakke driehoek, op drie onderscheidene wijzen, in twee rechthoekige driehoeken kunnen verdeeld worden.

Volgens de aanwijzing onzer figuur valt de loodrechte boog CD binnen den driehoek. Zulks nu zal altijd moeten plaats vinden, indien de hoeken A en B beide scherp of beide stomp zijn, en wel uithoofde de rechthoekszijde CD gelijksoortig met elk dezer hoeken behoort te zijn. Wanneer echter die hoeken ongelijksoortig zijn, gelijk in fig. 43, alwaar A scherp en B stomp ondersteld is, dan zal het vlak van den loodrechten boog blijkbaar buiten of achter den driehoek liggen, en het verlengde der basis AB in twee punten D en D' op 180° afstand van elkander slijden. In dat geval bestaan er alzoo twee loodrechte bogen, waarvan de kortste CD achter den stompen hoek B, en de langste achter den scherp hoek A zal gelegen zijn. Immers, in den rechthoekigen driehoek BCD, is $B < 90^\circ$, dus $CD < 90^\circ$ en $CD' > 90^\circ$. Bepaalt men zich echter tot den kleinsten loodrechten boog, zoo mag men tot regel aannemen, dat bij ongelijksoortige hoeken aan de basis, de loodrechte boog steeds achter den stompen hoek valt.

Voegen wij hierbij nog de opmerking dat ook in het geval van gelijksoortigheid der hoeken A en B, de loodrechte boog CD (fig. 42) tot op den cirkel waartoe de boog AB behoort, kan verlengd worden, zoodat er insgelijks twee loodrechte bogen uit C kunnen worden neêrgelaten, doch het is duidelijk dat die tweede boog alsdan tot een driehoek behoort, hebbende eene zijner zijden $> 180^\circ$, en alzoo buiten beschouwing blijft.

Men noeme weder de zijden, staande over de hoeken A, B, C, respectivelijk a, b, c ; de deelen, waarin de hoek C door den loodrechten boog verdeeld wordt, P, Q; de overstaande segmenten van AB, p, q ; en eindelijk den gemelden boog φ . Volgens form. (5), heeft men in de beide rechthoekige driehoeken ACD, BCD

$$\sin \varphi = \sin b \sin A. \quad \sin \varphi = \sin a \sin B.$$

Derhalve $\sin a : \sin b = \sin A : \sin B \dots \dots \dots (2).$

waardoor de sinus-formule terug is gevonden.

Verder is volgens formule (5) in dezelfde rechthoekige driehoeken

$$\cos \varphi = \frac{\cos b}{\cos p} = \frac{\cos a}{\cos q},$$

dus $\cos a = \frac{\cos b \cos q}{\cos p} = \frac{\cos b \cos (c-p)}{\cos p}$

dat is, na ontwikkeling van $\cos(c - p)$,

$$\cos a \doteq \cos b \cos c + \cos b \sin c \tan p.$$

Nu is in ΔACD

$$\text{tang } p = \text{tang } b \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

derhalve

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zijnde de hoofdtormule.

Voorts volgt uit dezelfde driehoeken door toepassing der formules (7):

$$\text{tang } \varphi = \text{tang } A \sin p = \text{tang } B \sin q$$

dus

$$\begin{aligned} \tan A \cot B &= \frac{\sin q}{\sin p} = \frac{\sin(c-p)}{\sin p} \\ &= \sin c \cot p - \cos c, \end{aligned}$$

dat is, volgens (a)

$$\text{tang A cot B} = \frac{\sin c \cot b}{\cos A} - \cos c$$

of

$$\cot b \sin c = \sin A \cot B + \cos c \cos A \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zijnde eene der cotangenten-formulen.

Eindelijk is nog volgens (3)

$$\cos \varphi = \frac{\cos A}{\sin P} = \frac{\cos B}{\sin Q}$$

dus

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\sin P}{\sin Q} \cos B = \frac{\sin(C-Q)}{\sin Q} \cos B \\ &= -\cos B \cos C + \cos B \sin C \cot Q. \end{aligned}$$

Maar in $\triangle DCB$, $\cot Q = \cos a \tan B$ zijnde, wordt

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad . \quad . \quad (4)$$

Zoodat nu, na behoorlijke verwisseling van letters, alle grondformulen terug zijn gevonden.

94. De formule (2) kan dienen om een hoek uit te drukken in de drie zijden.

Door oplossing van $\cos A$ volgt namelijk:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

doch het is duidelijk, dat deze formule niet geschikt is voor de berekening met logaritmen en daarom hiertoe behoort herleid te worden. Dit geschiedt op de volgende wijze.

Uit (11) volgt

$$1 - \cos A = \frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{\cos(b-c) - \cos a}{\sin b \sin c}$$

$$1 + \cos A = \frac{\sin b \sin c - \cos b \cos c + \cos a}{\sin b \sin c} = \frac{-\cos(b+c) + \cos a}{\sin b \sin c};$$

of, volgens de formule

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha),$$

daarbij gebruik makende van de formules (31) § III,

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b-c) \sin \frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b \sin c},$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(-a+b+c)}{\sin b \sin c}.$$

Stellende ter bekorting

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2s \\ \text{derhalve} \quad a+b-c &= 2(s-c) \text{ enz.,} \\ \text{wordt} \quad \sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12) \end{aligned}$$

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Door deeling en vermenigvuldiging volgt hieruit

$$\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)} \quad . \quad . \quad (15)$$

door verwisseling van letters verkrijgt men overeenkomstige uitdrukkingen voor de hoeken B en C.

Treffend is de gelijkvormigheid der formules (12) — (15) met die, welke voor de berekening der hoeken uit de zijden eens vlakken driehoeks in § VIII zijn gevonden.

Ter bepaling van eene der zijden a uit drie hoeken, heeft men volgens (4) de formule

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C} \dots \dots \dots (16)$$

welke vatbaar is om op dezelfde wijze als (11) voor de logarithmische berekening geschikt gemaakt te worden, hetgeen wij den lezer als oefening overlaten. Zulks kan echter ook even goed geschieden, door de formules (12) — (15) onmiddellijk op den pool-driehoek toe te passen. In dat geval zal $\frac{1}{2} A$ in $90^\circ - \frac{1}{2} a$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a + b + c) &\text{ in } 270^\circ - \frac{1}{2} (A + B + C) \\ \frac{1}{2} (a + b - c) &\text{ in } 90^\circ - \frac{1}{2} (A + B - C) \text{ enz.} \end{aligned}$$

overgaan. Stellende nu

$$A + B + C = 2S,$$

dan vindt men

$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}} \\ \sin \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \\ \tan \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos (S-B) \cos (S-C)}{\cos S \cos (S-A)}} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

Handwritten note: $\tan \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}}$

$$\sin a = \frac{2}{\sin B \sin C} \sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}$$

overeenkomstige formules kunnen voor de zijden b en c door verwisseling van letters gevonden worden.

Hoewel de vormen onder het wortelteeken in de drie laatste formules met het negatieve teeken zijn aangedaan, zijn de wortelgrootheden toch bestaanbaar. Want $\cos S$ is altijd negatief, omdat $2S = A + B + C > 2R$, derhalve $S > R$ is; evenzoo zijn $\cos (S - A)$, $\cos (S - B)$, $\cos (S - C)$ steeds positief, omdat

$$2(S - A) = B + C - A < 2R$$

derhalve $S - A < R$

hetgeen evenzoo met de andere grootheden het geval is.

95. Uit de formules, die de hoeken in de zijden uitdrukken, kunnen nog andere merkwaardige betrekkingen afgeleid worden.

Volgens (12) en (13) is :

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, & \sin \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}, \\ \cos \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, & \cos \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}.\end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B &= \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin(s-b)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C, \\ \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B &= \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin(s-a)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C, \\ \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B &= \frac{\sin s}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin s}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C, \\ \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B &= \frac{\sin(s-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}} = \frac{\sin(s-c)}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C.\end{aligned}$$

Door behoorlijke optelling en aftrekking ontstaat hieruit

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2} (A+B) &= \frac{\sin(s-b) + \sin(s-a)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C = \\ &= \frac{2 \sin \left\{ s - \frac{1}{2} (a+b) \right\} \cos \frac{1}{2} (a-b)}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C, \\ \sin \frac{1}{2} (A-B) &= \frac{\sin(s-b) - \sin(s-a)}{\sin c} \cos \frac{1}{2} C = \\ &= \frac{2 \cos \left\{ s - \frac{1}{2} (a-b) \right\} \sin \frac{1}{2} (a-b)}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C, \\ \cos \frac{1}{2} (A+B) &= \frac{\sin s - \sin(s-c)}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C = \\ &= \frac{2 \cos(s - \frac{1}{2} c) \cos \frac{1}{2} c}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C, \\ \cos \frac{1}{2} (A-B) &= \frac{\sin s + \sin(s-c)}{\sin c} \sin \frac{1}{2} C = \\ &= \frac{2 \sin(s - \frac{1}{2} c) \sin \frac{1}{2} c}{2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C;\end{aligned}$$

of, omdat $s - \frac{1}{2} (a+b) = \frac{1}{2} c$, $s - \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} (a+b)$

$$\sin \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C, \quad (18)$$

$$\sin \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C, \quad (19)$$

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C, \quad (20)$$

$$\cos \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b)}{\sin \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C. \quad (21)$$

Deze vier formules, welke even zoo vele betrekkingen bevatten tusschen de zes elementen des driehoeks, zijn in de bolvormige driehoeksmeting bekend onder den naam van formules van GAUSS, ofschoon zij, met meer recht, die van DELAMBRE behoorden genaamd te worden *).

96. Uit de formules (18) — (21) kunnen door onderlinge deeling, niet minder merkwaardige betrekkingen afgeleid worden.

Deelt men namelijk (18) door (20) en (19) door (21), dan volgt :

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2} (A + B) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C \\ \tan \frac{1}{2} (A - B) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C \end{aligned} \right\} . . . (22)$$

Deelt men daarentegen (21) door (20) en (19) door (18), dan verkrijgt men na eene kleine omzetting

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2} (a + b) &= \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \tan \frac{1}{2} c \\ \tan \frac{1}{2} (a - b) &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \tan \frac{1}{2} c \end{aligned} \right\} . . . (23)$$

De formules (22) en (23) zijn algemeen bekend onder den naam van *Neperiaansche analogiën* en spelen eene belangrijke rol bij de oplossing van vraagstukken uit de bolvormige driehoeksmeting, zooals later zal blijken.

Reeds de naam duidt aan, dat de Neperiaansche analogiën van ouder dagteekening zijn dan de formules van GAUSS, zoodat zij

*) GAUSS heeft die formules voor het eerst doch zonder betoog bekend gemaakt in zijn beroemd werk *Theoria motus corporum coel.* 1809. Zij waren echter reeds door DELAMBRE medegedeeld in de *Connaiss. des tems* over 1803, en zijn vervolgens door hem op eene vrij omslachtige wijze betoogd in zijn *Traité d'astronomie*, Tom. I, pag. 160.

onafhankelijk van deze moeten gevonden kunnen worden. Deze afleiding kan op de volgende wijze geschieden.

Volgens formule (b) n°. 83 is

$$\cos a \sin b = \sin a \cos b \cos C + \sin c \cos A,$$

evenzoo $\cos b \sin a = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B.$

Door optelling volgt hieruit

$$(\sin a \cos b + \cos a \sin b) (1 - \cos C) = \sin c (\cos A + \cos B)$$

of $\sin c (\cos A + \cos B) = \sin (a + b) (1 - \cos C) \quad . \quad . \quad (c)$

Verder volgt uit de sinusformule

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$

$$\sin c \sin B = \sin b \sin C$$

derhalve

$$\sin c (\sin A \pm \sin B) = (\sin a \pm \sin b) \sin C \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Deelt men nu (d) door (c), achtereenvolgens het bovenste en onderste teeken nemende, dan wordt:

$$\frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin a + \sin b}{\sin (a + b)} \cdot \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

$$\frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = \frac{\sin a - \sin b}{\sin (a + b)} \cdot \frac{\sin C}{1 - \cos C},$$

of, volgens meermalen toegepaste goniometrische formules:

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} (A-B)}{2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} (A-B)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} (a+b) \cos \frac{1}{2} (a-b)}{2 \sin \frac{1}{2} (a+b) \cos \frac{1}{2} (a+b)} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin^2 \frac{1}{2} C},$$

$$\frac{2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \sin \frac{1}{2} (A-B)}{2 \cos \frac{1}{2} (A+B) \cos \frac{1}{2} (A-B)} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} (a+b) \sin \frac{1}{2} (a-b)}{2 \sin \frac{1}{2} (a+b) \cos \frac{1}{2} (a+b)} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}{2 \sin^2 \frac{1}{2} C},$$

derhalve na vereenvoudiging

$$\tan \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C,$$

$$\tan \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C,$$

waardoor de beide eerste Neperiaansche analogiën terug zijn gevonden. Het zal den lezer niet moeielijk vallen de beide anderen op overeenkomstige wijze af te leiden, terwijl zij ook ontstaan wanneer men op de bovenstaande den pooldriehoek toepast.

97. Ook de sinusformule kan nog eene herleiding ondergaan. Uit de evenredigheid

$$\sin a : \sin b = \sin A : \sin B$$

volgt namelijk

$$\sin a - \sin b : \sin a + \sin b = \sin A - \sin B : \sin A + \sin B,$$

of volgens bekende goniometrische betrekkingen (zie form. (57) § III),

$$\tan \frac{1}{2}(a - b) : \tan \frac{1}{2}(a + b) = \tan \frac{1}{2}(A - B) : \tan \frac{1}{2}(A + B). \quad (24)$$

Deze formule heeft groote overeenkomst met de formule (8) § VIII uit de vlakke driehoeksmeting, doch is niet van dezelfde uitgestrekte toepassing, omdat hier niet als daar uit de som van twee der hoeken de derde bekend wordt.

98. Ten slotte deelen wij hier nog eenige fraaie formules mede voor de waarde van den modulus M.

Vooreerst heeft men uit de vergelijking (a) § XIII:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b}, \\ M &= \frac{\sin A + \sin B}{\sin a + \sin b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)}, \\ M &= \frac{\sin A - \sin B}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B) \cos \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}(a + b)}. \end{aligned}$$

Verder bekomt men met behulp der form. (15)

$$M = \frac{2\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}}{\sin a \sin b \sin c} = \frac{P}{\sin a \sin b \sin c},$$

Evenzoo geven de form. (17)

$$M = \frac{\sin A \sin B \sin C}{2\sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}} = \frac{\sin A \sin B \sin C}{P'},$$

$$\begin{aligned} \text{waarin} \quad P &= 2\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}, \\ P' &= 2\sqrt{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)}. \end{aligned}$$

$$\text{Hieruit volgt} \quad M^2 = \frac{P}{P'} \times M^2 \quad \text{of} \quad M = \frac{P}{P'}.$$

Uit de formules (18) en (20)

$$\sin \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} c} \cos \frac{1}{2} C$$

$$\cos \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} c} \sin \frac{1}{2} C,$$

vindt men gemakkelijk

$$\frac{\sin (A + B)}{\sin C} = \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}$$

$$\frac{\sin (A + B) + \sin C}{\sin C} = \frac{2 \sin S \cos (S - C)}{\sin C} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{2 \cos^2 \frac{1}{2} c}.$$

Verder volgt uit (18) en (20) door de eerste met $\sin \frac{1}{2} C$, de tweede met $\cos \frac{1}{2} C$ te vermenigvuldigen en het verschil der produkten te nemen

$$\cos S = - \frac{P}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

en $\cos (S - C) = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c},$

gevende $\cos S \cos (S - C) = \frac{-P \sin C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} c}.$

Deze vergelijking deelende in de hiervoren gevonden, namelijk

$$\sin S \cos (S - C) = \left(\frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cos^2 \frac{1}{2} c} \right) \sin C$$

komt er $tg S = - \left(\frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{P} \right)$

welke, met toepassing op elk der drie supplements-driehoeken, daarenboven geeft

$$tg (S - A) = \frac{1 + \cos a - \cos b - \cos c}{P}$$

$$tg (S - B) = \frac{1 + \cos b - \cos a - \cos c}{P}$$

$$tg (S - C) = \frac{1 + \cos c - \cos a - \cos b}{P},$$

waaruit tevens door optelling en aftrekking af te leiden is:

$$tg (S - A) + tg (S - B) + tg (S - C) - tg S = \frac{4}{P}.$$

De vijf laatste vergelijkingen op den pooldriehoek van toepassing gemaakt, geven nog de volgende:

$$\begin{aligned}\cot s &= \frac{\cos A + \cos B + \cos C - 1}{P'} \\ \cot(s-a) &= \frac{1 + \cos B + \cos C - \cos A}{P'} \\ \cot(s-b) &= \frac{1 + \cos A + \cos C - \cos B}{P'} \\ \cot(s-c) &= \frac{1 + \cos A + \cos B - \cos C}{P'} \\ \cot(s-a) + \cot(s-b) + \cot(s-c) - \cot s &= \frac{4}{P'}.\end{aligned}$$

Derhalve

$$M = \frac{\operatorname{tg}(S-A) + \operatorname{tg}(S-B) + \operatorname{tg}(S-C) - \operatorname{tg} S}{\cot(s-a) + \cot(s-b) + \cot(s-c) - \cot s}.$$

Men kan in de aangehaalde formules voor $\cos S$, $\cos(S-A)$ enz. nog de volgende veranderingen brengen, waaruit nieuwe uitdrukkingen voor den modulus M zullen ontstaan.

Schrijvende namelijk in elke dezer formules, voor P zijne waarde $M \sin a \sin b \sin c$, dan gaan zij over in

$$\begin{aligned}\cos S &= -2 M \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c \\ \cos(S-A) &= 2 M \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c \\ \cos(S-B) &= 2 M \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c \\ \cos(S-C) &= 2 M \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b,\end{aligned}$$

welke formules, bij toepassing op den pooldriehoek, als wanneer M in $\frac{1}{M}$ overgaat, het navolgende stelsel opleveren

$$\begin{aligned}\sin s &= \frac{2}{M} \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C \\ \sin(s-a) &= \frac{2}{M} \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \\ \sin(s-b) &= \frac{2}{M} \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C \\ \sin(s-c) &= \frac{2}{M} \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B.\end{aligned}$$

De som der vergelijkingen van het eerste stelsel geeft, na eenige herleiding:

$$2M \sin s = \cos S + \cos (S - A) + \cos (S - B) + \cos (S - C)$$

of
$$M = \frac{\cos S + \cos (S - A) + \cos (S - B) + \cos (S - C)}{2 \sin s},$$

uit welke formule, na haar op elk der supplements-driehoeken toegepast te hebben, nog de drie navolgende uitdrukkingen voor M ontstaan

$$M = \frac{\cos (S - B) + \cos (S - C) - \cos (S - A) - \cos S}{2 \sin (s - a)}$$

$$M = \frac{\cos (S - A) + \cos (S - C) - \cos (S - B) - \cos S}{2 \sin (s - b)}$$

$$M = \frac{\cos (S - A) + \cos (S - B) - \cos (S - C) - \cos S}{2 \sin (s - c)}$$

waaruit weder met behulp van den pooldriehoek de navolgende verkregen worden:

$$\cos S = \frac{M}{2} \{ \sin s - \sin (s - a) - \sin (s - b) - \sin (s - c) \}$$

$$\cos (S - A) = \frac{M}{2} \{ -\sin (s - a) + \sin (s - b) + \sin (s - c) + \sin s \}$$

$$\cos (S - B) = \frac{M}{2} \{ -\sin (s - b) + \sin (s - a) + \sin (s - c) + \sin s \}$$

$$\cos (S - C) = \frac{M}{2} \{ -\sin (s - c) + \sin (s - a) + \sin (s - b) + \sin s \}$$

Deze laatste vergelijkingen in het vierkant brengende, zoo bekomt men, na eene lichte herleiding,

$$M^2 = \frac{\cos^2 S + \cos^2 (S - A) + \cos^2 (S - B) + \cos^2 (S - C)}{\sin^2 s + \sin^2 (s - a) + \sin^2 (s - b) + \sin^2 (s - c)}.$$

Behalve de voorgaande bestaan er nog verscheidene andere merkwaardige betrekkingen tusschen de zes elementen eens bolvormigen driehoeks, waaromtrent men met vrucht kan raadplegen, eene belangrijke bijdrage van den heer BRETSCHNEIDER, voorkomende in het XII^e deel van het *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

§ XVII.

Oplossing der scheefhoekige driehoeken.

99. Even als bij de rechthoekige driehoeken heeft men voor de

scheefhoekige zes verschillende gevallen van oplossing. De gegevens kunnen namelijk zijn:

- 1^e. Drie zijden.
- 2^e. Drie hoeken.
- 3^e. Twee zijden en de tusschen gelegen hoek.
- 4^e. Twee hoeken en de tusschen gelegen zijde.
- 5^e. Twee zijden en een hoek over eene van deze zijden.
- 6^e. Twee hoeken en eene zijde over een dezer hoeken.

Achtereenvolgens zullen wij deze gevallen behandelen, bij elk naar gewoonte de voorwaarden van bestaanbaarheid en een voorbeeld in getallen voegen. Eigenlijk zou men slechts drie gevallen, het 1^e, 3^e en 5^e, behoeven op te lossen, omdat de overige door den pooldriehoek onmiddellijk tot een van dezen kunnen herleid worden. Doch het is beter en nauwkeuriger om elk geval op zich zelf te beschouwen.

Bij elk geval zullen wij als eerste oplossing de formules zoeken en behandelen, die tusschen elk der onbekende elementen en de gegevens bestaan, en deze formules zijn altijd te vinden, omdat alle combinaties van vier elementen in de vijftien grondformules voorkomen. Als verdere oplossingen zullen wij nagaan, of er korter of eenvoudiger wegen bestaan om de waarde der onbekende elementen op te sporen.

I^e GEVAL.

Gegeven zijnde de drie zijden a, b, c, de drie onbekende hoeken te vinden.

De gegevens moeten voldoen aan de voorwaarden, dat hunne som kleiner is dan 360° en de som van elke twee grooter dan de derde.

1^e *Oplossing.* De grondformules, die de betrekking tusschen elk der onbekenden en de gegevens uitdrukken, zijn het stelsel (1), § XIII, namelijk

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.\end{aligned}$$

Hoe hieruit de hoek opgelost en de formule herleid kan worden, is reeds in de vorige paragraaf aangetoond. Daar hebben wij de volgende formules, die de hoeken in de zijden uitdrukken, verkregen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin b \sin c}}, \\ \sin \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin a \sin c}}, \\ \sin \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin a \sin b}}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \cos \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}, \\ \cos \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}, \\ \tan \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}, \\ \tan \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}, \\ \sin B &= \frac{2}{\sin a \sin c} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}, \\ \sin C &= \frac{2}{\sin a \sin b} \sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)} \end{aligned} \right\}$$

Aangaande deze vier stelsels formules, waarvan elk voor de berekening der hoeken kan dienen, gelden dezelfde opmerkingen als bij de formules die in het Ie Geval der rechtlijnige scheefhoekige driehoeksmeting voor de berekening der hoeken zijn gevonden, zoo-dat ook hier het derde stelsel de voorkeur verdient wanneer de drie hoeken gevraagd worden, doch eene formule der beide eerste stelsels, wanneer de kennis van slechts één hoek noodig is. Het vierde stelsel is minder geschikt, omdat het kwadrant der hoeken onbepaald blijft; toch hebben deze formules haar nut, zooals in de toepassingen zal blijken.

Men zou ook hier een der hoeken door een der bovenstaande formules kunnen berekenen, en vervolgens de beide anderen door de sinusformule, doch dit is niet te verkiezen, omdat de bewerking niet korter is en niet elk der onbekenden onmiddellijk uit de gegevens berekend wordt.

2e Oplossing. Uit de gegevens kunnen eerst de stukken p en q (fig. 42) berekend worden, waarin de basis door de loodlijn uit den top wordt verdeeld. Men heeft toch (n°. 93)

$$\cos \varphi = \frac{\cos b}{\cos p} = \frac{\cos a}{\cos q},$$

derhalve

$$\frac{\cos a - \cos b}{\cos a + \cos b} = \frac{\cos q - \cos p}{\cos q + \cos p},$$

of, volgens eene bekende goniometrische transformatie-formule ((56) § III):

$\tan \frac{1}{2}(a-b) \tan \frac{1}{2}(a+b) = \tan \frac{1}{2}(q-p) \tan \frac{1}{2}(p+q)$
gevende, omdat $p+q=c$,

$$\tan \frac{1}{2}(q-p) = \frac{\tan \frac{1}{2}(a+b) \tan \frac{1}{2}(a-b)}{\tan \frac{1}{2}c}$$

$$p = \frac{c}{2} + \frac{p-q}{2}, \quad q = \frac{c}{2} - \frac{p-q}{2},$$

waardoor p en q kunnen berekend worden. Hieruit vindt men vervolgens de hoeken A en B door de formules

$$\tan p = \tan b \cos A, \quad \tan q = \tan a \cos B,$$

dus $\cos A = \frac{\tan p}{\tan b}, \quad \cos B = \frac{\tan q}{\tan a},$

eindelijk wordt C gevonden uit

$$\sin C = \frac{\sin c}{\sin a} \sin A = \frac{\sin c}{\sin b} \sin B.$$

Deze formule geeft twee waarden voor C, waartusschen de keus bepaald wordt door de opmerking, dat over een grooter zijde een grooter hoek moet gelegen zijn.

Voorbeeld. Zij $a = 76^{\circ}35'36''$, $b = 50^{\circ}10'30''$ en $c = 40^{\circ}0'10''$.

Volgens de 1^e oplossing.

$a = 76^{\circ}35'36''$	
$b = 50 \ 10 \ 30$	
$c = 40 \ 0 \ 10$	
$2s = 166 \ 46 \ 16$	
$s = 83 \ 23 \ 8$	$\log \sin s = 9,9970996$
$s-a = 6 \ 47 \ 32$	$\log \sin (s-a) = 9,0728716$
$s-b = 33 \ 12 \ 38$	$\log \sin (s-b) = 9,7385565$
$s-b = 43 \ 22 \ 58$	$\log \sin (s-c) = 9,8368740$
$\log \sin (s-b) = 9,7385565$	$\log \sin (s-a) = 9,0728716$
$\log \sin (s-c) = 9,8368740$	$\log \sin (s-c) = 9,8368740$
$C \log \sin (s-a) = 0,9271284$	$C \log \sin (s-b) = 0,2614435$
$C \log \sin = 0,0029004$	$C \log \sin s = 0,0029004$
$\hline 0,5054593$	$\hline 9,1740895$
$2 \quad \hline$	$2 \quad \hline$
$\log \tan \frac{1}{2} A = 0,2527296$	$\log \tan \frac{1}{2} B = 9,5870447$
$\frac{1}{2} A = 60^{\circ}48'9'',9$	$\frac{1}{2} B = 21^{\circ}7'36'',8$
$A = 121^{\circ}36'19'',8$	$B = 42^{\circ}15'13'',6$

$$\begin{aligned}
 \log \sin (s-a) &= 9,0728716 \\
 \log \sin (s-b) &= 9,7385565 \\
 C \log \sin (s-c) &= 0,1631260 \\
 C \log \sin s &= 0,0029004 \\
 \hline & \text{opg.} \\
 & 8,9774545 \\
 & \underline{2} \\
 \log \tan \frac{1}{2} C &= 9,4887272 \\
 \frac{1}{2} C &= 17^{\circ} 7'31'',4 \\
 C &= 34^{\circ}15' 2'',8
 \end{aligned}$$

Volgens de 2^e oplossing.

$$\begin{aligned}
 a &= 76^{\circ}35'36'' \\
 b &= 50 10 30 \\
 a+b &= \underline{126 46 6} & \frac{1}{2}(a+b) &= 63^{\circ}23' 3'' & l \, \text{tg } 0,3000683 \\
 a-b &= \underline{26 25 6} & \frac{1}{2}(a-b) &= 13 12 33 & l \, \text{tg } 9,3705440 \\
 c &= 40 0 10 & \frac{1}{2}c &= 20 0 5 & l \, \cot 0,4389014 \\
 & & l \, \text{tg } \frac{1}{2}(q-p) &= \underline{0,1095137} \\
 & & \frac{1}{2}(q-p) &= \underline{52^{\circ}8'55''} \\
 & & \frac{1}{2}c &= \underline{20 0 5} \\
 & & q &= +72 9 0 \\
 & & p &= -32 8 50 \\
 \\
 l \, \text{tg } p &= 9,7983693 - & l \, \text{tg } q &= 0,4921067 \\
 l \, \cot b &= 9,9211182 & l \, \cot a &= 9,3772271 \\
 l \, \cos A &= 9,7193875 - & l \, \cos B &= 9,8693338 \\
 A &= 121^{\circ}36'19'',8 & B &= 42^{\circ}15'13'',6 \\
 \\
 l \, \sin A &= 9,9302747 & l \, \sin B &= 9,8276379 \\
 l \, \sin c &= 9,8080926 & l \, \sin c &= 9,8080926 \\
 & & & \underline{9,6357305} \\
 l \, \sin a &= 9,9880008 & l \, \sin b &= 9,8853636 \\
 l \, \sin C &= 9,7503665 & l \, \sin C &= 9,7503669 \\
 C &= 34^{\circ}15'2'',8 & C &= 34^{\circ}15'2'',9.
 \end{aligned}$$

De hoek C moet scherp genomen worden, dewijl $c < a$ zijnde, ook $C < A$ zal zijn.

Het negatieve teeken van het segment p duidt aan, dat de loodrechte boog CD buiten den driehoek, achter den stompen hoek A valt.

II^e GEVAL.

Gegeven zijnde de drie hoeken A, B, C, te berekenen de drie zijden.

De voorwaarden van bestaanbaarheid zijn, dat de som der hoeken grooter dan 180° , en de som van elke twee verminderd met den derden, kleiner dan 180° moet zijn.

1^e *Oplossing.* De grondformulen voor dit geval zijn het stelsel (4), namelijk

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,\end{aligned}$$

gevende volgens de herleidingen der vorige paragraaf:

$$\left. \begin{aligned}\sin \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\sin B \sin C}} \\ \sin \frac{1}{2} b &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\sin A \sin C}} \\ \sin \frac{1}{2} c &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\sin A \sin B}}\end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned}\cos \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{\cos (S-B) \cos (S-C)}{\sin B \sin C}} \\ \cos \frac{1}{2} b &= \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-C)}{\sin A \sin C}} \\ \cos \frac{1}{2} c &= \sqrt{\frac{\cos (S-A) \cos (S-B)}{\sin A \sin B}}\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}\tan \frac{1}{2} a &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-A)}{\cos (S-B) \cos (S-C)}} \\ \tan \frac{1}{2} b &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-B)}{\cos (S-A) \cos (S-C)}} \\ \tan \frac{1}{2} c &= \sqrt{\frac{-\cos S \cos (S-C)}{\cos (S-A) \cos (S-B)}}\end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}\sin a &= \frac{2}{\sin B \sin C} \sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)} \\ \sin b &= \frac{2}{\sin A \sin C} \sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)} \\ \sin c &= \frac{2}{\sin A \sin B} \sqrt{-\cos S \cos (S-A) \cos (S-B) \cos (S-C)}\end{aligned} \right\}$$

Elk dezer stelsels kan dienen voor de berekeningen; de keus wordt als in het voorgaande geval bepaald. Ook kan men, een hoek gevonden hebbende, de beide anderen door de sinusformule berekenen.

2^e *Oplossing*. Uit de gegevens kunnen eerst de deelen P en Q berekend worden, waarin de hoek C door de loodlijn op de basis wordt verdeeld. Men heeft toch

$$\cos \rho = \frac{\cos A}{\sin P} = \frac{\cos B}{\sin Q}$$

gevende

$$\frac{\cos A - \cos B}{\cos A + \cos B} = \frac{\sin P - \sin Q}{\sin P + \sin Q}$$

$$\text{of} \quad \tan \frac{1}{2}(A+B) \tan \frac{1}{2}(B-A) = \frac{\tan \frac{1}{2}(P-Q)}{\tan \frac{1}{2}(P+Q)}$$

$$\text{dat is} \quad \tan \frac{1}{2}(P-Q) = \tan \frac{1}{2}(A+B) \tan \frac{1}{2}(B-A) \tan \frac{1}{2}C,$$

$$P = \frac{C}{2} + \frac{P-Q}{2} \quad Q = \frac{C}{2} - \frac{P-Q}{2},$$

zoodat nu P en Q bekend zijn.

Vervolgens heeft men voor de berekening der zijden

$$\cos b = \cot A \cot P, \quad \cos a = \cot B \cot Q$$

$$\sin c = \frac{\sin C}{\sin A} \sin a = \frac{\sin C}{\sin B} \sin b,$$

omtrent welke laatste formule dezelfde opmerking geldt als bij de overeenkomstige in het 1^e geval.

Voorbeeld. Zij $A = 66^{\circ}57'3'',6$, $B = 97^{\circ}20'31'',6$ en $C = 42^{\circ}30'55''$.

Berekening der zijde a volgens de 1^e oplossing.

A =	66°57' 3'',6	
B =	97 20 31 ,6	l sin B = 9,9964245
C =	42 30 55	l sin C = 9,8298097
2S =	206 48 30 ,2	9,8262342
		0,1737658
S =	103 24 15 ,1	l cos S = 9,3651492
S - A =	36 27 11 ,5	l cos (S-A) = 9,9054418
		9,4443568
		2
		l sin $\frac{1}{2}a$ = 9,7221784
		$\frac{1}{2}a = 31^{\circ}49'59''$, $a = 63^{\circ}39'58''$

Men zal op gelijke wijze vinden

$$b = 75^{\circ}0'51",3 \quad c = 41^{\circ}9'46".$$

Berekening der drie zijden volgens de 2^e oplossing.

$$\begin{aligned} B &= 97^{\circ}20'31",6 \\ A &= 66 \ 57 \ 3,6 \\ B + A &= 164 \ 17 \ 35,2 \\ B - A &= 30 \ 23 \ 28,0 \\ C &= 42 \ 30 \ 55 \\ \frac{1}{2}(B + A) &= 82^{\circ} \ 8'47",6 \quad l \operatorname{tg} 0,8603307 \\ \frac{1}{2}(B - A) &= 15 \ 11 \ 44,0 \quad l \operatorname{tg} 9,4339469 \\ \frac{1}{2}C &= 21 \ 15 \ 27,5 \quad l \operatorname{tg} 9,5899856 \\ l \operatorname{tg} \frac{1}{2}(P - Q) &= 9,8842632 \\ \frac{1}{2}(P - Q) &= 37^{\circ}27'15",5 \\ \frac{1}{2}(P + Q) &= 21 \ 15 \ 27,5 \\ P &= 58^{\circ}42'43" \\ Q &= -16^{\circ}11'48" \\ l \cot A &= 9,6288837 \quad l \cot B = 9,1100847 - \\ l \cot P &= 9,7837064 \quad l \cot Q = 0,5369080 - \\ l \cos b &= 9,4125901 \quad l \cos a = 9,6469927 + \\ b &= 75^{\circ}0'51",6 \quad a = 63^{\circ}39'58",1 \\ l \sin a &= 9,9524168 \quad l \sin b = 9,9849729 \\ l \sin C &= 9,8298097 \quad l \sin C = 9,8298097 \\ &9,7822265 \quad 9,8147826 \\ l \sin A &= 9,9638682 \quad l \sin B = 8,9964245 \\ l \sin c &= 9,8183583 \quad l \sin c = 9,8183581 \\ c &= 41^{\circ}9'46" \quad c = 41^{\circ}9'45",93. \end{aligned}$$

De negatieve waarde van den hoek Q duidt hier insgelijks aan, dat de loodrechte boog buiten den driehoek achter den stompen hoek B valt, hetgeen reeds bovendien uit de gegevens was op te maken, uithoofde de hoeken A en B ongelijksoortig zijn.

III^e GEVAL.

Gegeven zijnde twee zijden b, c met den ingesloten hoek A, te berekenen de derde zijde a en de beide overige hoeken B en C.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen.

1^e *Oplossing*. De drie grondformulen, welke de betrekking tusschen elk der onbekende en de drie gegeven elementen uitdrukken, zijn

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\cot b \sin c = \sin A \cot B + \cos c \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

$$\cot c \sin b = \sin A \cot C + \cos b \cos A. \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Uit deze formulen kunnen de onbekenden worden opgelost en berekend, doch de uitkomsten zijn niet geschikt voor de logaritmische berekening. Ten dien einde worden zij op de volgende wijze omgezet.

Uit formule (a) volgt

$$\cos a = \cos b (\cos c + \tan b \sin c \cos A)$$

en stellende

$$\tan p = \tan b \cos A,$$

wordt

$$\cos a = \cos b (\cos c + \sin c \tan p)$$

$$= \cos b \frac{\cos (c - p)}{\cos p}.$$

De formulen (b) en (c) geven :

$$\cot B = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A} = \cot A \left(\frac{\cot b \sin c}{\cos A} - \cos c \right)$$

$$\cot C = \frac{\cot c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A} = \cot A \left(\frac{\cot c \sin b}{\cos A} - \cos b \right).$$

Stellende

$$\frac{\cot b}{\cos A} = \cot p, \quad \frac{\cot c}{\cos A} = \cot p',$$

wordt

$$\cot B = \frac{\cot A \sin (c - p)}{\sin p},$$

$$\cot C = \frac{\cot A \sin (c - p')}{\sin p'}.$$

Voor de oplossing der drie onbekenden heeft men nu het volgende stelsel:

$$\text{tang } p = \text{tang } b \cos A, \quad \text{tang } p' = \text{tang } c \cos A,$$

$$\cos a = \frac{\cos b \cos (c - p)}{\cos p} = \frac{\cos c \cos (b - p')}{\cos p},$$

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } A \sin p}{\sin (c - p)},$$

$$\text{tang } C = \frac{\text{tang } A \sin p'}{\sin (c - p')}.$$

Vergelijkt men deze uitkomsten met de figuur (fig. 42), dan blijkt, dat p het stuk AD der zijde c , en p' het stuk AF der zijde b voorstelt. Door middel van de driehoeken ACD, BCD en ABF, CBF is het verder niet moeielijk de laatste formules uit de figuur af te leiden.

2e *Oplossing*. De beide onbekende hoeken B en C kunnen berekend worden door de volgende formules, tot de Neperiaansche analogiën behorende, en die het voordeel hebben voor het gebruik der logarithmen geschikt te zijn.

$$\text{tang } \frac{1}{2} (B - C) = \frac{\sin \frac{1}{2} (b - c)}{\sin \frac{1}{2} (b + c)} \cot \frac{1}{2} A,$$

$$\text{tang } \frac{1}{2} (B + C) = \frac{\cos \frac{1}{2} (b - c)}{\cos \frac{1}{2} (b + c)} \cot \frac{1}{2} A.$$

Daarna vindt men de zijde a door de sinusformule, of wel door de volgende betrekkingen, die uit de Neperiaansche analogiën en formules van GAUSS (n°. 95) door omzetting verkregen worden.

$$\text{tang } \frac{1}{2} a = \text{tang } \frac{1}{2} (b + c) \frac{\cos \frac{1}{2} (B + C)}{\cos \frac{1}{2} (B - C)} = \text{tang } \frac{1}{2} (b - c) \frac{\sin \frac{1}{2} (B + C)}{\sin \frac{1}{2} (B - C)}$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} (b - c) \cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} (B - C)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (b + c) \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} (B - C)}$$

$$\cos \frac{1}{2} a = \frac{\cos \frac{1}{2} (b - c) \cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} (B + C)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (b + c) \sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} (B + C)}.$$

De toepassing van deze formules is niet lastiger dan van de sinusformule, omdat aan de voorgaande berekening verscheidene logarithmen onmiddellijk kunnen ontleend worden.

3e *Oplossing*. Trekt men uit A (fig. 42) een boog AE loodrecht

op de overstaande zijden en noemt de deelen van den hoek A grenzende aan de zijden b , c , Q' en P' , de loodlijn zelve φ' , dan is in de driehoeken ABE en ACE

$$\text{tang } \varphi' = \text{tang } c \cos Q' = \text{tang } b \cos P'$$

derhalve

$$\begin{aligned} \cos Q' : \cos P' &= \text{tang } b : \text{tang } c, \\ \frac{\cos Q' - \cos P'}{\cos Q' + \cos P'} &= \frac{\text{tang } b - \text{tang } c}{\text{tang } b + \text{tang } c}, \end{aligned}$$

of

$$\text{tang } \frac{1}{2}(P' - Q') \text{ tang } \frac{1}{2}A = \frac{\sin(b - c)}{\sin(b + c)}$$

gevende

$$\begin{aligned} \text{tang } \frac{1}{2}(P' - Q') &= \frac{\sin(b - c)}{\sin(b + c)} \cot \frac{1}{2}A, \\ P' &= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(P' - Q'), \quad Q' = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(P' - Q') \end{aligned}$$

en vervolgens ter berekening van B en C

$$\cot B = \cos c \text{ tang } Q', \quad \cot C = \cos b \text{ tang } P'.$$

De zijde a kan nu als in de vorige oplossing of door de formule

$$\sin a = \frac{\sin b \sin A}{\sin B} = \frac{\sin c \sin A}{\sin C}$$

berekend worden, in welk laatste geval men uit de overige gegevens het scherp of stomp zijn der zijde a moet beoordeelen.

Een der hoeken P' en Q' negatief wordende, zoo zal zulks aanduiden, dat de loodrechte boog buiten den driehoek valt, terwijl de soort der hoeken B, C alsdan zal moeten uitmaken, aan welke zijde de kortste loodrechte boog gelegen is.

De drie behandelde oplossingen, die nog met vele andere kunnen vermeerderd worden, samen nemende, blijkt, dat voor het berekenen van elk der onbekende elementen afzonderlijk, de 1^e oplossing de voorkeur verdient, omdat daarbij elk element onafhankelijk van de anderen wordt gevonden. Moeten echter de drie elementen berekend worden, dan is de 2^e oplossing de beste, als zijnde de kortste en nauwkeurigste voor de bewerking met getallen. De 3^e oplossing is in geen geval verkieselijk, doch heeft groote overeenkomst met de 2^e oplossingen der beide eerste gevallen.

Voorbeeld. Zij $A = 66^{\circ}57'3'',6$. $b = 75^{\circ}0'51'',3$. $c = 41^{\circ}9'46''$.

Berekening der onbekende zijde a en der hoeken B, C, volgens de 1^e oplossing.

$l \operatorname{tg} b = 0,5723798$ $l \cos A = 9,5927520$ $l \operatorname{tg} p = 0,1651318$ $p = 55^{\circ}38'21'',9$ $c = 41 \quad 9 \quad 46$ $c - p = -14^{\circ}28'35'',9$	$l \operatorname{tg} c = 9,9416540$ $l \cos A = 9,5927520$ $l \operatorname{tg} p' = 2,5344060$ $p' = 18^{\circ}53'45'',7$ $b = 75 \quad 0 \quad 51,3$ $b - p' = 56^{\circ}7'5'',6$
$l \cos (c - p) = 9,9859874$ $l \cos b = 9,4125929$ $9,3985803$ $l \cos p = 9,7515864$ $l \cos a = 9,6469939$ $a = 73^{\circ}39'57'',8$	$l \cos (b - p') = 9,7462302$ $l \cos c = 9,8768042$ $9,6229344$ $l \cos p' = 9,9759406$ $l \cos a = 9,6469938$ $a = 63^{\circ}39'57'',8$
$l \operatorname{tg} A = 0,3711962$ $l \sin p = 9,3167182$ $0,2978344$ $l \sin (c - p) = 9,3979144 -$ $l \operatorname{tg} B = 0,8899200 -$ $B = 97^{\circ}20'31'',3$	$l \operatorname{tg} A = 0,3711162$ $l \sin p' = 9,5103464$ $9,8813626$ $l \sin (b - p') = 9,9191773$ $l \operatorname{tg} C = 9,9622853$ $C = 32^{\circ}30'55'',0$

Volgens de 2^e oplossing.

$$\begin{aligned}
 b &= 75^{\circ}0'51'',3 \\
 c &= 41 \quad 9 \quad 46 \\
 b - c &= 33 \quad 51 \quad 5,3 \\
 b + c &= 116 \quad 10 \quad 37,3 \\
 \frac{1}{2}(b - c) &= 16^{\circ}55'32'',6 \\
 \frac{1}{2}(b + c) &= 58 \quad 5 \quad 18,6 \\
 A &= 66^{\circ}57'3'',6 \\
 \frac{1}{2}A &= 33 \quad 28 \quad 31,8
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
l \sin \frac{1}{2}(b-c) & = & 9,4640895 \\
l \sin \frac{1}{2}(b+c) & = & 9,9288390 \\
\hline
& & 9,5352505 \\
l \cot \frac{1}{2} A & = & 0,1796207 \\
l \operatorname{tg} \left(\frac{B-C}{2} \right) & = & 9,7148712 \\
\frac{1}{2}(B-C) & = & 27^{\circ} 24' 48'', 0 \\
\frac{1}{2}(B+C) & = & 69 \ 55 \ 43, 2 \\
B & = & 97 \ 20 \ 31, 2 \\
C & = & 42 \ 30 \ 55, 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
l \operatorname{tg} \frac{1}{2}(b+c) & = & 0,2057046 \\
l \cos \frac{1}{2}(B+C) & = & 9,5355343 \\
\hline
& & 9,7412389 \\
l \cos \frac{1}{2}(B-C) & = & 9,9482703 \\
l \operatorname{tg} \frac{1}{2} a & = & 9,7929686 \\
\frac{1}{2} a & = & 31^{\circ} 49' 58'', 8 \\
a & = & 63^{\circ} 39' 57'', 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
l \sin \frac{1}{2}(b-c) & = & 9,4640895 \\
l \cos \frac{1}{2} A & = & 9,9212295 \\
\hline
& & 9,3853190 \\
l \sin \frac{1}{2}(B-C) & = & 9,6631413 \\
l \sin \frac{1}{2} a & = & 9,7221777 \\
\frac{1}{2} a & = & 31^{\circ} 49' 58'', 9 \\
a & = & 63^{\circ} 39' 57'', 8
\end{array}$$

De leerling oefene zich verder in het berekenen der onbekenden, volgens de formules der laatste oplossing.

IVe GEVAL.

Gegeven zijnde eene zijde a met de beide aanliggende hoeken B en C, te vinden den derden hoek A, benevens de beide onbekende zijden b, c.

De gegevens behoeven aan geene voorwaarde te voldoen. Daar de oplossingen geheel overeenkomen met die van het voorgaande geval en alle formules daaruit zelfs onmiddellijk kunnen afgeleid worden door de hoeken door de supplementen der overstaande zijden en omgekeerd te vervangen, zullen wij slechts het voornaamste meêdeelen en de bewerkingen aan den lezer overlaten.

1^e *Oplossing*. De drie grondformulen voor dit geval zijn

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cot b \sin a &= \sin C \cot B + \cos a \cos C \\ \cot c \sin a &= \sin B \cot C + \cos a \cos B,\end{aligned}$$

gevende door oplossing der drie onbekenden en herleiding het volgende stelsel:

$$\begin{aligned}\cot Q &= \tan a \cos B & \cot Q' &= \tan a \cos C \\ \cos A &= \frac{\cos B \cos (C - Q)}{\sin Q} = \frac{\cos C \cos (B - Q')}{\sin Q'} \\ \tan b &= \tan a \frac{\cos Q}{\cos (C - Q)}, \\ \tan c &= \tan a \frac{\cos Q'}{\cos (B - Q')}.\end{aligned}$$

Deze formules kunnen weder uit de figuur afgeleid worden, wanneer men bedenkt, dat de ingevoerde hulphoek Q juist den hoek BCD en evenzoo Q' den hoek CBF voorstelt.

2^e *Oplossing*. Met behulp der Nep. analogiën, laten zich de onbekende zijden berekenen door de formules

$$\begin{aligned}\tan \frac{1}{2}(b - c) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(B - C)}{\sin \frac{1}{2}(B + C)} \tan \frac{1}{2}a, \\ \tan \frac{1}{2}(b + c) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\cos \frac{1}{2}(B + C)} \tan \frac{1}{2}a,\end{aligned}$$

en vervolgens de hoek A door eene der formules

$$\begin{aligned}\tan \frac{1}{2}A &= \frac{\sin \frac{1}{2}(b - c)}{\sin \frac{1}{2}(b + c)} \cot \frac{1}{2}(B - C), \\ \tan \frac{1}{2}A &= \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}(b + c)} \cot \frac{1}{2}(B + C), \\ \sin \frac{1}{2}A &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B - C)}{\sin \frac{1}{2}(b - c)} \cdot \sin \frac{1}{2}a = \frac{\cos \frac{1}{2}(B + C)}{\cos \frac{1}{2}(b - c)} \cos \frac{1}{2}a \\ \cos \frac{1}{2}A &= \frac{\sin \frac{1}{2}(B - C)}{\sin \frac{1}{2}(b - c)} \cdot \sin \frac{1}{2}a = \frac{\sin \frac{1}{2}(B + C)}{\cos \frac{1}{2}(b - c)} \cos \frac{1}{2}a,\end{aligned}$$

waarin de beide eersten aan de Nep. analogiën, de beide laatsten aan de formules van GAUSS ontleend zijn.

3^e *Oplossing*. Men trekke den loodrechten boog AE , en stelle de segmenten CE , $BE = p'$, q' , dan vindt men gemakkelijk

$$\begin{aligned}\tan \frac{1}{2}(p' - q') &= \frac{\sin (B - C)}{\sin (B + C)} \tan \frac{1}{2}a \\ p' &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(p' - q'), & q' &= \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(p' - q').\end{aligned}$$

De gegevens zullen hier onmiddellijk doen kennen, of de gemelde boog binnen of buiten den driehoek valt.

Vervolgens heeft men ter berekening van b en c

$$\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{tg} p'}{\cos C}, \quad \operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} q'}{\cos B};$$

kunnende de derde hoek A , hetzij even als in de vorige oplossing, hetzij door de meer eenvoudige formule

$$\sin A = \sin a \frac{\sin B}{\sin b} = \sin a \frac{\sin C}{\sin c}$$

worden berekend.

Voorbeeld. Zij $a = 180^{\circ}19'12''.5$. $B = 57^{\circ}13'12$. $C = 120^{\circ}0'25''$. Men zal, door de toepassing van de hiervoren opgegevene formules, vinden

$$A = 87^{\circ}35'52''. \quad b = 53^{\circ}1'11''.46. \quad c = 124^{\circ}38'3''.42.$$

VI^e GEVAL.

Gegeven zijnde twee zijden a , b met een der overliggende hoeken A , te vinden de beide overige hoeken B , C , benevens de onbekende zijde c .

Dit en het volgende geval behooren tot de zoogenaamde *twijfelachtige* gevallen, dewijl de gegevens zoodanig kunnen zijn, dat zij gelijktijdig op twee verschillende driehoeken van toepassing worden, gelijk uit de navolgende beschouwingen zal blijken; welke omstandigheid men reeds in het VI^e geval der rechthoekige driehoeken heeft leeren kennen.

Zonder vooraf de onbekende elementen te berekenen, zal men uit de gegevens onmiddellijk kunnen opmaken, welke der beide omstandigheden hier zal plaats vinden.

Immers, onderstellende in de eerste plaats dat $a > b$ en $a + b > 180^{\circ}$; dan zal ook $A > B$ en $A + B > 180^{\circ}$. Daar nu A niet scherp noch recht zijn kan, zoo stelle men $A = 90^{\circ} + A'$ en $B = 90^{\circ} + B'$, dan zal aan beide voorwaarden voldaan worden, indien $A' > B'$, doch zulks zal evenzeer het geval zijn, indien men B door zijn supplement $90^{\circ} - B'$ vervangt.

Laat in de tweede plaats $a < b$ en $a + b < 180^{\circ}$ ondersteld worden, dan zal ook $A < B$ en $A + B < 180^{\circ}$. Daar nu A hier niet stomp noch recht kan zijn, zoo zij $A = 90^{\circ} - A'$ en $B = 90^{\circ} - B'$,

dan moet $A' > B'$, en men ziet, even als hiervoren, dat zoo wel de hoek B, als zijn supplement $90 + B'$ aan de beide laatste voorwaarden zullen voldoen. In dit en in het voorgaande geval kunnen er alzoo *twee* verschillende driehoeken met de gegevens bestaanbaar zijn. Geen driehoek zal echter mogelijk zijn, indien in het eerste geval $A < 90^\circ$, en in het tweede $A > 90^\circ$.

Heeft men echter $a > b$ en $< 180^\circ - b$ of $a + b < 180^\circ$, dus ook $A > B$ en $A + B < 180^\circ$, dan kan A zoo wel scherp als stomp zijn. Stelt men nu $A = 90^\circ - A'$ en $B = 90^\circ - B'$, dan zal het supplement van B thans niet in aanmerking kunnen komen, uit hoofde hierdoor $A < B$ wordt. Stellende daarentegen $A = 90^\circ + A'$ en $B = 90^\circ - B'$, dan zal men het supplement van B insgelijks moeten verwerpen, vermits anders $A + B > 180^\circ$ wordt. Uit de hier aangenomen onderstelling volgt daarenboven $2b < 180^\circ$ en $2B < 180^\circ$, zoodat de zijde b met den overstaanden hoek B gelijksoortig is, en dus beide scherp moeten zijn.

+ Stelt men eindelijk nog $a < b$ en $a + b > 180^\circ$, dan zal het op gelijke wijze als voren blijken, dat hier slechts ééne waarde van B aan eene der voorwaarden $A < B$ en $A + B > 180^\circ$ zal kunnen voldoen, en men tevens zal hebben $b > 90^\circ$ en $B > 90^\circ$.

Op grond der voorgaande redeneeringen kan men thans den navolgenden regel vaststellen, ter beslissing in het twijfelachtige geval.

Is namelijk $A > 90^\circ$, $a > b$ en $a + b > 180^\circ$
 of $A < 90^\circ$, $a < b$ en $a + b < 180^\circ$,

dan heeft de hoek B *twee* verschillende waarden, die met de gegevens bestaanbaar zijn.

Is echter $a > b$ en $a + b < 180^\circ$,
 of $a < b$ en $a + b > 180^\circ$,

dan zal de hoek B slechts ééne waarde kunnen hebben, en altijd gelijksoortig zijn met de overstaande zijde b .

Men kan den voorgaanden regel nog eenvoudiger aldus voorstellen:

Er zal slechts één driehoek mogelijk zijn, zoodra de zijde a tuaschen de zijde b en haar supplement $180^\circ - b$ gelegen is; B en b zullen alsdan gelijksoortig zijn. In het tegenovergestelde geval zullen er twee driehoeken kunnen bestaan, mits de hoek A met de zijde a gelijksoortig zij.

1^e Oplossing. De drie grondformulen, in dit geval te gebruiken, zijn:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} \quad (a)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (b)$$

$$\cot a \sin b = \sin C \cot A + \cos b \cos C \quad (c)$$

Uit (a) volgt

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \quad (d)$$

en deze formule geeft twee supplementaire waarden voor B. Of zij beiden dan wel een van beiden moeten gebruikt worden, is vooraf volgens bovengenoemde regels uit de gegevens afgeleid. In alle gevallen wordt voor de bestaanbaarheid vereischt, dat

$$\sin b \sin A < \sin a,$$

hetgeen overeenkomt met de eigenschap dat de loodlijn uit C neergelaten kleiner of grooter dan de zijde a moet zijn, naarmate zij beiden scherp of stomp zijn.

Stellende $\sin b \sin A = \sin \varphi$, dan vindt men gemakkelijk uit (d)

$$\tan(45^\circ - \frac{1}{2}B) = \pm \sqrt{\frac{\tan \frac{1}{2}(a - \varphi)}{\tan \frac{1}{2}(a + \varphi)}},$$

welke formule ook twee waarden voor B oplevert en bijzonder dienstig zal zijn, in geval die hoek weinig van 90° verschilt en alzoo door zijn sinus niet nauwkeurig kan bepaald worden.

Om uit de verg. (b) het onbekende element c op te lossen, schrijve men

$$\cos a = \cos b (\cos c + \sin c \tan b \cos A)$$

en stelle

$$\tan b \cos A = \tan p,$$

dan wordt

$$\cos a = \frac{\cos b \cos(c - p)}{\cos p},$$

of, nemende

$$c - p = q$$

$$\cos a = \frac{\cos b \cos q}{\cos p};$$

derhalve

$$\cos q = \frac{\cos a \cos p}{\cos b}$$

en

$$c = p \pm q.$$

Het dubbele teeken dient hier om aan te wijzen, dat uit $\cos q$ zoowel de positieve als de negatieve waarde van q moet genomen worden.

Op die wijze ontstaat de dubbele waarde van c , die in eene enkele overgaat wanneer $q > p$.

Om uit formule (c) de onbekende C op te lossen, ga men aldus te werk:

$$\cot a = \cot b \left(\frac{\sin C \cot A}{\cos b} + \cos C \right)$$

Zij

$$\frac{\cot A}{\cos b} = \tan P$$

dan wordt:

$$\cot a = \frac{\cot b \cos (C - P)}{\cos P}$$

of, stellende

$$C - P = Q,$$

$$\cos Q = \frac{\cos P \tan b}{\tan a}$$

$$C = P \pm Q;$$

aangaande het dubbele teeken van Q valt hetzelfde op te merken als bij q .

Voor de oplossing der drie onbekenden heeft men nu het volgende stelsel formules

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

$$\tan p = \tan b \cos A, \quad \cot P = \cos b \tan A,$$

$$\cos q = \frac{\cos a \cos p}{\cos b}, \quad \cos Q = \frac{\tan b \cos P}{\tan a}$$

$$c = p \pm q, \quad C = P \pm Q.$$

Deze formules kan men ook onmiddellijk uit de figuur afleiden, wanneer men bedenkt (fig. 42), dat p en q juist de stukken voorstellen waarin de zijde c door de loodlijn uit het overstaande hoekpunt wordt verdeeld, en evenzoo P en Q de overeenkomstige deelen van den hoek C ; dan heeft het dubbele teeken betrekking op de ge-

vallen, dat de loodlijn CD binnen en buiten den driehoek valt.

2^e *Oplossing*. De hoek B wordt eerst op dezelfde wijze berekend, namelijk door de formule:

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a} \dots \dots \dots (a)$$

men vindt daarna de elementen c en C door middel van de volgende aan de Nep. analogiën ontleende formules:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} c &= \frac{\sin \frac{1}{2} (A+B)}{\sin \frac{1}{2} (A-B)} \tan \frac{1}{2} (a-b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A+B)}{\cos \frac{1}{2} (A-B)} \tan \frac{1}{2} (a-b), \\ \tan \frac{1}{2} C &= \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (a+b)} \cot \frac{1}{2} (A-B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a-b)}{\cos \frac{1}{2} (a+b)} \cot \frac{1}{2} (A+B). \end{aligned}$$

Heeft men nu uit (a) twee waarden voor B gevonden, dan moet men ze achtereenvolgens in deze formules overbrengen en verkrijgt hierdoor de overeenkomstige dubbele waarden voor c en C .

De voor- en nadeelen van elk der beide oplossingen zullen den aandachtigen lezer ook zonder nadere omschrijving in het oog springen.

1^e *Voorbeeld*. Zij $a = 50^{\circ}10'30''$. $b = 40^{\circ}0'10''$. $A = 42^{\circ}15'14''$.

Hier is a tusschen b en $180^{\circ} - b$ gelegen, zoodat er slechts één driehoek met de gegevens bestaanbaar is, zullende B gelijksoortig met b en dus $< 90^{\circ}$ zijn.

Berekening volgens de 1^e oplossing.

$$\begin{array}{ll} l \sin b = 9,8080926 & \\ l \sin A = 9,8276387 & \\ \hline & 9,6357313 \\ l \sin a = 9,8853636 & \\ \hline l \sin B = 9,7503677 & \\ B = 34^{\circ}15'3''2. & \\ \\ l \lg b = 9,9238563 & l \cos a = 9,8064817 \\ l \cos A = 2,8693330 & l \cos p = 9,9291471 \\ \hline l \lg p = 9,7931893 & 9,7356288 \\ p = 31^{\circ}50'46'' & l \cos b = 9,8842363 \\ q = 44 \ 44 \ 50 & l \cos q = 9,8513925 \\ c = 76^{\circ}35'36'' & q = 44^{\circ}44'50'' \end{array}$$

c is hier gelijk de som der segmenten p en q , uithoofde $q > p$ en dientengevolge de loodrechte boog binnen den driehoek valt.

$$\begin{array}{ll}
 l \cos b = 9,8842363 & l \operatorname{tg} b = 9,9238563 \\
 l \operatorname{tg} A = 9,9583058 & l \cos P = 9,7567851 \\
 l \cot P = 9,8425421 & l \cot a = 9,9211182 \\
 P = 55^{\circ} 9' 59'' & l \cos Q = 9,6017596 \\
 Q = 66^{\circ} 26' 21'' & Q = 66^{\circ} 26' 21'' \\
 C = 121^{\circ} 36' 20''.
 \end{array}$$

2e Voorbeeld. Gegeven $a=65^{\circ}33'40''$. $b=78^{\circ}20'30''$. $A=63^{\circ}18'20''$.

In dit voorbeeld ligt a niet tusschen b en $180^{\circ}-b$, zoodat er twee verschillende driehoeken mogelijk zijn. Men zal vinden

$$\begin{array}{ll}
 B = 73^{\circ}57'55'',2 & B = 106^{\circ} 2' 4'',8 \\
 C = 102^{\circ} 53' 32'',4 & C = 33^{\circ} 19' 10'',4 \\
 c = 96^{\circ} 37' 24'',2 & c = 64^{\circ} 21' 7'',4.
 \end{array}$$

VI^e GEVAL.

Gegeven zijnde twee hoeken A en B met eene tegenoverliggende zijde a , te vinden de beide overige zijden b , c , benevens den derden hoek C .

De beoordeeling over het al of niet bestaanbaar zijn van twee driehoeken, die met de gegevens overeenstemmen, geschiedt met behulp van den navolgenden regel, welke door eene gelijksoortige redeneering als die voor het V^e geval, verkregen wordt, en daarenboven uit de beschouwing van den pooldriehoek af te leiden is, te weten:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Is} & a > 90^{\circ} \quad A > B \text{ en } A+B > 180^{\circ}, \\
 \text{of} & a < 90^{\circ} \quad A < B \text{ en } A+B < 180^{\circ},
 \end{array}$$

dan heeft de zijde b twee verschillende waarden.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Is echter} & A > B \text{ en } A+B < 180^{\circ}, \\
 \text{of} & A < B \text{ en } A+B > 180^{\circ},
 \end{array}$$

dan bestaat er slechts ééne waarde voor de zijde b , welke alsdan met den hoek B steeds gelijksoortig zal zijn. Men kan dezen regel insgelijks aldus voorstellen.

Er zal met de gegevens slechts één driehoek overeenstemmen, indien de hoek A tusschen den hoek B en zijn supplement gelegen is; B en b zullen alsdan gelijksoortig zijn. In het tegenovergestelde geval zullen er twee driehoeken bestaan, mits A en a gelijksoortig zijn.

1^e Oplossing. De grondformulen voor dit geval dienstig, zijn

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

$$\cot a \sin c = \sin B \cot A + \cos c \cos B.$$

Door gelijksoortige herleiding als in het voorgaande geval verkrijgt men het volgende stelsel voor de berekening der drie onbekenden:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A},$$

$$\tan q = \tan a \cos B, \quad \tan Q = \cos a \tan B,$$

$$\sin p = \frac{\sin q \tan B}{\tan A}, \quad \sin P = \frac{\cos A \sin Q}{\cos B},$$

$$C = \begin{cases} p + q \\ 180^\circ - p + q \end{cases} \quad C = \begin{cases} P + Q \\ 180^\circ - P + Q. \end{cases}$$

Ook deze formules kunnen gemakkelijk uit de figuur worden afgeleid, wanneer men nagaat, dat p en q de stukken der zijde c en P en Q de deelen van den hoek C voorstellen. De dubbele oplossing wordt veroorzaakt door de beide supplementaire waarden, die uit $\sin p$ en $\sin P$ gevonden worden, terwijl slechts de positieve waarden van c en C in aanmerking komen.

Uit de eerste formule volgt dat in alle gevallen voor de bestaanbaarheid vereischt wordt

$$\sin a \sin B > \sin A.$$

Voor waarden van b die tot 90° naderen, gebruike men de formule

$$\tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) = \pm \sqrt{\frac{\tan \tfrac{1}{2}(A - \varphi)}{\tan \tfrac{1}{2}(A + \varphi)}}$$

waarin

$$\sin \varphi = \sin a \sin B.$$

2^e Oplossing. Men berekent eerst de zijde b uit de formule

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}$$

en daarna c en C door dezelfde Nep. analogiën als in de 2^e oplossing van het voorgaande geval. Alie opmerkingen daar gemaakt, gelden ook hier. Is eene der beide grootheden C en c door de Nep. analogiën verkregen, dan kan de andere ook door de sinusformule worden gevonden.

1^e Voorbeeld. Zij $a = 109^{\circ}15'33''$, $A = 139^{\circ}53'52''$. $B = 42^{\circ}42'46''$.

Hier is $A > B$ en $> 180^{\circ} - B$, zoodat er twee driehoeken met de gegevens zullen overeenstemmen.

Berekening volgens de 2^e oplossing.

$$l \sin a = 9,9749887$$

$$l \sin A = 9,8089892$$

$$(*) 0,1659995$$

$$l \sin B = 9,8314369$$

$$l \sin b = 9,9974364$$

$$b = 83^{\circ}46'50''$$

$$\text{en } b = 96^{\circ}13'10''$$

$$A = 139^{\circ}53'52''$$

$$B = 42 \ 42 \ 46$$

$$A + B = 182 \ 36 \ 38, \quad \frac{1}{2}(A + B) = 91^{\circ}18'19'' \quad l \sin 9,9998872$$

$$A - B = 97 \ 11 \ 6, \quad \frac{1}{2}(A - B) = 48^{\circ}35'33'' \quad l \sin 9,8750755$$

$$0,1248117$$

$$a = 109^{\circ}15'33''$$

$$b = 83 \ 46 \ 50$$

$$a - b = 25 \ 28 \ 43, \quad \frac{1}{2}(a - b) = 12^{\circ}44'21'',5 \quad l \tg 9,3542635$$

$$l \tg \frac{1}{2} c = 9,4790752$$

$$\frac{1}{2} c = 16^{\circ}46'13'',2$$

$$c = 33^{\circ}32'26'',4$$

$$a = 109^{\circ}15'33''$$

$$b = 96 \ 13 \ 10$$

$$9,1248117$$

$$a - b = 13 \ 2 \ 23, \quad \frac{1}{2}(a - b) = 6^{\circ}31'11'',5 \quad l \tg 9,0579959$$

$$l \tg c = 9,1828076$$

$$\frac{1}{2} c = 8^{\circ}39'42'',2$$

$$c = 17^{\circ}19'24'',4$$

*Berekening van den hoek C en de zijde c volgens
de 1^e oplossing.*

$$\begin{array}{rcl}
 l \cos a = 9,5183056 - & & l \sin Q = 9,9807449 - \\
 l \tan B = 9,9652894 & & l \cos A = 9,8836026 - \\
 l \cot Q = 9,4835950 - & & \underline{9,8643475 +} \\
 Q = -73^{\circ} 3'51'',2 & & l \cos B = 9,8661475 \\
 & & l \sin P = 9,9982000 \\
 P = 84^{\circ}47'13'',5 & \text{en} & P = 95^{\circ}12'46'',5 \\
 Q = -73 \quad 351,2 & & Q = -73^{\circ} 351,2 \\
 C = P + Q = 11^{\circ}43'22'',2 & C = P + Q = & 22^{\circ} 8'55,3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 l \sin C = 9,3078766 & & l \sin C = 9,5763547 \\
 (*) = 0,1659995 & & (*) = 0,1659995 \\
 l \sin c = 9,4738761 & & l \sin c = 9,7423542 \\
 c = 17^{\circ}19'24'',6 & & c = 33^{\circ}32'26'',1
 \end{array}$$

De beide waarden van c moeten $< 90^{\circ}$ genomen worden, vermits $C < A$ zijnde, ook $c < a$ moet zijn.

Aanmerking. De eerste wijze van berekenen der twee waarden van c is in zoo verre verkieslijker boven de tweede, vermits uit deze laatste niet rechtstreeks kan opgemaakt worden, welke der beide reeds gevondene waarden van de zijde b met die van den hoek C of van de zijde c overeenstemmen.

2: *Voorbeeld.* Zij $a = 38^{\circ}15'15'',2$. $A = 118^{\circ}50'$. $B = 40^{\circ}13'5''$.

Hier ligt A tusschen den hoek B en zijn supplement, zoodat er slechts één driehoek mogelijk is. Men zal vinden

$$b = 27^{\circ}9'9'',44. \quad c = 17^{\circ}9'26'',64. \quad C = 24^{\circ}40'11''.$$

100. Zie hier nog eene meetkundige beschouwing, welke tevens tot nadere toelichting der beide twijfelachtige gevallen zal kunnen strekken.

ADA'd (fig. 44) verbeelde een grooten cirkel des bols, AA' den halven omtrek van een tweeden grooten cirkel, loodrecht op het vlak des eersten staande, en waarop een willekeurig punt P genomen is, zijnde $PA < 90^{\circ}$. Men trekke door dit punt onderscheidene bogen van groote cirkels Bf, Ce, Dd enz., dan zullen de gedeelten PB, PC enz. achterevolgens toenemen, zoodat de loodrechte bogen

PA, PA', de kleinste en grootste afstanden van het punt P tot den cirkelomtrek ADA'd zullen voorstellen. Immers, in den rechthoekigen driehoek PBA zal $\angle B$ scherp, en dus $AP < BP$ zijn. In den driehoek PCB is $\angle C$ insgelijks scherp, doch $\angle B$ stomp, dus $PB < PC$ enz. De scherpe hoeken B, C enz. zullen achtereenvolgens verminderen tot in het punt, dat op 90° afstand van A ligt, waarna die hoeken op nieuw zullen aangroeien, om in het punt A' gelijk 90° te worden. Onderstelt men verder dat de punten E en F op gelijke afstanden van het punt A', als de punten C en B van A verwijderd zijn, dan zal ook boog $AB =$ boog $A'b$ en $AC = A'c$, dus ook $PB = P'b$ en $PC = P'c$ zijn. Nu toont de figuur ten duidelijkste aan, dat de driehoeken CBP en C'bP twee gelijke zijden met een gemeenschappelijken hoek C over eene dezer zijden hebben, en zulks insgelijks het geval is met hunne supplements-driehoeken fPe, FPe. Voor de beide eersten zal blijkbaar

$$\angle C < 90^\circ, \quad BP < PC, \quad PB + PC < 180^\circ,$$

en voor de beide laatsten

$$\angle c < 90^\circ, \quad P'f > P'e \quad \text{en} \quad P'f + P'e > 180^\circ.$$

Met de driehoeken DBP, D'bP, en hun supplements-driehoek zal zulks evenzeer het geval zijn.

Beschouwt men daarentegen den driehoek PFC, dan blijkt hieruit dat er met de gegeven zijden PF, PC en den overstaanden hoek F, slechts één driehoek mogelijk is, dewijl in den driehoek FPc, de zijde FCc $> 180^\circ$ wordt, en zulks eveneens zou plaats vinden bij zijn supplements-driehoek P'be, samengesteld uit de zijden Pe, P'b, en den hoek b. Voor den eersten dezer driehoeken heeft men

$$CP < FP \quad \text{en} \quad CP + FP < 180^\circ,$$

voor den laatsten daarentegen, zal

$$Pe > P'b \quad \text{en} \quad Pe + P'b < 180^\circ,$$

hetwelk alles met de vroeger opgegevene voorwaarden overeenstemt.

Voor het VI^e geval is het onnoodig eene afzonderlijke figuur te ontwerpen, dewijl de daartoe betrekkelijke voorwaarden, door middel van den pooldriehoek, onmiddellijk uit die voor het V^e geval kunnen afgeleid worden.

101. Ofschoon de hiervoren vermelde eigenschappen steeds vol-

doende zijn, om allen twijfel op te heffen nopens de beslissing of een der elementen eens driehoeks scherp of stomp aan te nemen zij, achten wij het echter niet ondienstig, hier kortelijk in eenig onderzoek te treden aangaande de onderscheidene gevallen, die zich in elken driehoek, ten aanzien van het scherp of stomp zijn der zes elementen, kunnen voordoen.

In de eerste plaats laat zich gemakkelijk betoogen, dat indien elke der drie hoeken scherp is, de drie zijden alsdan insgelijks scherp moeten zijn. Immers, daar de loodrechte boog CD (fig. 42) in dat geval binnen den driehoek valt, en elk der hoeken P, Q scherp is, zullen de zijden AC en BC eveneens scherp moeten zijn (n°. 88), terwijl het op gelijke wijze blijkt, dat zulks met de derde zijde AB eveneens zal plaats hebben.

Beschouwen wij in de tweede plaats een driehoek wiens hoeken allen stomp zijn. De loodrechte boog valt alsdan wederom binnen den driehoek, doch hier behooren twee verschillende gevallen ten opzichte der hoeken P en Q onderscheiden te worden. Deze kunnen namelijk beiden scherp, of een derzelve, bijv. P, kan stomp, en de andere scherp zijn. In het eerste geval zal elke der zijden AC en BC stomp moeten zijn, en aangezien elk der segmenten AD en BD scherp is, zoo kan AB scherp of stomp zijn. In het tweede geval is de zijde AC scherp en BC stomp, doch aangezien AD gelijksoortig met den hoek P, en dus stomp is, zal ook AB stomp moeten zijn; uit welk een en ander gemakkelijk op te maken valt, dat men, bij drie stompe hoeken, zoo-wel drie stompe zijden, als twee stompe en eene scherpe zijde kan hebben, in welk laatste geval de scherpe zijde noodzakelijk over den kleinsten hoek zal liggen. Wanneer wij dan het scherp of stomp zijn van eenig element des driehoeks, korthedshalve door bijvoeging van de letter *s* of *S* aanwijzen, dan verkrijgen wij reeds de drie navolgende gevallen:

$$As, Bs, Cs \quad a s, b s, c s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$AS, BS, CS \quad \left\{ \begin{array}{l} aS, bS, cS. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2) \\ aS, bS, cs. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3) \end{array} \right.$$

Passen wij thans elk dezer drie gevallen op een der supplements-driehoeken toe, waartoe wij dien op de zijde *c* beschreven kiezen, dan ziet men gemakkelijk in, dat hieruit nog de navolgende gevallen voortvloeijen:

$$AS, BS, Cs \quad aS, bS, cs. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$As, Bs, CS \quad \left\{ \begin{array}{l} a s, b s, cS. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5) \\ a s, b s, c s. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6) \end{array} \right.$$

Gebruikt men hierbij den supplements-driehoek op de zijde b , dan geeft ons het derde geval nog het volgende

$$A s, BS, C s. \qquad a s, b S, c S. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Uit dit alles blijkt alzoo dat er hoogstens *zeven* gevallen mogelijk zijn, te weten:

- 1°. *Drie scherpe hoeken met drie scherpe zijden.*
- 2°. *Drie stompe hoeken, met* $\left\{ \begin{array}{l} \text{een scherp en twee stompe hoeken.} \\ \text{drie stompe zijden.} \end{array} \right.$
- 3°. *Een scherpe en twee stompe hoeken, met eene scherpe en twee stompe zijden.*
- 4°. *Een stompe en twee scherpe hoeken, met* $\left\{ \begin{array}{l} \text{drie scherpe zijden.} \\ \text{eene stompe en twee scherpe zijden.} \\ \text{eene scherpe en twee stompe zijden.} \end{array} \right.$

Aangezien de zijden en hoeken eens bolvormigen driehoeks, gelijk reeds in n°. 73 opgemerkt is, overeenkomen met de zijvlakken en standhoeken van een drievlakkigen hoek, wiens hoekpunt in het middelpunt van den bol ligt, zoo zal het onnoodig zijn hier bij te voegen, dat de thans afgehandelde zes gevallen der bolvormige driehoeksmeting, evenzeer toepasselijk zijn op de berekening van drie der zes elementen eens drievlakkigen hoeks, wanneer de drie overige gegeven zijn.

§ XVIII.

Over de oplossing van eenige gevallen der driehoeksmeting door middel van oneindige reeksen.

102. Zoowel in de vlakke als in de bolvormige driehoeksmeting bestaan enkele gevallen, welke vatbaar zijn om met behulp van convergeerende reeksen spoedig en nauwkeurig opgelost te worden. Deze wijzen van oplossen zijn gegrond op de navolgende ontwikkelingen, waarvan het betoog te vinden is in onze *Lessen over de Hoogere Algebra* § 268, te weten:

$$B \operatorname{tg} \left(\frac{a \sin \varphi}{1 + a \cos \varphi} \right) = a \sin \varphi - \frac{a^3}{2} \sin 2\varphi + \frac{a^5}{3} \sin 3\varphi - \frac{a^7}{4} \sin 4\varphi + \text{enz.} \quad (\text{A})$$

$$\frac{1}{2} B \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \alpha \sin \varphi) = a \sin \varphi + \frac{a^3}{3} \sin 3\varphi + \frac{a^5}{5} \sin 5\varphi + \text{enz.} \quad (\text{B})$$

$$\frac{1}{2} B \operatorname{tg} (\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) = a \cos \varphi - \frac{a^3}{3} \cos 3\varphi + \frac{a^5}{5} \cos 5\varphi - \text{enz.} \quad (\text{C})$$

waarin $a = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$.

$$N \log \sqrt{1 + a^2 \pm 2a \cos \varphi}$$

$$= \pm a \cos \varphi - \frac{a^3}{2} \cos 2\varphi \pm \frac{a^5}{3} \cos 3\varphi - \frac{a^7}{4} \cos 4\varphi + \text{enz.} \quad (\text{D})$$

De reeksen (A) en (D) zijn van onmiddellijke toepassing op het III^e geval der vlakke driehoeksmeting, waarin tot de gegevens behoren twee zijden a en b met den ingesloten hoek C . Men heeft alsdan, ter bepaling van een der onbekende hoeken A , zoo als uit fig. 6 gemakkelijk op te maken is, de formule

$$\operatorname{tg} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C} = \frac{\frac{a}{b} \sin C}{1 - \frac{a}{b} \cos C}$$

$$\text{of} \quad A = \text{boog} \operatorname{tg} \left(\frac{\frac{a}{b} \sin C}{1 - \frac{a}{b} \cos C} \right)$$

Schrijvende thans in de reeks (A) voor a , de breuk $-\frac{a}{b}$, dan komt er, na omkeering der teekens

$$A = \frac{a}{b} \sin C + \frac{1}{2} \frac{a^3}{b^3} \sin 2C + \frac{1}{3} \frac{a^5}{b^5} \sin 3C + \text{enz.},$$

welke reeks, waardoor de boog A in deelen van den straal uitgedrukt wordt, des te spoediger convergeeren zal, naarmate de verhouding $\frac{a}{b}$ eene geringer waarde heeft. Wil men dezen boog in seconden uitdrukken, dan zal, omdat de boog, wiens lengte gelijk aan den straal is, een aantal seconden bevat voorgesteld door $\frac{1}{\sin 1''} = 206264'',8$, de waarde van A met dit laatste getal te vermenigvuldigen, of wel elken term der reeks door $\sin 1''$ te deelen zijn. En aangezien voor kleine waarden van p , het product $p \sin 1''$

door $\sin p''$ mag vervangen worden (n^0 . 21), zal men de voorgaande waarde van A aldus kunnen voorstellen:

$$A = \frac{a \sin C}{b \sin 1''} + \frac{a^2 \sin 2C}{b^2 \sin 2''} + \frac{a^3 \sin 3C}{b^3 \sin 3''} + \text{enz.}$$

Is daarentegen $\frac{a}{b} > 1$, dan zal men in plaats van den hoek A, den hoek B berekenen door de reeks

$$B = \frac{b \sin C}{a \sin 1''} + \frac{b^2 \sin 2C}{a^2 \sin 2''} + \frac{b^3 \sin 3C}{a^3 \sin 3''} + \text{enz.};$$

zoodat men in elk der beide gevallen van eene convergeerende reeks kan gebruik maken.

De onbekende zijde c heeft tot waarde

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C} = a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2b}{a} \cos C}.$$

Hierop de reeks (D) van toepassing makende, bekomt men terstond

$$N \log c = N \log a - \frac{b}{a} \cos C - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \cos 2C - \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} \cos 3C - \text{enz.},$$

of in gewone logarithmen rekenende,

$$\log c = \log a - M \left(\frac{b}{a} \cos C + \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2} \cos 2C + \frac{1}{3} \frac{b^3}{a^3} \cos 3C + \text{enz.} \right)$$

zijnde hier M de modulus van het gewone of Briggiaansche logarithmen-stelsel.

103. Elke vergelijking van den vorm

$$\operatorname{tg} \varphi = n \operatorname{tg} \alpha$$

waarin de hoek φ de onbekende voorstelt, is vatbaar om met behulp van eene der voorgaande reeksen te worden opgelost.

Uit die vergelijking volgt namelijk

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\alpha - \varphi) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi} = \frac{(1-n) \operatorname{tg} \alpha}{1 + n \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ &= \frac{(1-n) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + n \sin^2 \alpha} = \frac{(1-n) \sin 2\alpha}{1 + n + (1-n) \cos 2\alpha} \end{aligned}$$

Stellende hierin korthedshalve $\frac{1-n}{1+n} = m$, dan zal de reeks (A) onmiddellijk geven

$$\begin{aligned}\alpha - \varphi &= B \operatorname{tg} \left(\frac{m \sin 2\alpha}{1 + m \cos 2\alpha} \right) \\ &= m \sin 2\alpha - \frac{m^2}{2} \sin 4\alpha + \frac{m^3}{3} \sin 6\alpha - \text{enz.},\end{aligned}$$

of in seconden rekenende

$$\varphi = \alpha - \frac{m \sin 2\alpha}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 4\alpha}{\sin 2''} - \frac{m^3 \sin 6\alpha}{\sin 3''} + \text{enz.} \quad . \quad . \quad (E)$$

Heeft men daarentegen α uit φ te bepalen, dan behoeft men hier toe in de voorgaande reeks slechts α en φ onderling te verwisselen, en voor n , te schrijven $\frac{1}{n}$, of hetgeen hetzelfde is, m te vervangen door $-m$, waardoor men verkrijgt

$$\alpha = \varphi + \frac{m \sin 2\varphi}{\sin 1''} + \frac{m^2 \sin 4\varphi}{\sin 2''} + \frac{m^3 \sin 6\varphi}{\sin 3''} + \text{enz.} \quad . \quad . \quad (F)$$

Blijkbaar zullen de reeksen (E) (F) des te spoediger convergeeren, naarmate n minder van de eenheid verschilt.

Indien echter a eene geringe waarde heeft en $n < 1$ is, zal het verkieselijk zijn zich ter bepaling van φ van de reeks (B) te bedienen, welke, wanneer men $n = \sin \beta$ stelt, terstond geeft:

$$\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \frac{\sin \beta}{\sin 1''} + \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} a \frac{\sin 3\beta}{\sin 3''} + \operatorname{tg}^5 \frac{1}{2} a \frac{\sin 5\beta}{\sin 5''} + \text{enz.} \quad . \quad (G)$$

104. De bolvormige rechthoekige driehoeken leveren de navolgende gevallen op, welke voor eene berekening met behulp van eene der voorgaande reeksen vatbaar zijn.

1°. Gegeven zijnde de hypotenusa c en de scheve hoek A , te vinden de zijde b en den anderen hoek B .

Ter bepaling der zijde b heeft men de formule

$$\operatorname{tg} b = \cos A \operatorname{tg} c.$$

Door toepassing der reeks (E), vindt men, vermits $n = \cos A$ en

$$m = \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A,$$

$$b = c - tg^3 \frac{1}{2} A \frac{\sin 2c}{\sin 1''} + tg^5 \frac{1}{2} A \frac{\sin 4c}{\sin 2''} - tg^7 \frac{1}{2} A \frac{\sin 6c}{\sin 3''} + \text{enz.}$$

Tot de convergentie dezer reeks wordt gevorderd dat $A < 90^\circ$ zij. De zijde b laat zich insgelijks berekenen met behulp der reeks (C), gevende alsdan

$$\frac{1}{2} b = tg \frac{1}{2} c \frac{\cos A}{\sin 1''} - tg^3 \frac{1}{2} c \frac{\cos 3A}{\sin 3''} + tg^5 \frac{1}{2} c \frac{\cos 5A}{\sin 5''} - \text{enz.}$$

Van elke dezer reeksen kan in de sterrekunde een nuttig gebruik gemaakt worden ter berekening van het verschil tusschen de zonslengte en rechte opklimming.

Op de formule

$$\cot B = tg(90^\circ - B) = \cos c \, tg A,$$

welke ter bepaling van den scheven hoek B strekt, kan men insgelijks de reeksen (E) en (C) van toepassing maken, waardoor men bekomt

$$90^\circ - B = A - tg^3 \frac{1}{2} c \frac{\sin 2A}{\sin 1''} + tg^5 \frac{1}{2} c \frac{\sin 4A}{\sin 2''} - \text{enz.}$$

$$45^\circ - \frac{1}{2} B = tg \frac{1}{2} A \frac{\cos c}{\sin 1''} - tg^3 \frac{1}{2} A \frac{\cos 3c}{\sin 3''} + tg^5 \frac{1}{2} A \frac{\cos 5c}{\sin 5''} - \text{enz.}$$

2°. Gegeven zijnde de rechthoekszijde b en de scheve hoek A , te vinden de zijde a en de hypothenusa c .

Hiertoe dienen de formules

$$tg a = \sin b \, tg A,$$

$$tg c = tg b \, \sec A.$$

De toepassing der reeksen (B), (E) op de eerste dezer formules geeft

$$\frac{1}{2} a = tg \frac{1}{2} A \frac{\sin b}{\sin 1''} + tg^3 \frac{1}{2} A \frac{\sin 3b}{\sin 3''} + tg^5 \frac{1}{2} A \frac{\sin 5b}{\sin 5''} + \text{enz.}$$

$$a = A - tg^2 \frac{1}{2} b' \frac{\sin 2A}{\sin 1''} + tg^4 \frac{1}{2} b' \frac{\sin 4A}{\sin 2''} - \text{enz.},$$

zijnde hierin $b' = 90^\circ - b$.

De reeks (F) op de tweede der voorgaande formules toepassende, bekomt men

$$c = b + tg^2 \frac{1}{2} A \frac{\sin 2b}{\sin 1''} + tg^4 \frac{1}{2} A \frac{\sin 4b}{\sin 2''} + \text{enz.}$$

3°. Gegeven zijnde de beide rechthoekszijden a , b , te vinden een der scheve hoeken A .

Uit de formule

$$tg A = \frac{tg a}{\sin b} = tg a \sec (90^\circ - b)$$

volgt insgelijks door toepassing der reeks (F), en stellende $90^\circ - b = b'$

$$A = a + tg^2 \frac{1}{2} b' \frac{\sin 2a}{\sin 1''} + tg^4 \frac{1}{2} b' \frac{\sin 4a}{\sin 2''} + \text{enz.}$$

105. Bij de scheethoekige driehoeken doen zich de navolgende gevallen voor, welke met behulp der oneindige reeksen kunnen opgelost worden.

1°. Gegeven zijnde twee zijden a , b met den ingesloten hoek C , te vinden de onbekende hoeken A , B en de derde zijde c .

De onbekende hoeken worden hier berekend door de beide Neperiaansche analogiën

$$tg \frac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b)}{\cos \frac{1}{2} (a + b)} tg (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

$$tg \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} \cot \frac{1}{2} C = \frac{\sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b)} tg (90^\circ - \frac{1}{2} C)$$

Bij toepassing der reeks (E) vindt men gemakkelijk

$$\frac{1}{2} (A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} c + \frac{n \sin C}{\sin 1''} - \frac{n^2 \sin 2C}{\sin 2''} + \frac{n^3 \sin 3C}{\sin 3''} - \text{enz.}$$

waarin
$$n = \frac{\cos \frac{1}{2} (a - b) - \cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b) + \cos \frac{1}{2} (a + b)} = tg \frac{1}{2} a \, tg \frac{1}{2} b$$

$$\frac{1}{2} (A - B) = 90^\circ - \frac{1}{2} c - \frac{m \sin C}{\sin 1''} - \frac{m^2 \sin 2C}{\sin 2''} - \frac{m^3 \sin 3C}{\sin 3''} - \text{enz.}$$

waarin
$$m = \frac{\sin \frac{1}{2} (a + b) - \sin \frac{1}{2} (a - b)}{\sin \frac{1}{2} (a + b) + \sin \frac{1}{2} (a - b)} = \frac{tg \frac{1}{2} b}{tg \frac{1}{2} a}.$$

De eerste dezer reeksen zal convergent zijn, zoodra $n < 1$ of

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a < \cot \frac{1}{2} b, \quad \text{dus } a + b < 180^\circ.$$

In het tegenovergestelde geval, kan men haar vervangen door de navolgende, welke zich daaruit met behulp van den supplements-driehoek op de zijde c beschreven, laat afleiden

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ + \frac{1}{2}C - \frac{1}{n} \frac{\sin C}{\sin 1^\circ} + \frac{1}{n^2} \frac{\sin 2C}{\sin 2^\circ} - \frac{1}{n^3} \frac{\sin 3C}{\sin 3^\circ}$$

en welke thans convergent is.

De tweede dezer reeksen zal altijd convergent zijn, dewijl hier $b < a$ aangenomen is, waaruit volgt $m < 1$.

Ter bepaling der derde zijde c heeft men de vergelijking

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

welke, wanneer men daarin voor $\cos a$, $\cos b$, hunne waarden $\cos^2 \frac{1}{2} a - \sin^2 \frac{1}{2} a$, $\cos^2 \frac{1}{2} b - \sin^2 \frac{1}{2} b$, en voor $\cos c$ beurtelings $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} c$, $2 \cos^2 \frac{1}{2} c - 1$ schrijft, na eene lichte herleiding de beide navolgende vergelijkingen oplevert:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} c &= \sin^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} b \cos^2 \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} \sin a \sin b \cos C \\ \cos^2 \frac{1}{2} c &= \cos^2 \frac{1}{2} a \cos^2 \frac{1}{2} b + \sin^2 \frac{1}{2} a \sin^2 \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} \sin a \sin b \cos C \end{aligned}$$

Om deze uitdrukkingen voor de berekening door middel der reeksen geschikt te maken, schrijve men die onder de navolgende vormen:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2} c &= \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} b \cot^2 \frac{1}{2} a - 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} a \cos C} \\ \cos \frac{1}{2} c &= \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} a \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} b + 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cos C} \end{aligned}$$

Bij toepassing der reeks (D) op elke der grootheden onder het wortelteeken staande, en stellende wederom korthedshalve

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} a = m, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b = n,$$

bekomt men terstond de beide reeksen

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2} c &= \log \sin \frac{1}{2} a + \log \sin \frac{1}{2} b \\ &\quad - M \left\{ m \cos C + \frac{m^2}{2} \cos 2C + \frac{m^3}{3} \cos 3C + \text{enz.} \right\}, \end{aligned}$$

$$\log \cos \frac{1}{2} c = \log \cos \frac{1}{2} a + \log \cos \frac{1}{2} b \\ + M \left\{ n \cos C - \frac{n^2}{2} \cos 2C + \frac{n^3}{3} \cos 3C - \text{enz.} \right\},$$

waarin M den modulus van het Briggsiaansche logarithmen-stelsel beteekent.

Stelt b de kleinste der gegeven zijden voor, dan is $m < 1$, en de eerste reeks dus convergent. De tweede zal insgelijks convergent zijn, indien $n < 1$ of $a + b < 180^\circ$ is. In het tegenovergestelde geval, zal men haar, met behulp van den supplements-driehoek op de zijde c , door de navolgende vervangen

$$\log \cos \frac{1}{2} c = \log \sin \frac{1}{2} a + \log \sin \frac{1}{2} b \\ + M \left\{ \frac{1}{n} \cos C + \frac{1}{2n^2} \cos 2C + \frac{1}{3n^3} \cos 3C - \text{enz.} \right\}$$

2°. Gegeven zijnde eene zijde c met de beide aanliggende hoeken A, B, te vinden de zijden a , b benevens den derden hoek C.

Uit de beide Neperiaansche analogien

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (a + b) = \frac{\cos \frac{1}{2} (A - B)}{\cos \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \frac{1}{2} (A - B)}{\sin \frac{1}{2} (A + B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2} c,$$

welke tot berekening der onbekende zijden a , b dienen, zal men op gelijke wijze als in het voorgaande geval, de twee navolgende reeksen kunnen afleiden:

$$\frac{1}{2} (a + b) = \frac{1}{2} c + p \frac{\sin c}{\sin 1''} + p^2 \frac{\sin 2c}{\sin 2''} + p^3 \frac{\sin 3c}{\sin 3''} + \text{enz.}$$

zijnde hierin $p = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B$.

$$\frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} c - q \frac{\sin c}{\sin 1''} + q^2 \frac{\sin 2c}{\sin 2''} - q^3 \frac{\sin 3c}{\sin 3''} + \text{enz.}$$

zijnde hierin $q = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} A$.

De eerste dezer reeksen is alleen convergent ingeval van $A + B < 180^\circ$, en dus $p < 1$. In het tegenovergestelde geval vindt men, met behulp van den supplements-driehoek op de zijde c ,

$$180^\circ - \frac{1}{2} (a + b) = \frac{1}{2} c + \frac{1}{p} \frac{\sin c}{\sin 1''} + \frac{1}{p^2} \frac{\sin 2c}{\sin 2''} + \frac{1}{p^3} \frac{\sin 3c}{\sin 3''} + \text{enz.}$$

De tweede reeks is altijd convergent, vermits $B < A$ en dus $q < 1$ aangenomen is.

Ter berekening van den onbekenden hoek C heeft men de vergelijking

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B,$$

waaruit door eene gelijksoortige substitutie als in het voorgaande geval, afgeleid wordt

$$\sin^2 \frac{1}{2} C = \sin^2 \frac{1}{2} A \sin^2 \frac{1}{2} B + \cos^2 \frac{1}{2} A \cos^2 \frac{1}{2} B - \frac{\sin A \sin B}{2} \cos c,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} C = \cos^2 \frac{1}{2} A \sin^2 \frac{1}{2} B + \cos^2 \frac{1}{2} B \sin^2 \frac{1}{2} A + \frac{\sin A \sin B}{2} \cos c.$$

Dus

$$\sin \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sqrt{\{1 + \cot^2 \frac{1}{2} A \cot^2 \frac{1}{2} B - 2 \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B \cos c\}}$$

$$\cos \frac{1}{2} C = \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sqrt{\{1 + \tan^2 \frac{1}{2} B \cot^2 \frac{1}{2} A + 2 \tan \frac{1}{2} B \cot \frac{1}{2} A \cos c\}}$$

en verder, met toepassing der reeks (D),

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2} C &= \log \sin \frac{1}{2} A + \log \sin \frac{1}{2} B \\ &\quad - M \left\{ \frac{\cos c}{p} + \frac{\cos 2c}{2p^2} + \frac{\cos 3c}{3p^3} + \text{enz.} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos \frac{1}{2} C &= \log \sin \frac{1}{2} A + \log \cos \frac{1}{2} B \\ &\quad + M \left\{ q \cos c - \frac{q^2}{2} \cos 2c + \frac{q^3}{3} \cos 3c - \text{enz.} \right\} \end{aligned}$$

waarin de getallen p en q dezelfde waarden als hiervoren hebben.

De eerste dezer reeksen is convergent, indien $p > 1$ of $A+B > 180^\circ$. In het tegenovergestelde geval, vindt men met behulp van den supplementen-driehoek op de zijde c ,

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2} C &= \log \cos \frac{1}{2} A + \log \cos \frac{1}{2} B \\ &\quad - M \left\{ p \cos c + \frac{p^2}{2} \cos 2c + \frac{p^3}{3} \cos 3c + \text{enz.} \right\} \end{aligned}$$

De tweede reeks is altijd convergent, vermits de kleinste der hoeken door B kan voorgesteld worden, en dus $q < 1$ is.

§ XIX.

Over het berekenen der oppervlakte van een bolvormigen driehoek.

106. Indien men het oppervlak van den bol O noemt, en het spherisch exces $A + B + C - 180^\circ = 2\delta$ stelt, dan zal, gelijk in de meetkunde geleerd wordt, het oppervlak des bolvormigen driehoeks ABC uitgedrukt worden door $\frac{\delta}{4R} \times O$, of in vierkante lengte-eenheden, door $\frac{\delta}{R} \times r^2 \pi$, waarin R den rechten hoek, en r den straal des bols beteekent. In enkele gevallen der bolvormige driehoeksmeting laat zich de waarde van δ of van het halve spherische exces, onmiddellijk uit de gegevene elementen des driehoeks berekenen, zoo als wij thans zullen aantonen.

Uit de in n^o. 95 betoogde formules (18) en (20) volgt:

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c}, \\ \cos \frac{1}{2}(A+B) &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c}.\end{aligned}$$

De eerste met $\sin \frac{1}{2}C$, en de tweede met $\cos \frac{1}{2}C$ vermenigvuldigd zijnde, zoo geeft het verschil dezer produkten

$$-\cos \frac{1}{2}(A+B+C) = \sin \delta = \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c} \sin C \dots (1)$$

Dezelfde formules geven, door de eerste met $\cos \frac{1}{2}C$, en de tweede met $\sin \frac{1}{2}C$ te vermenigvuldigen, en vervolgens de som der produkten te nemen,

$$\begin{aligned}\sin \frac{1}{2}(A+B+C) &= \cos \delta \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) \cos^2 \frac{1}{2}C + \cos \frac{1}{2}(a+b) \sin^2 \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)(1+\cos C) + \cos \frac{1}{2}(a+b)(1-\cos C)}{2 \cos \frac{1}{2}c} \\ &= \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b + \sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b \cos C}{\cos \frac{1}{2}c} \dots (2)\end{aligned}$$

De vergelijkingen (2) en (1) door elkander deelende, komt er

$$\cot \delta = \frac{\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C} \dots (3)$$

waardoor δ uit twee zijden met den ingesloten hoek kan worden bepaald.

Om de voorgaande formule voor de logarithmische berekening meer geschikt te maken, stelle men, indien $C < 90^\circ$,

$$\frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b}{\cos C} = \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

dan wordt $\cot \delta = \sec^2 \varphi \cot C,$

of $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} C \cos^2 \varphi.$

Is $C > 90^\circ$, dan stelle men $C = 90^\circ + C'$, en verder de breuk

$$\frac{\cot \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} b}{\sin C'} = \sin^2 \varphi \text{ of } = \sec^2 \varphi,$$

naar dat hare getallen-waarde $<$ of > 1 .

In het eerste geval vindt men

$$\cot \delta = -\cos^2 \varphi \operatorname{tg} C',$$

en in het tweede

$$\cot \delta = \operatorname{tg}^2 \varphi \operatorname{tg} C'.$$

107. Schrijft men de form. (1) onder den navolgenden vorm

$$\sin \delta = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

dan zal, stellende als in n°. 98 de wortel-uitdrukking

$$2\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)} = P,$$

en, in aanmerking nemende dat, volgens form. (95) van n°. 94

$$\sin C = \frac{P}{\sin a \sin b},$$

hieruit afgeleid worden:

$$\sin \delta = \frac{P}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \dots \dots \dots (4)$$

waardoor δ uit de drie zijden des driehoeks kan worden berekend.

Er bestaat echter eene voor de logarithmische berekening meer

geschikte uitdrukking voor δ , waartoe men onder anderen op de navolgende gemakkelijke wijze kan geraken.

Daar namelijk

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B)}{\cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

en dus

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(A+B) - \cos \frac{1}{2}C}{\sin \frac{1}{2}(A+B) + \cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b) - \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(a-b) + \cos \frac{1}{2}c},$$

zoo vindt men hieruit door de gebruikelijke herleiding

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta \cot \frac{1}{4}(180^\circ + A + B - C) &= \operatorname{tg} \frac{1}{4}(a + c - b) \operatorname{tg} \frac{1}{4}(b + c - a) \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - a) \quad . \quad (5) \end{aligned}$$

Eveneens besluit men uit de vergelijking

$$\begin{aligned} \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}C} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}c}, \\ \frac{\cos \frac{1}{2}(A+B) - \sin \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}(A+B) + \sin \frac{1}{2}C} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b) - \cos \frac{1}{2}c}{\cos \frac{1}{2}(a+b) + \cos \frac{1}{2}c} \end{aligned}$$

dus ook

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta \operatorname{tg} \frac{1}{4}(180^\circ + A + B - C) &= \operatorname{tg} \frac{1}{4}(a + b + c) \operatorname{tg} \frac{1}{4}(a + b - c) \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - c) \quad . \quad . \quad (6) \end{aligned}$$

Vermenigvuldigende (5) en (6) met elkander, zoo verkrijgen wij hierdoor ter berekening van het spherisch exces δ de fraaije formule

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{1}{2}s \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(s - c)} \quad . \quad (7)$$

welke men aan LHUILLIER verschuldigd is.

De formules (1), (2) en (3) op den rechthoekigen driehoek waarin $C = 90^\circ$ toepassende, bekomen wij voor dat bijzonder geval:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{\sin \frac{1}{2}a \sin \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c}, \\ \cos \delta &= \frac{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b}{\cos \frac{1}{2}c}, \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}b, \\ \sin 2\delta &= \frac{\sin a \sin b}{2 \cos^2 \frac{1}{2}c} = \frac{\sin a \sin b}{1 + \cos c}, \\ \cos 2\delta &= \frac{\cos a + \cos b}{1 + \cos c}, \quad \operatorname{tg} 2\delta = \frac{\sin a \sin b}{\cos a + \cos b}. \end{aligned}$$

§ XX.

Bijzondere gevallen van oplossing.

108. Voor de oplossing van een geval van driehoeksmeting is het niet noodzakelijk, dat de gegevens elementen van den driehoek zijn; elke drie onderling onafhankelijke combinatiën van elementen, zullen evenzoo voldoende zijn om den driehoek te bepalen. Ook bepaalde betrekkingen tusschen twee of meer elementen kunnen in plaats van de gegevens treden. Van een en ander zullen wij eenige voorbeelden behandelen en daarbij telkens den driehoek als bekend aanmerken, wanneer op eene of andere wijze drie elementen afzonderlijk zijn berekend, zoodat het geval tot een der hoofdgevallen van § XVII is teruggebracht.

1^o Voorbeeld. Gegeven eene zijde a , de tegenovergelegen hoek A en de som of het verschil der beide andere zijden of hoeken.

Door de formules van GAUSS

$$\sin \frac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b - c)}{\cos \frac{1}{2}a} \cos \frac{1}{2}A,$$

$$\sin \frac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b - c)}{\sin \frac{1}{2}a} \cos \frac{1}{2}A,$$

$$\cos \frac{1}{2}(B + C) = \frac{\cos \frac{1}{2}(b + c)}{\cos \frac{1}{2}a} \sin \frac{1}{2}A,$$

$$\cos \frac{1}{2}(B - C) = \frac{\sin \frac{1}{2}(b + c)}{\sin \frac{1}{2}a} \sin \frac{1}{2}A,$$

kan men in elk dezer gevallen twee onbekende elementen van den driehoek berekenen en daarna door de sinusformule de andere.

2^o Voorbeeld. Gegeven twee zijden a en b , benevens het verschil of de som der tegenovergelegen hoeken A en B .

Door de formule (24) van § XVI vindt men in elk der beide gevallen de hoeken A en B .

3^o Voorbeeld. Gegeven eene zijde c , een aangelegen hoek B en het verschil der beide andere zijden a en b .

Uit de formules voor de tangenten der halve hoeken uitgedrukt in de drie zijden, volgt:

$$\sin(s - a) \tan \frac{1}{2}A = \sin(s - b) \tan \frac{1}{2}B.$$

Hierin zijn nu c en $a - b$ bekend, dus heeft men ook $(s - a)$ en $(s - b)$, zoodat A kan berekend worden, waardoor drie elementen des driehoeks gevonden zijn.

4e Voorbeeld. Gegeven (fig. 42) de hoek C , de loodlijn $CD = p$ en de som der twee zijden $a + b = p$.

Uit de formules

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin a \sin B, \\ \sin b \sin C &= \sin c \sin B, \\ \text{volgt} \quad \sin a \sin b &= \frac{\sin c \sin \varphi}{\sin C} \dots \dots \dots (a). \end{aligned}$$

Verder is

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin c \cos C \\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b + 2 \sin a \sin b \cos^2 \frac{1}{2} C \end{aligned}$$

of, lettende op formule (a),

$$\cos c = \cos p + \sin \varphi \sin c \cot \frac{1}{2} C$$

waarin het element c de eenige onbekende is. Om haar op te lossen, stellen wij

$$\sin \varphi \cot \frac{1}{2} C = \cot q,$$

dan wordt

$$\sin (q - c) = \cos p \sin q,$$

waaruit de waarde van c wordt gevonden; daarna vindt men gemakkelijk de nog onbekende elementen.

109. Wij zullen nu een paar voorbeelden behandelen, waarbij tusschen de gegevens bepaalde betrekkingen bestaan.

Zij in de eerste plaats de driehoek *gelijkbeenig* en stellen wij $a = b$, dan is ook (n°. 79) $A = B$. De grondformules geven in deze onderstelling

$$\begin{aligned} \cos c + \tan a \sin c \cos A &= 1, \\ \cos c &= \cos^2 a + \sin^2 a \cos C, \\ -\cos C + \tan A \sin C \cos a &= 1, \\ \cos C &= -\cos^2 A + \sin^2 A \cos c. \end{aligned}$$

Deze vier formules zijn toereikende voor alle gevallen van oplos-

sing. Door herleiding en ook door middel van de formules van § XVI vindt men:

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \cot a \tan \frac{1}{2} c, \\ \sin \frac{1}{2} C &= \frac{\sin \frac{1}{2} c}{\sin a}, \\ \cos a &= \cot A \cot \frac{1}{2} C, \\ \cos \frac{1}{2} c &= \frac{\cos \frac{1}{2} C}{\sin A}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

welke formules ook onmiddellijk uit de figuur kunnen gevonden worden, wanneer men de loodlijn uit den top op de basis trekt.

Is de driehoek *gelijkzijdig*, dan is

$$\begin{aligned} a &= b = c \\ A &= B = C, \end{aligned}$$

en hierdoor vindt men als de eenige goniometrische betrekking

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \cot a \tan \frac{1}{2} a \\ \cos a &= \cot A \cot \frac{1}{2} A \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

waardoor de zijde uit den hoek en de hoek uit de zijde kan berekend worden.

110. Onderstellen wij dat de hoeken verbonden zijn door de betrekking

$$C = A + B.$$

Men zal alsdan ter berekening der onbekende elementen, het navolgende stelsel formules vinden, waarvan wij het betoog aan den lezer ter oefening mogen overlaten:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} a &= -\cot B \cot C, & \sin^2 \frac{1}{2} b &= -\cot A \cot C, \\ \cos^2 \frac{1}{2} c &= \cot A \cot B, & \sin^2 \frac{1}{2} c &= \sin^2 \frac{1}{2} a + \sin^2 \frac{1}{2} b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} a &= \sin \frac{1}{2} (b + c) \sin \frac{1}{2} (c - b), \\ \sin^2 \frac{1}{2} b &= \sin \frac{1}{2} (a + c) \sin \frac{1}{2} (c - a), \\ \cos^2 \frac{1}{2} c &= \cos \frac{1}{2} (a + b) \cos \frac{1}{2} (a - b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos A &= \tan \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c \\ \cos B &= \tan \frac{1}{2} a \cot \frac{1}{2} c, \\ \cos C &= -\tan \frac{1}{2} a \tan \frac{1}{2} b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{2}(a+b) &= \cos \frac{1}{2}c \cot \frac{1}{2}C, & \cos \frac{1}{2}(a-b) &= \cos \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}C, \\ \sin \frac{1}{2}(c+b) &= \sin \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}A, & \sin \frac{1}{2}(c-b) &= \sin \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{2}C &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}A &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}(C-B) = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(c-b)}{\sin \frac{1}{2}(c+b)}}.\end{aligned}$$

Uit de voorgaande formules blijkt dat twee gegevens voldoende zijn ter bepaling eens driehoeks, waarin een der hoeken gelijk aan de som der beide overigen is.

Beschouwen wij thans den supplements-driehoek op de zijde c , dan gaan A en B gelijk mede a en b in hunne supplementen over, en het is klaar dat hieruit alsdan een driehoek ontstaat, waarin de som der hoeken gelijk aan vier rechte hoeken is. Voor het bijzonder geval dus van

$$A + B + C = 360^\circ,$$

veranderen de formules hiervoren gevonden in de navolgende:

$$\cos^2 \frac{1}{2}a = \cot B \cot C. \quad \cos^2 \frac{1}{2}b = \cot A \cot C. \quad \cos^2 \frac{1}{2}c = \cot A \cot B.$$

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{1}{2}a + \sin^2 \frac{1}{2}b + \sin^2 \frac{1}{2}c &= 2, \\ \cos a + \cos b + \cos c &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{1}{2}a &= -\cos \frac{1}{2}(b+c) \cos \frac{1}{2}(b-c), \\ \cos^2 \frac{1}{2}b &= -\cos \frac{1}{2}(a+c) \cos \frac{1}{2}(a-c), \\ \cos^2 \frac{1}{2}c &= -\cos \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cot \frac{1}{2}b \cot \frac{1}{2}c, \\ \cos B &= -\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}c, \\ \cos C &= -\cot \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}b,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{1}{2}(a+b) &= -\cos \frac{1}{2}c \cot \frac{1}{2}C, & \cos \frac{1}{2}(a-b) &= \cos \frac{1}{2}c \operatorname{tg} \frac{1}{2}C, \\ \cos \frac{1}{2}(b+c) &= -\cos \frac{1}{2}a \cot \frac{1}{2}A, & \cos \frac{1}{2}(b-c) &= \cos \frac{1}{2}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}A, \\ \cos \frac{1}{2}(a+c) &= -\cos \frac{1}{2}b \cot \frac{1}{2}B, & \cos \frac{1}{2}(a-c) &= \cos \frac{1}{2}b \operatorname{tg} \frac{1}{2}B,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{1}{2}C &= -\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) = \sqrt{-\frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}}, \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \times \sqrt{-\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)}}.\end{aligned}$$

Deze beide laatste formules zullen , na behoorlijke letter-verwisseling, insgelijks geldig zijn voor twee andere hoeken des driehoeks.

De poolddriehoek des eersten driehoeks zal de eigenschap hebben dat

$$a + b - c = 180^{\circ},$$

terwijl die des tweeden zal geven

$$a + b + c = 180^{\circ}.$$

De formules tot deze twee bijzondere gevallen betrekking hebbende, laten zich dus op de bekende wijze onmiddellijk uit de beide voorgaande stelsels afleiden.

§ XXI.

Oplossing van eenige vraagstukken door middel van de bolvormige driehoeksmeting.

111. Nademaal de bolvormige driehoeksmeting hare voornaamste toepassing vindt in de aardrijks-, sterre- en zeevaartkunde, zoo verwijzen wij te dezen aanzien naar de leerboeken over die onderwerpen, en zullen ons alzoo slechts bepalen bij enkele vraagstukken van zuiver meetkundigen aard, ten einde tot toepassing der gelegde gronden te kunnen strekken.

112. *IC VRAAGSTUK.* *Uit een punt A, genomen in de gemeene doorsnede van twee vlakken P, Q, zijn twee lijnen AB, AC in het eene, en in het andere dezer vlakken getrokken; zoo nu de hoeken a, b, c, bekend zijn, welke die beide lijnen zoo onderling, als elk met de gemeene doorsnede der twee vlakken vormen, vraagt men de hoeken te bepalen, waaronder deze lijnen AB, AC op de vlakken Q en P hellen.*

Oplossing. Het punt A het toppunt eens drievlakkigen hoeks zijnde, zoo beschouwe men het als middelpunt eens bols, en men zal dadelijk inzien dat in den bolvormigen driehoek, welke uit dezen drievlakkigen hoek ontstaat, de drie zijden a, b, c gegeven zijn, en het er slechts op aankomt de waarden te bepalen der loodrechte bogen φ, φ' , vallende op de zijden c, b .

Nu is in fig. 42

$$\sin CD = \sin a \sin B,$$

terwijl uit de form. (15) § XVI volgt

$$\sin B = \frac{2\sqrt{[\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)]}}{\sin a \sin c}$$

Derhalve

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sin c} \sqrt{[\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)]} \quad (1)$$

en door c in b te veranderen,

$$\sin \varphi' = \frac{2}{\sin b} \sqrt{[\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)]}.$$

Schrijvende in de laatste formule a voor b , dan bepaalt men hierdoor tevens den hoek, welken de gemeene doorsnede der vlakken P, Q vormt met het vlak, gaande door de lijnen AB, AC.

113. II^e VRAAGSTUK. *Bijaldien in het vorige vraagstuk de standhoeken A, B, C der drie zijvlakken, in plaats van de hoeken a, b, c der drie ribben gegeven zijn, vraagt men dezelfde hoeken als voren te bepalen.*

Oplossing. In de vergelijking

$$\sin \varphi = \sin a \sin B,$$

voor $\sin a$ zijne waarde stellende, afgeleid uit de form. (17) § XVI, zoo vindt men

$$\sin \varphi = \frac{2}{\sin C} \sqrt{[-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)]},$$

en door verandering van C in B,

$$\sin \varphi' = \frac{2}{\sin B} \sqrt{[-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)]}.$$

114. III^e VRAAGSTUK. *Gegeven zijnde de standhoek der vlakken P, Q, benevens de hoeken welke de lijnen AB, AC met de gemeene doorsnede dezer vlakken vormen, zoo vraagt men den hoek te bepalen, waaronder deze doorsnede op het vlak der lijnen AB, AC kelt.*

Oplossing. Men zal met weinig moeite inzien dat dit vraagstuk hetzelfde is als dat om den loodrechten boog φ op eenige zijde c eens bolvormigen driehoeks te bepalen, wanneer de beide overige zijden a en b , benevens de ingesloten hoek C gegeven zijn.

Men kan hierbij aldus te werk gaan. Volgens de 3^e oplossing van het III^e geval, § XVII, is

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(Q - P) &= \frac{\sin(a - b)}{\sin(a + b)} \cot \frac{1}{2}C, \\ Q &= \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}(Q - P), \quad P = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(Q - P). \end{aligned}$$

De loodrechte boog $CD = \varphi$ wordt alsdan berekend door eene der formules

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} a \cos Q, \quad \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos P.$$

De waarde van φ laat zich tevens rechtstreeks door middel der gegevens a , b , C op de volgende wijze uitdrukken.

Men heeft namelijk de vergelijking

$$\operatorname{tg} a \cos Q = \operatorname{tg} b \cos(C - Q),$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$\operatorname{tg} Q = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b \cos C}{\operatorname{tg} b \sin C},$$

waaruit

$$\sec^2 Q = 1 + \operatorname{tg}^2 Q = \frac{\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos C}{\operatorname{tg}^2 b \sin^2 C}.$$

Nu volgt uit de vergelijking

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} a \cos Q, \\ \cot \varphi &= \frac{\sec Q}{\operatorname{tg} a}, \end{aligned}$$

welke, na substitutie der zoo even gevondene uitdrukking voor $\sec Q$, overgaat in

$$\begin{aligned} \cot \varphi &= \frac{\sqrt{(\operatorname{tg}^2 a + \operatorname{tg}^2 b - 2 \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \cos C)}}{\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \sin C} \\ &= \frac{\sqrt{\{\cot^2 a + \cot^2 b - 2 \cot a \cot b \cos C\}}}{\sin C}. \end{aligned}$$

115. IV^c VRAAGSTUK. *Den standhoek van elk der vijf regelmatig lichamen te berekenen.* Noemende dezen standhoek A, den vlakken hoek a , dan vindt men met behulp van de formules (1) en (2), die in n^o. 109 gevonden zijn, voor de gelijkbeenige en gelijkzijdige bolvormige driehoeken :

1^o. Voor het regelmatige vierolak :

$$a = 60^{\circ}. \quad \cos A = \frac{1}{3}. \quad A = 70^{\circ}31'44''.$$

2^o. Voor het regelmatige zesvlak (cubus) :

$$a = 90^{\circ}. \quad A = 90^{\circ}.$$

3^o. Voor het regelmatige achtholak :

$$a = 60^{\circ}. \quad \cos A = -\frac{1}{3}. \quad A = 109^{\circ}28'10''.$$

4^o. Voor het regelmatige twaalfolak :

$$a = 108^{\circ}. \quad \cos A = \cot 180^{\circ} \tan 54^{\circ} = -\frac{1}{3} \sqrt{5}. \\ \tan A = -2. \quad A = 116^{\circ}33'54''.$$

5^o. Voor het regelmatige twintigvlak :

$$a = 60^{\circ}. \quad \sin \frac{1}{2} A = \frac{2 \sin 54^{\circ}}{\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{3}} \\ \sin A = \frac{2}{3}. \quad A = 138^{\circ}41'23''.$$

116. V^c VRAAGSTUK. *Den inhoud van een parallelopipedum uit te drukken in de lengte der ribben en de hoeken die zij met elkander maken.*

Zij (fig. 45) in het parallelopipedum OP:

$$OA=a, OB=b, OC=c, \angle BOC=\alpha, \angle AOC=\beta, \angle AOB=\gamma$$

en verder AD de loodlijn uit A op het grondvlak neergelaten, dan is de gevraagde inhoud

$$I = \text{inh. parallel. BC} \times \text{AD}.$$

Nu is (§ IX)

$$\text{inh. parall. BC} = bc \sin \alpha;$$

en in $\triangle AOD$

$$\text{AD} = a \sin \text{AOD}.$$

Volgens form. (1) van het I^e Vraagstuk is echter

$$\sin AOD = \frac{2}{\sin \alpha} \vee [\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)],$$

waarin $s = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma)$

derhalve

$$I = 2abc \vee [\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)] \quad . \quad (2)$$

door welke regelmatige formule de inhoud van een scheefhoekig parallelipedum uit zijne ribben en vlakke hoeken kan berekend worden.

Voor den inhoud van een driehoekig prisma, uitgedrukt in drie ribben en de overeenkomstige vlakke hoeken van denzelfden drievlakkigen hoek, vindt men uit (2)

$$I' = abc \vee [\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)]$$

en hieruit voor den inhoud eener driehoekige pyramide uitgedrukt in dezelfde grootheden

$$I'' = \frac{1}{3} abc \vee [\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)].$$

Het zij den lezer tot oefening overgelaten uit deze formule of langs een anderen weg aan te toonen, dat de inhoud eener driehoekige pyramide ook gelijk is aan een zesde van het produkt van twee elkander kruisende ribben, hare gemeenschappelijke loodlijn en den sinus van den hoek, dien zij met elkander vormen.

VI^e VRAAGSTUK. *De horizontale projectie van een hoek BAC (fig. 46) te berekenen, wanneer de hoeken bekend zijn, welke elk der beenen van den gegeven hoek met de vertikaal AA', gaande door het punt A, vormen.*

Oplossing. Men plaatse in het punt A het middelpunt eens bols, waardoor de bolvormige driehoek A'BC ontstaat, en verlange de zijden A'B, A'C tot op het horizontale vlak door A gaande. Daar de bogen A'B', A'C' hierdoor elk een kwadrant worden, zal de hoek BA'C, als door den boog B'C' gemeten, de horizontale projectie B'AC' van den gegeven hoek BAC voorstellen. Men noeme dezen laatsten hoek α , voorts de hoeken BAA', CAA' respectievelijk β , β' . Nu zijn in den voormelden bolvormigen driehoek bekend, de drie zijden α , β , β' , waaruit de begeerde hoek A' zal

moeten bepaald worden. Stellende dezen hoek $= \varphi$, dan heeft men terstond, ingevolge form. (11) § XVI,

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \beta'}{\sin \beta \sin \beta'} \quad (3)$$

welke uitdrukking volmaakt overeenstemt met die, welke wij in het V^e vraagstuk van § XI, ofschoon op eene minder eenvoudige wijze, met behulp der vlakke driehoeksmeting, verkregen hebben.

Voor de logarithmische berekening zal men zich echter van de volgende uit (12) van § XVI afgeleide formule bedienen

$$\sin \frac{1}{2} \varphi = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta' - \beta) \sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \beta')}{\sin \beta \sin \beta'}} \quad . . (4)$$

Nademaal de hoeken β, β' bij de herleiding tot den horizon, weinig van 90° verschillen, zoo wordt, in de toepassing, aan de voorgaande formules nog een anderen vorm gegeven, die wij als voorbeeld van dergelijke vraagstukken zullen ontwikkelen.

Noemen wij de hoeken, die AB en AC met den horizon maken, γ en γ' , dan is

$$\beta = 90^\circ - \gamma, \quad \beta' = 90^\circ - \gamma',$$

en hierdoor gaat form. (3) over in

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \sin \gamma \sin \gamma'}{\cos \gamma \cos \gamma'}.$$

Zijn nu γ en γ' zoo klein, dat geene hoogere dan de tweede machten hunner sinussen in rekening behoeven gebracht te worden, dan is

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \gamma \cos \gamma'} &= (1 - \sin^2 \gamma)^{-\frac{1}{2}} (1 - \sin^2 \gamma')^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} (\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma'), \end{aligned}$$

derhalve

$$\cos \varphi = \cos \alpha - \sin \gamma \sin \gamma' + \frac{1}{2} (\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma') \cos \alpha.$$

Stelt men nu

$$\varphi = \alpha + x$$

dan is x de kleine correctie, die bij α moet gevoegd worden om

φ te verkrijgen en zoo klein, dat de boog gelijk aan de sinus en de cosinus gelijk aan de eenheid mag gesteld worden. Hieruit volgt

$$\cos \varphi = \cos \alpha - \sin \alpha \sin x,$$

en dus

$$\sin \alpha \sin x = \sin \gamma \sin \gamma' - \frac{1}{2} (\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma') \cos \alpha$$

of

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{\sin \gamma \sin \gamma' - \frac{1}{2} (\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma') \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ &= \frac{2 \sin \gamma \sin \gamma' (\sin^2 \frac{1}{2} \alpha + \cos^2 \frac{1}{2} \alpha) - (\sin^2 \gamma + \sin^2 \gamma') (\cos^2 \frac{1}{2} \alpha - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha)}{2 \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \alpha (\sin \gamma + \sin \gamma')^2 - \cos^2 \frac{1}{2} \alpha (\sin \gamma - \sin \gamma')^2}{2 \sin \alpha} \end{aligned}$$

derhalve

$$\sin x = \left(\frac{\sin \gamma + \sin \gamma'}{2} \right)^2 \tan^2 \frac{1}{2} \alpha - \left(\frac{\sin \gamma - \sin \gamma'}{2} \right)^2 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha.$$

Wegens de kleinheid der hoeken γ , γ' , x kan men stellen

$$\sin x = x \sin 1'', \quad \sin \gamma = \gamma \sin 1'', \quad \sin \gamma' = \gamma' \sin 1'',$$

en hierdoor wordt

$$x = \frac{1}{4} \sin 1'' (\gamma + \gamma')^2 \tan^2 \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sin 1'' (\gamma - \gamma')^2 \cot^2 \frac{1}{2} \alpha,$$

zijnde de correctie-formule van LEGENDRE.

118. VIIe *Vraagstuk*. Wanneer men door de hoekpunten eens bolvormigen driehoeks een kleinen cirkel laat gaan, vraagt men de plaats te bepalen van de pool van dezen omgeschreven cirkel.

Oplossing. Zij ABC (fig. 47) de driehoek en m de pool des omgeschreven cirkels, dan zal, trekkende uit m de bogen van groote cirkels mA , mB , mC , elk dezer bogen als de spherische straal van den voornoemden kleinen cirkel te beschouwen zijn. Men stelle dezen straal $= R$, voorts $\angle mA B = \angle m B A = \alpha$, $\angle m A C = \angle m C A = \beta$ en $\angle m B C = \angle m C B = \gamma$, dan is klaarblijkelijk

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= \frac{1}{2} (A + B + C) = S \\ \alpha &= \frac{1}{2} (A + B - C) = S - C \\ \beta &= \frac{1}{2} (A + C - B) = S - B \\ \gamma &= \frac{1}{2} (B + C - A) = S - A. \end{aligned}$$

Trekt men nu den loodrechten boog mn op de zijde BC , dan geeft de rechthoekige driehoek mnC

$$ty \frac{1}{2} a = ty R \cos \gamma,$$

en dus

$$\cot R = \cos (S - A) \cot \frac{1}{2} a.$$

Op gelijke wijze zoude men vinden

$$\cot R = \cos (S - B) \cot \frac{1}{2} b,$$

$$\cot R = \cos (S - C) \cot \frac{1}{2} c.$$

Stellende hierin voor $\cot \frac{1}{2} a$, $\cot \frac{1}{2} b$, $\cot \frac{1}{2} c$ hare waarden volgens form. (17) § XVI, dan komt er

$$\cot R = \sqrt{\frac{-\cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C)}{\cos S}}.$$

Wil men echter den straal R door middel der drie zijden a , b , c uitdrukken, zoo make men gebruik van de in § XIX gevondene formule (1):

$$\begin{aligned} -\cos S &= \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin C}{\cos \frac{1}{2} c} = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{P}{4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}, \end{aligned}$$

welke, op elken der drie supplements-driehoeken toegepast zijnde, de drie navolgende nieuwe betrekkingen oplevert:

$$\begin{aligned} \cos \frac{1}{2} (A + B - C) &= \cos (S - C) = \frac{\sin a \sin b \sin C}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ &= \frac{P}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c} \\ \cos \frac{1}{2} (A + C - B) &= \cos (S - B) = \frac{P}{4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} b} \\ \cos \frac{1}{2} (B + C - A) &= \cos (S - A) = \frac{P}{4 \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a} \end{aligned}$$

waardoor men voor den straal R bekomt

$$\cot R = \frac{P}{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}.$$

Onderstellen wij thans, dat er om elk der drie supplements-driehoeken op de zijden a , b , c , insgelijks een cirkel beschreven zij, en noemen wij de stralen dezer drie cirkels respectievelijk R_1 , R_2 , R_3 , dan verkrijgen wij terstond, met behulp der voorgaande formule,

$$\cot R_1 = \frac{P}{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c},$$

$$\cot R_2 = \frac{P}{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c},$$

$$\cot R_3 = \frac{P}{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b},$$

waaruit verder volgt

$$\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} R_1} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \operatorname{tg} \frac{1}{2} c, \quad \frac{\operatorname{tg} R_2}{\operatorname{tg} R_3} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \cot \frac{1}{2} c,$$

dus

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} R_1} \frac{\operatorname{tg} R_2}{\operatorname{tg} R_3}},$$

en op gelijke wijze

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} R_2} \frac{\operatorname{tg} R_1}{\operatorname{tg} R_3}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} R}{\operatorname{tg} R_1} \frac{\operatorname{tg} R_2}{\operatorname{tg} R_3}},$$

door welke formules de drie zijden des driehoeks uit de vier stralen der omgeschrevene cirkels kunnen worden berekend.

Aanmerking. De voorgaande formules bevatten tevens de oplossing van het vraagstuk, om binnen een drievlakkigen hoek eene lijn te trekken, makende gelijke hoeken met elke der drie ribben.

119. VIII^e Vraagstuk. *De plaats te bepalen van een punt binnen een bolvormigen driehoek op gelijke afstanden der drie zijden gelegen.*

Oplossing. Dit vraagstuk hetzelfde zijnde als dat om den spherischen straal van den ingeschreven cirkel te bepalen, zoo laat m

(fig. 48) de pool van dezen cirkel voorstellen. Men trekke uit dat punt de loodrechte bogen mp , mq , mr , op de zijden des driehoeks, en verder de bogen mA , mB , mC , waardoor de hoeken A , B , C middendoor gedeeld worden. Zij de straal $mq = r$, $Aq = \alpha$, $Br = \beta$, $Cp = \gamma$, dan is uit de figuur gemakkelijk op te maken, dat

$$\alpha + \beta + \gamma = s, \quad \alpha = s - a, \quad \beta = s - b, \quad \gamma = s - c,$$

$$\text{voorts} \quad tg r = tg \frac{1}{2} A \sin \alpha = tg \frac{1}{2} B \sin \beta = tg \frac{1}{2} C \sin \gamma \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

of, volgens form. (21)

$$tg r = \sqrt{\frac{\sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s}} = \frac{P}{2 \sin s} \quad . \quad . \quad (6)$$

waardoor de straal r uit de drie zijden a , b , c kan worden berekend.

Stellende kortheidshalve

$$2 \sqrt{\{-\cos S \cos(S-A) \cos(S-B) \cos(S-C)\}} = P'$$

dan zullen de in het vorige vraagstuk verkregene waarden van $\cos S$, $\cos(S-A)$, $\cos(S-B)$ en $\cos(S-C)$, voor den pooldriehoek veranderen in

$$\begin{aligned} \sin s &= \frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \sin c}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{P'}{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C}, \\ \sin \alpha &= \frac{\sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C \sin a}{\sin \frac{1}{2} A} = \frac{P'}{4 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}, \\ \sin \beta &= \frac{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C \sin b}{\sin \frac{1}{2} B} = \frac{P'}{4 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} C}, \\ \sin \gamma &= \frac{\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin c}{\sin \frac{1}{2} C} = \frac{P'}{4 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B}, \end{aligned}$$

en hierdoor verkrijgt men, ter berekening van r door middel der drie hoeken, in gevolge formule (6)

$$tg r = \frac{P'}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Beschouwen wij insgelijks de stralen r_1 , r_2 , r_3 der ingeschreven

cirkels van drie supplements-driehoeken op de zijden a , b , c , dan geven de formules (5), (6) en (7)

$$\operatorname{tg} r_1 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \sin s = \frac{P}{2 \sin(s-a)}$$

$$\operatorname{tg} r_2 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \sin s = \frac{P}{2 \sin(s-b)},$$

$$\operatorname{tg} r_3 = \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \sin s = \frac{P}{2 \sin(s-c)},$$

$$\operatorname{tg} r_1 = \frac{P'}{4 \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C},$$

$$\operatorname{tg} r_2 = \frac{P'}{4 \cos \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} C},$$

$$\operatorname{tg} r_3 = \frac{P'}{4 \cos \frac{1}{2} C \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B},$$

waaruit volgt

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r_1} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C. \quad \frac{\operatorname{tg} r_3}{\operatorname{tg} r_2} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} C \cot \frac{1}{2} B.$$

Derhalve

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r_1} \frac{\operatorname{tg} r_3}{\operatorname{tg} r_2}},$$

en op gelijke wijze zal men vinden

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r_2} \frac{\operatorname{tg} r_1}{\operatorname{tg} r_3}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r_1} \frac{\operatorname{tg} r_3}{\operatorname{tg} r_2}};$$

welke formules dienen om de hoeken des driehoeks uit de stralen der vier ingeschreven cirkels te berekenen, en de meeste overeenkomst vertoonen met die voor de omgeschreven cirkels in het vorige vraagstuk gevonden.

Noemen wij nog de stralen der om- en ingeschreven cirkels voor den pooldriehoek R' en r' , dan volgt uit de beide hiervoren be-
toogde formules

$$\cot R = \cos(S-A) \cot \frac{1}{2} a$$

$$\operatorname{tg} r = \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \sin(s-a),$$

op de bekende wijze

$$\cot R' = \sin(s - a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$$

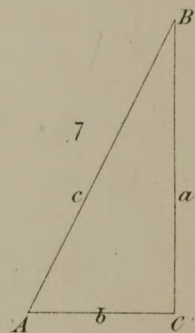
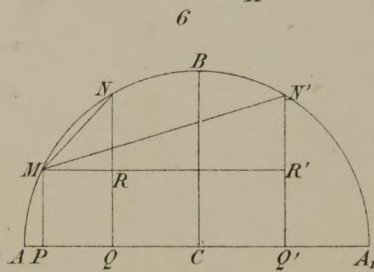
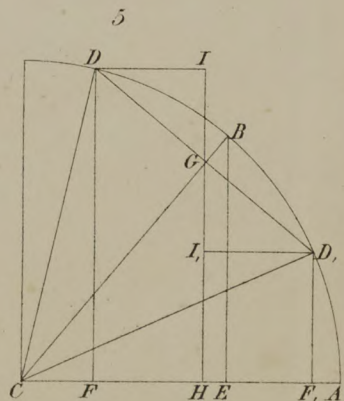
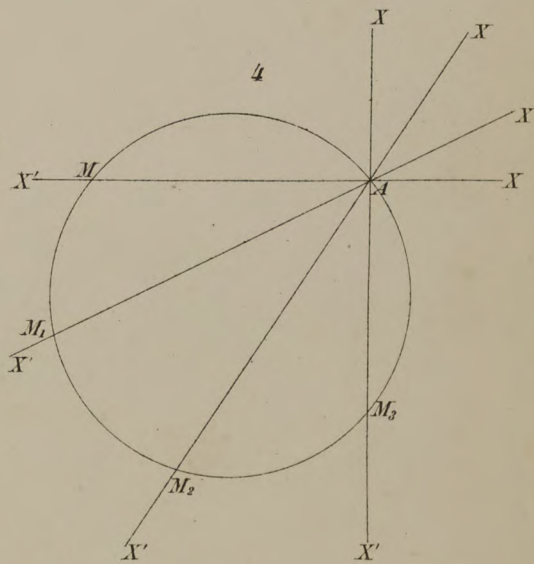
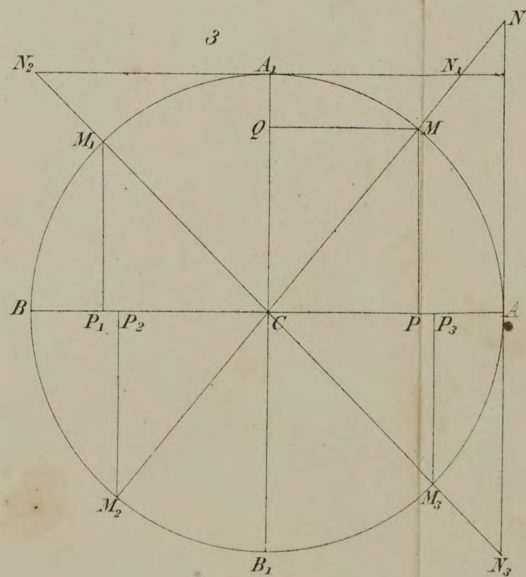
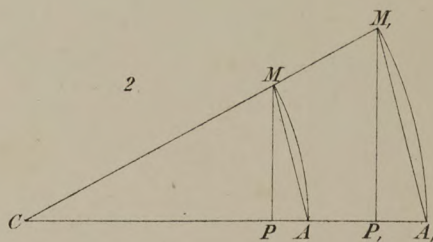
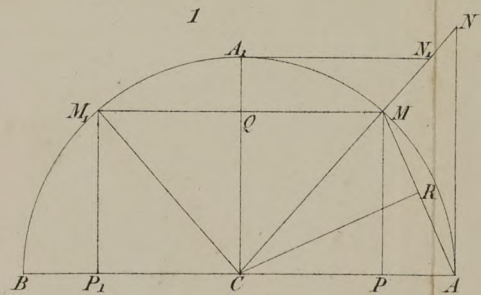
$$\operatorname{tg} r' = \cos(S - A) \cot \frac{1}{2} a.$$

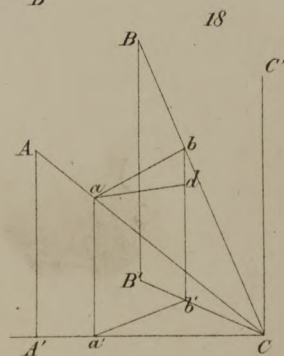
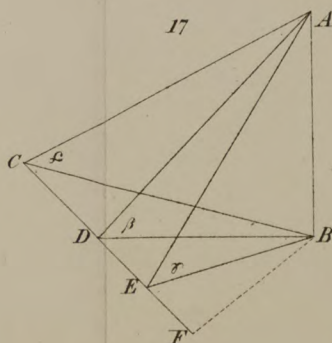
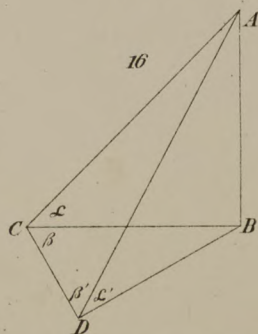
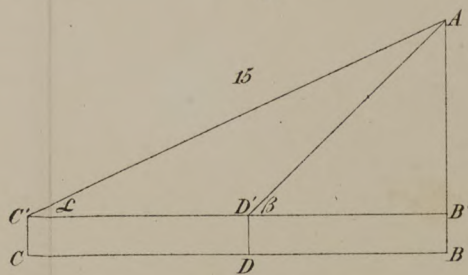
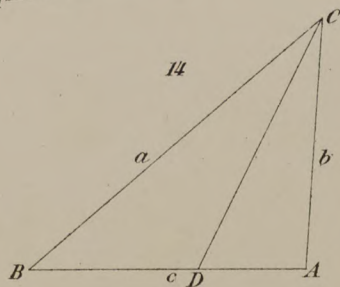
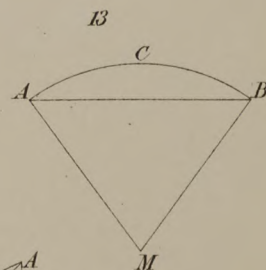
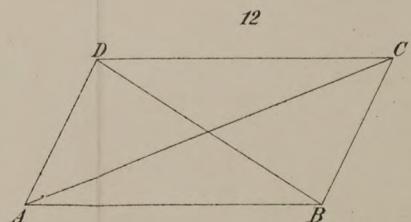
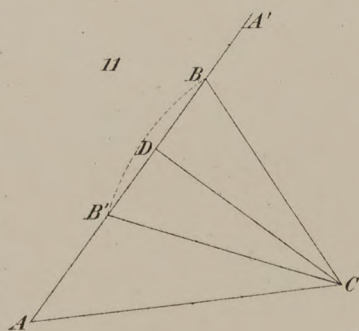
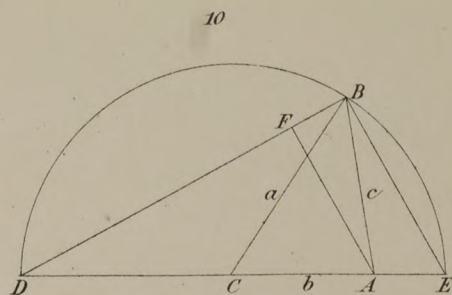
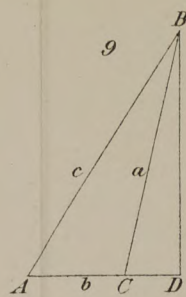
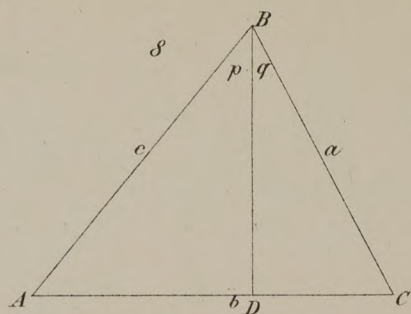
Derhalve $\cot R' = \operatorname{tg} r$ en $\operatorname{tg} r' = \cot R,$

waaruit wij deze merkwaardige eigenschap leeren kennen, dat de spherische stralen der om- en ingeschreven cirkels eens driehoeks respectivelijk de complementen zijn van die der in- en omgeschreven cirkels van den pooldriehoek.

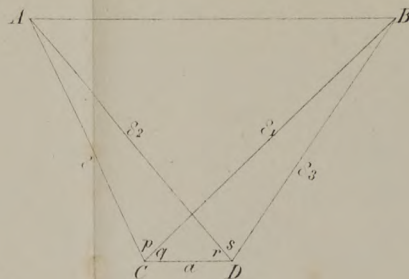
819

20

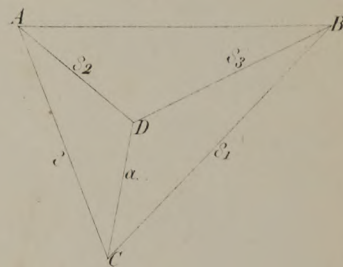




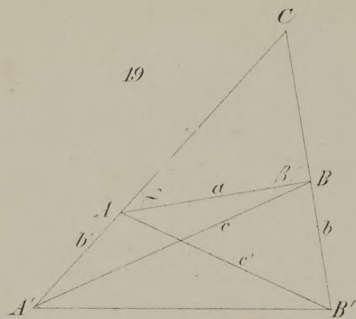
20



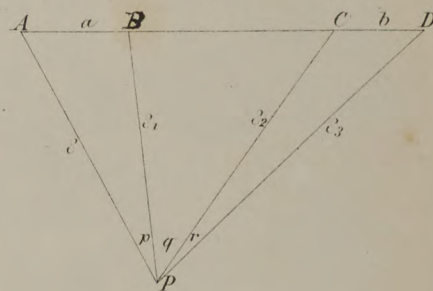
21



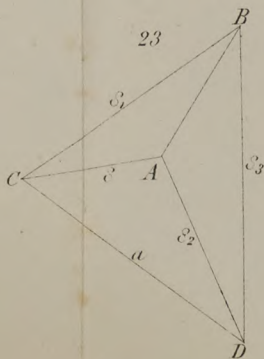
19



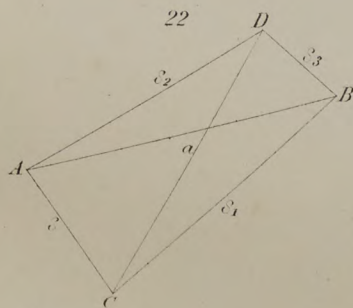
24



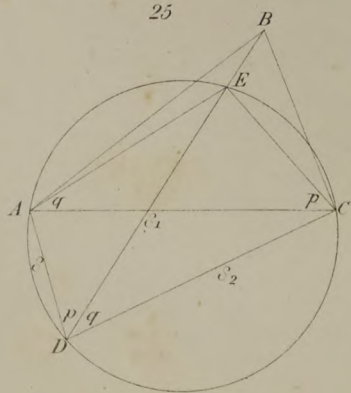
23



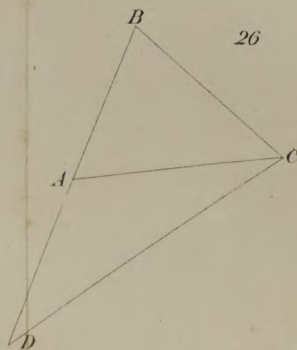
22



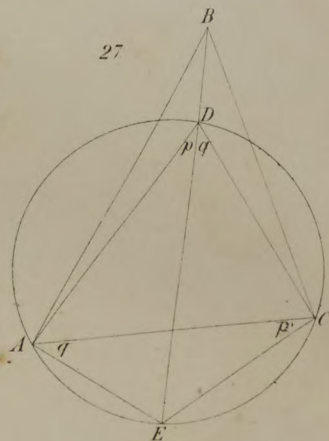
25



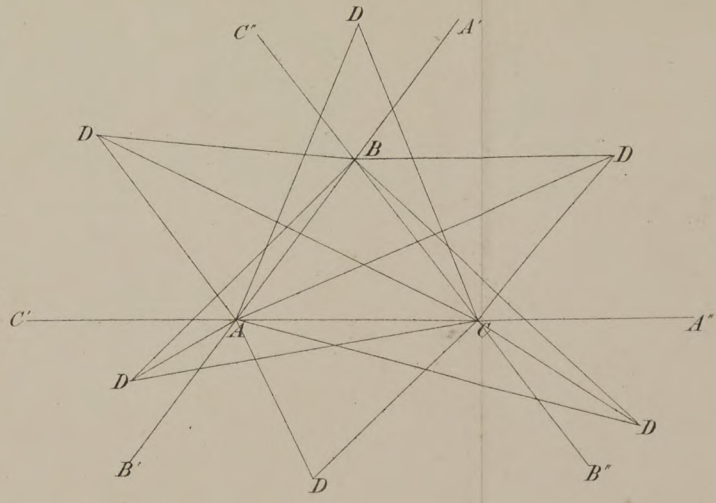
26



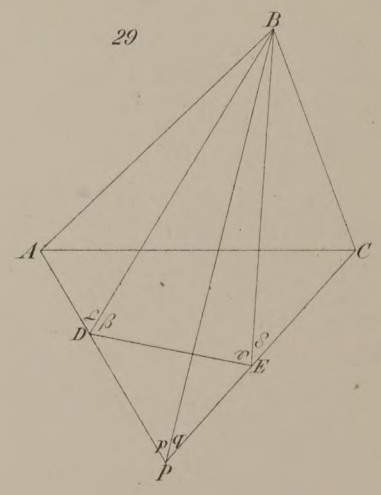
27



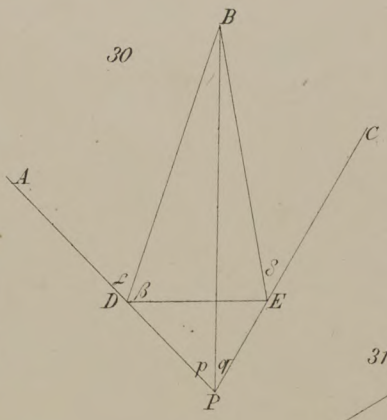
28



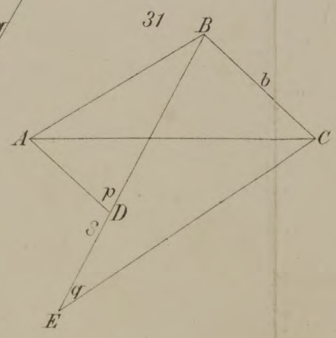
29



30



31



32

