



Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

- + *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
- + *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
- + *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
- + *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via <http://books.google.com>

LEERBOEK DER MEETKUNDE.

1811-3

LEERBOEK

DER

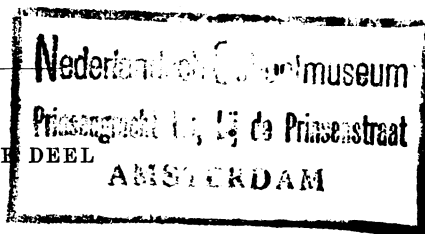
MEETKUNDE,

DOOR

D^R. P. VAN GEER,

HOOGLEERAAR TE LEIDEN.

TWEED DEEL



Meetkunde der ruimte.

TWEEDE DRUK.

TE LEIDEN BIJ A. W. SIJTHOFF.

1879.

I N H O U D.



EERSTE HOOFDSTUK.

Onderlinge stand van lijnen en vlakken in de ruimte.

	Bladz.
§ 1. Het vlak	1.
§ 2. Loodrechte stand van eene lijn en een vlak; richting van een vlak	4.
§ 3. Willekeurige stand van eene lijn en een vlak	8.
§ 4. Onderlinge stand van twee vlakken	11.
§ 5. Onderlinge stand van drie vlakken	15.
§ 6. Eigenschappen van den drievlakkigen hoek	19.
§ 7. Bepaling van den drievlakkigen hoek	24.
§ 8. De veelvlakkige hoek	30.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Veelvlakkige lichamen.

§ 9. Algemeene beschouwingen	34.
§ 10. De pyramide.	41.
§ 11. Het prisma en het prismoïde.	45.
§ 12. De regelmatige lichamen	50.

DERDE HOOFDSTUK.

Gebogen oppervlakken.

§ 13. Kegelvlakken en cylindervlakken	56.
§ 14. Omwentelingsvlakken	59.
§ 15. De kegel en de cylinder	61.
§ 16. De bol	66.
§ 17. De bolvormige driehoek en veelhoek	72.

INHOUD.

VIERDE HOOFDSTUK.

Inhoud van veelvlakkige lichamen.

	Bladz.
§ 18. Eenheid van lichamelijke inhoudsmaat.....	79.
§ 19. Inhoud van het prisma	83.
§ 20. Inhoud van de pyramide	87.
§ 21. Inhoud van het prismoïde	93.

VIJFDE HOOFDSTUK.

Inhoud en oppervlak van lichamen, die door gebogen vlakken worden begrensd.

§ 22. Inhoud en oppervlak van den kegel	103.
§ 23. Inhoud en oppervlak van den cylinder	107.
§ 24. Inhoud en oppervlak van rechte lijnige omwentelingsfiguren	109.
§ 25. Inhoud en oppervlak van den bol en zijne deelen	120.
§ 26. Oppervlak van den bolvormigen driehoek en veelhoek	127.

AANHANGSEL.

Over de regelmatige lichamen	133.
------------------------------------	------

EERSTE HOOFDSTUK.

ONDERLINGE STAND VAN LIJNEN EN VLAKKEN IN DE RUIMTE.

§ 1.

Het vlak.

1. In de inleiding tot het 1^e deel is opgemerkt, dat de meetkunde wordt verdeeld in twee deelen:

1^o. de planimetrie, die zich bezig houdt met de figuren, die geheel in een plat vlak zijn gelegen;

2^o. de stereometrie, die handelt over de figuren in de ruimte.

Wij gaan thans tot dit tweede gedeelte over en beginnen daartoe met eene nadere omschrijving van het platte vlak, die zich bij de vroeger gegeven bepaling (I n^o. 3) aansluit.

Het platte vlak ontstaat, of kan worden gedacht te zijn ontstaan, door de beweging eener rechte lijn. Daar echter niet door elke verplaatsing eener rechte lijn een plat vlak wordt voortgebracht, moet hare beweging nader worden bepaald.

Nu is de rechte lijn, ook in de ruimte, bepaald door de richting en één punt, of door twee punten (I n^o. 4).

Laat men bij de eerste bepaling de richting onveranderd, terwijl het punt eene andere rechte lijn doorloopt, dan zal hierdoor de beweging der oorspronkelijke rechte lijn volkomen en ondubbelzinnig zijn aangewezen, omdat op elken stand slechts één onmiddelijk kan volgen en daaraan slechts één onmiddelijk voorafgaat.

Laat men bij de tweede bepaling der rechte lijn, één punt op zijn plaats en het andere, dat zich ook langs de lijn verplaatst eene rechte lijn doorloopen, die niet door het eerste punt gaat, dan is ook hier de beweging ondubbelzinnig bepaald.

2. Door beide bewegingen ontstaat het platte vlak. De rechte lijn die

zich verplaatst heet beschrijvende lijn, de lijn langs welke de beweging plaats heeft de richtlijn.

Derhalve ontstaat het platte vlak door de beweging eener rechte lijn langs eene andere rechte lijn, of met behoud van hare richting, dus evenwijdig aan zichzelf; of zoodanig, dat zij altijd door een zelfde punt blijft gaan.

Opdat de beweging volkomen bepaald zij, mag bij de eerste wijze van wording de richting der beschrijvende lijn niet met die van de richtlijn samenvallen: bij de tweede, het vaste punt der beschrijvende lijn niet in de richtlijn zijn gelegen.

In het vervolg zal, zoolang hieruit geene dubbelzinnigheid kan ontstaan, het platte vlak eenvoudig met den naam van vlak worden aangeduid.

3. Elke rechte lijn die in een vlak is gelegen kan als richtlijn beschouwd worden, elke andere, die haar snijdt, als beschrijvende lijn. Hieruit volgt, dat elke rechte lijn, waarvan twee punten in een vlak zijn gelegen, geheel in dit vlak valt.

Omgekeerd is een vlak door twee punten niet bepaald, want deze geven wel eene richtlijn, maar hierdoor alleen is de beweging der beschrijvende lijn niet voldoende gegeven.

Doch een vlak zal volkomen bepaald worden, indien gegeven zijn: de richting der lijn, door wier beweging het vlak ontstaat (beschrijvende lijn), en de lijn langs welke de beweging plaats heeft (richtlijn). Derhalve is een vlak bepaald:

1°. door twee elkander snijdende rechte lijnen, omdat de eene als richtlijn kan beschouwd worden, en de andere de richting der beschrijvende lijn aanwijst;

2°. door twee evenwijdige rechte lijnen, omdat zij als twee standen der beschrijvende lijn kunnen aangemerkt worden en eene willekeurige lijn, die door een punt van elk der lijnen gaat, als richtlijn;

3°. door eene rechte lijn en een punt buiten de lijn gelegen, want de lijn kan als richtlijn genomen worden, terwijl het gegeven punt de beweging der beschrijvende lijn verder bepaalt.

Nu blijkt tevens, hoe de beide wijzen van wording, die hierboven van het vlak gegeven zijn, dezelfde figuur bepalen. Dit geval toch wordt tot het vorige teruggebracht, indien men door het gegeven punt eene lijn trekt evenwijdig aan de gegeven rechte lijn. Doch elke wijze van wording brengt uit de gegevens slechts één bepaald vlak voort; de gegevens onder 2°. en 3°. komen overeen, zoodat, hoe de wording ook plaats heeft, steeds hetzelfde vlak ontstaat.

4°. door drie punten; want trekt men door twee dezer punten eene rechte lijn, dan komt men op het voorgaande geval terug; de drie punten mogen dus niet in eene rechte lijn zijn gelegen. De hoekpunten van een driehoek bepalen altijd een vlak.

4. Omgekeerd mag men besluiten, dat:

1^o. twee elkander snijdende rechte lijnen,

2^o. twee evenwijdige rechte lijnen,

3^o. eene rechte lijn en een punt,

4^o. drie punten,

altijd in een vlak zijn gelegen; en ook dat vlakken, die twee rechte snijlijnen of evenwijdige lijnen, drie punten, of eene rechte lijn en een punt buiten de lijn, gemeen hebben, geheel samenvallen.

5. Terwijl in de meetkunde van het platte vlak bij den stand van twee rechte lijnen slechts twee gevallen mogelijk zijn, namelijk snijding of evenwijdigheid, is de beschouwing van twee rechte lijnen in de ruimte meer afwisselend. Wanneer twee lijnen noch elkander snijden, noch evenwijdig loopen, dan noemt men ze elkander kruisende lijnen.

Twee rechte lijnen in de ruimte kunnen dus met betrekking tot elkander op drie wijzen gelegen zijn:

1^o. in evenwijdigen stand, wanneer zij de richting gemeen hebben;

2^o. dat zij elkander snijden, wanneer zij een punt gemeen hebben;

3^o. dat zij elkander kruisen, wanneer zij niets gemeen hebben.

Hoezeer deze drie gevallen in algemeenheid verschillen, blijkt, wanneer men zich in de ruimte eene lijn en een punt daarbuiten denkt. Dan toch kan slechts éene lijn getrokken worden door het punt evenwijdig aan de gegeven lijn; onbepaald vele lijnen, die door het punt gaan en de lijn snijden, maar deze lijnen worden verbonden door de voorwaarde, dat zij gelegen zijn in het vlak, dat door het punt en de gegeven lijn kan gebracht worden; terwijl alle lijnen, die willekeurig in de ruimte door het punt worden getrokken en aan geene voorwaarde zijn gebonden, de gegeven lijn kruisen.

6. In de vlakke meetkunde (I n^o. 7) is de hoek bepaald, als de figuur, die ontstaat, wanneer men uit een punt twee rechte lijnen in verschillende richting trekt; de grootte van den hoek is het verschil in richting der beide lijnen. Een hoek is dus eene vlakke figuur.

In de ruimte hebben twee kruisende lijnen steeds verschillende richting; het verschil in richting wordt gemeten, door de beide lijnen met behoud van hare richting naar een willekeurig punt over te brengen, dat ook in een der beide lijnen kan genomen worden. Hier ontstaat een hoek, die de hoek van de kruisende lijnen wordt genoemd, en haar verschil in richting bepaalt. Volgens deze bepaling zijn ook in de ruimte hoeken, wier beenen evenwijdig loopen even groot, en vormen evenwijdige lijnen met eene zelfde lijn die ze snijdt of kruist gelijke hoeken; doch hieruit mag niet omgekeerd besloten worden, dat twee lijnen evenwijdig zijn, wanneer zij met eene derde gelijke hoeken vormen. Want in de ruimte is niet zooals in het vlak, de richting eener lijn bepaald door den hoek, die zij met eene andere lijn maakt.

Is de hoek, die door het overbrengen der kruisende lijnen naar een zelfde punt ontstaat, recht, dan zegt men, dat de lijnen elkander loodrecht of onder een rechten hoek kruisen. Overeenkomstige onduidelzinnige beteekenis wordt gehecht aan de uitdrukking: de lijnen kruisen elkander onder een hoek van bepaalde grootte, die door graden, minuten, secunden wordt voorgesteld, zooals in de vlakke meetkunde is geleerd (I n^o. 8).

7. Daar door drie punten altijd een vlak kan gebracht worden, is eene rechte lijnige driehoek steeds eene vlakke figuur. Van een veelhoek kan hetzelfde niet gezegd worden, omdat elke twee opvolgende zijden als snijlijnen wel in een vlak zijn gelegen, maar niet alle zijden in hetzelfde vlak. De eigenschappen der veelhoeken, die in het eerste deel zijn behandeld, gelden in het algemeen slechts voor vlakke figuren; diegene, wier samenstellende deelen in twee of meer vlakken zijn gelegen, worden scheele figuren genoemd. Zoo kan een willekeurige vierhoek vlak of scheel zijn, doch een trapezium, dus ook een parallelogram, is steeds eene vlakke figuur, omdat het vlak van den vierhoek door de evenwijdigheid van twee zijden wordt bepaald.

8. De snijding van eene rechte lijn en een vlak heeft altijd plaats volgens een enkel punt; want had de lijn twee punten met het vlak gemeen, dan zou zij geheel in het vlak vallen. Dit snijpunt der lijn met het vlak wordt haar voetpunt genoemd.

De snijding van twee vlakken heeft plaats volgens eene rechte lijn; want neemt men twee punten, die aan beide vlakken gemeen zijn en vereenigt ze door eene rechte lijn, dan zal die lijn geheel in elk der vlakken liggen, omdat twee van hare punten zich in elk der vlakken bevinden. Deze gemeenschappelijke lijn der beide vlakken is hunne doorsnede.

De vlakken kunnen niet meer dan eene rechte lijn gemeen hebben, want hadden zij nog een gemeenschappelijk punt, dan zouden zij volgens het bovenstaande (n^o. 4) samenvallen.

Moet door een punt eene lijn getrokken worden, die twee andere kruisende lijnen snijdt, dan is zij volkomen bepaald. Want brengt men door het punt en ~~alle~~ der kruisende lijnen een vlak, dan ~~is de~~ doorsnede van deze vlakken de gevraagde lijn.

§ 2.

Loodrechte stand van eene lijn en een vlak; richting van een vlak.

9. Eene rechte lijn kan ten opzichte van een vlak verschillende standen aannemen. Door haar aan de voorwaarde te onderwerpen, dat zij lood-

recht moet staan op eene lijn, die in het vlak is gelegen, wordt haar stand niet voldoende bepaald, omdat in hetzelfde punt eene menigte loodlijnen op eene lijn kunnen geplaatst worden. Men kan echter door de lijn twee verschillende vlakken brengen en in elk van deze in hetzelfde punt der lijn eene loodlijn plaatsen, vervolgens door beide loodlijnen, die een punt gemeen hebben, een vlak brengen; dan staat de oorspronkelijke lijn loodrecht op twee lijnen van dit vlak, die door haar voetpunt gaan.

Zij nu PQ (Fig. 1) loodrecht op de beide lijnen AB en CD , die in het vlak VV' door het voetpunt Q zijn getrokken; dan kan op de volgende wijze worden aangetoond dat deze lijn PQ ook loodrecht staat op alle lijnen, die door haar voetpunt in het vlak getrokken kunnen worden.

Zij EF willekeurig in het vlak VV' door Q getrokken; nemen wij dan op de loodlijn ter wederzijde van Q twee punten P en P' zoodanig, dat $P'Q = PQ$, en op de lijnen AB en CD de punten A en D willekeurig. Trekken wij vervolgens AD , die EF in E snijdt en vereenigen P en P' met A , E en D , dan ontstaan eenige driehoeken, die met elkander in het volgend verband staan.

In de eerste plaats zijn wegens de gelijkheid der rechthoekszijden de rechthoekige driehoeken AQP en AQP' benevens de driehoeken DQP en DQP' gelijk en gelijkvormig, waaruit volgt

$$AP = AP' \text{ en } DP = DP'.$$

Dit geeft de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken ADP en ADP' , derhalve

$$\angle DAP = \angle DAP'.$$

Daar deze hoeken ook in de driehoeken EAP en EAP' voorkomen en de zijden om die gelijke hoeken ook gelijk zijn, volgt

$$EP = EP'.$$

Nu mag men besluiten tot de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken EQP en EQP' wegens de gelijkheid der drie zijden waaruit,

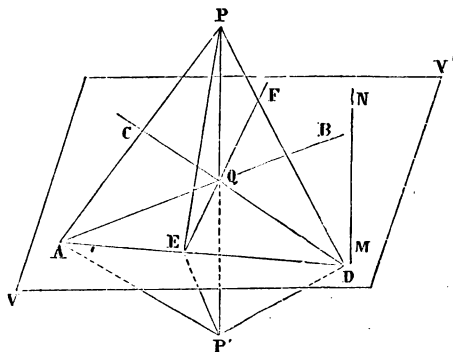


Fig. 1.

de gelijkheid der overeenkomstige hoeken EQP en EQP' voortvloeit; en dit kan alleen bestaan, wanneer PP' loodrecht staat op EF .

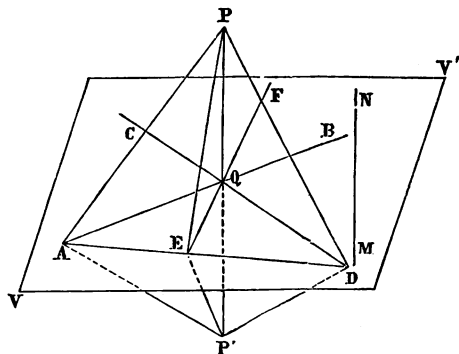


Fig. 1.

Op deze wijze kan bewezen worden dat PP' loodrecht staat op alle lijnen, die door Q in het vlak VV' getrokken worden. Deze stand van de lijn PP' is de loodrechte stand van de lijn ten opzichte van het vlak.

10. Lag de lijn EQ niet in het vlak VV' , dan zou de hoek die zij met PP' maakt, niet recht kunnen zijn, omdat in het vlak, dat

door de lijnen PP' en EQ wordt bepaald eene andere lijn kan getrokken worden, die in Q loodrecht staat op PP' , namelijk de doorsnede van dit vlak met VV' . Derhalve zullen alle lijnen die in een punt Q der lijn PP' loodrecht op deze lijn staan, gelegen zijn in een zelfde vlak VV' . Brengt men door eene willekeurige lijn in de ruimte verschillende vlakken, en trekt in elk vlak in hetzelfde punt der lijn loodlijnen, dan zullen die steeds in één vlak zijn gelegen, dat loodrecht staat op de rechte lijn. Hieruit volgt een nieuwe wording van het vlak. Laat men namelijk een rechten hoek wentelen zoodanig, dat eene rechthoekzijde op hare plaats blijft, dan zal de andere rechthoekszijde een plat vlak beschrijven.

11. Door den stand van het vlak is de stand der loodlijn, en omgekeerd door den stand der lijn die van het vlak volkomen bepaald; derhalve kan men door een willekeurig punt in of buiten een vlak slechts éene loodlijn op het vlak trekken, en omgekeerd door een punt in of buiten eene lijn slechts één vlak loodrecht op de lijn brengen.

12. Trekt men in het vlak VV' eene lijn MN , die niet door het voetpunt Q gaat, dan kruisen de lijnen MN en PP' elkander, maar de kruising heeft plaats onder een rechten hoek. Want de hoek tusschen de beide lijnen wordt gemeten door den hoek tusschen PP' en de lijn door Q evenwijdig aan MN getrokken, en deze hoek is volgens het voorgaande recht. Dus maakt de loodlijn een rechten hoek met alle lijnen, die in het vlak zijn gelegen, hetzij bij snijding, hetzij bij kruising. Even zoo zal PP' loodrecht staan op het vlak, wanneer zij twee geheel willekeurige lijnen in het vlak onder een rechten hoek snijdt of kruist. Want het laatste geval kan tot het eerste worden teruggebracht, wanneer men door het voet-

punt van PP' eene lijn, evenwijdig aan de kruisende lijn trekt.

13. Staat eene lijn PQ loodrecht op een vlak VV' (Fig. 2) en trekt men eene andere lijn RS evenwijdig aan PQ , dan zal ook deze lijn loodrecht staan op het vlak. Omdat toch PQ loodrecht staat op alle lijnen in het vlak, zal wegens hare evenwijdigheid ook RS alle lijnen in het vlak onder een rechten hoek snijden of kruisen, en dit bepaalt haar loodrechten stand op het vlak.

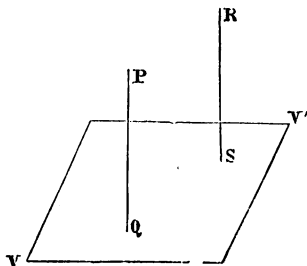


Fig. 2.

Omgekeerd zijn alle loodlijnen op eenzelfde vlak onderling evenwijdig, omdat door een punt slechts éene lijn evenwijdig aan een andere lijn en ook slechts éene lijn loodrecht op een vlak kan getrokken worden. Daar nu bewezen is, dat de evenwijdigheid van RS aan PQ haar loodrechten stand op het vlak ten gevolge heeft, zal ook de loodrechte stand der beide lijnen hare onderlinge evenwijdigheid in zich sluiten.

14. Terwijl een vlak de richting der lijnen, die in hetzelfde zijn gelegen, gedeeltelijk onbepaald laat, is de richting der loodlijn op het vlak, waar ook geplaatst, volkomen aangewezen en overal dezelfde. Om die reden zullen wij in het vervolg de richting van een vlak aanwijzen door de richting van de loodlijn op het vlak. Deze loodlijn wordt genoemd de normaal van het vlak. De richting van een vlak wordt niet bepaald door eenige lijn in het vlak gelegen, maar wel door de normaal tot het vlak, omdat zij aanwijst dat alle lijnen in het vlak, hoe verschillend overigens van richting, alle loodrecht op haar gericht zijn.

15. Hebben wij vroeger (§ I n°. 3) het vlak bepaald door eene lijn en een punt, dat buiten de lijn gelegen is, nu wordt de plaats van een vlak volkomen aangewezen door een lijn en een punt dat aan geene voorwaarde is gebonden; doch dan moet de lijn niet in het vlak zijn gelegen, maar haar richting aanwijzen, dus eene loodlijn op het vlak voorstellen. Derhalve is een vlak bepaald door de richting van zijne normaal en een punt in of buiten deze normaal gelegen.

*16. De loodlijn op een vlak heeft eenige merkwaardige eigenschappen met betrekking tot de punten van het vlak.

Zijn (Fig. 3) P en P' punten op de loodlijn evenver van het voetpunt Q gelegen, dan zijn alle punten van het vlak op gelijken afstand van deze punten verwijderd. Nemen wij toch in het vlak een willekeurig punt A en vereenigen dat met Q , P en P' , dan ontstaan

twee rechthoekige driehoeken AQP en AQP' , die gelijke rechthoeks-
zijden hebben, dus is $AP = AP'$. Geen punt buiten het vlak kan

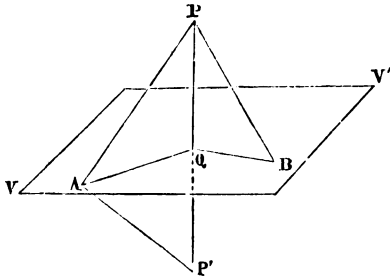


Fig. 3.

dezelfde eigenschap ten opzichte
der punten P en P' bezitten,
zoodat een vlak ook kan be-
schouwd worden als de meet-
kundige plaats van alle punten
die zich op gelijken afstand van
twee willekeurige punten bevin-
den. De stand van het vlak wordt
bepaald door de lijn, die de
punten vereenigt, als normaal,
en het midden van deze lijn als
voetpunt.

Neemt men een tweede punt B in het vlak dan zal zijn afstand
tot P kleiner, gelijk of grooter dan AP zijn, naarmate zijn afstand
tot het voetpunt Q kleiner, gelijk of grooter dan AQ is. Dit volgt uit
de vergelijking der rechthoekige driehoeken BQP en AQP , die eene
rechthoekszijde PQ gemeen hebben, zoodat de lengte der hypotenusa
toe- en afneemt met de andere rechthoekszijde en omgekeerd. Hieruit
volgen de eigenschappen:

1°. alle punten in een vlak, die op gelijken afstand zijn gelegen van het
voetpunt eener loodlijn, zijn evenver verwijderd van elk punt der loodlijn;

2°. de punten, die in een vlak op gelijken afstand van een zelfde
punt binnen of buiten dat vlak zijn verwijderd, vormen een cirkel,
waarvan het middelpunt is het voetpunt der loodlijn door het punt
op het vlak getrokken;

3°. naarmate punten in een vlak verder van het voetpunt eener
loodlijn zijn gelegen, zijn zij ook verder verwijderd van elk punt der
loodlijn en omgekeerd;

4°. onder alle lijnen, die uit een punt buiten een vlak tot een vlak
kunnen getrokken worden, is de loodlijn de kortste. Daarom wordt
zij de afstand van het punt tot het vlak genoemd.

§ 3.

Willekeurige stand van eene lijn en een vlak.

17. Is eene lijn PQ (Fig. 4) willekeurig geplaatst ten opzichte van
een vlak VV' , dan wordt haar stand ten opzichte van het vlak aan-
gewezen door den hoek, dien zij vormt met de normaal. Trekken wij
dus door het voetpunt van PQ de lijn QR loodrecht op het vlak, dan
is $\angle PQR$ een maat voor den onderlingen stand van lijn en vlak.

Door PQ en RQ kan, omdat zij elkander snijden, een vlak worden gebracht en dat vlak snijdt VV' volgens eene lijn QS , die de projectie van PQ op het vlak VV' wordt genoemd. Trekt men PS in het vlak RS loodrecht op de lijn QS dan staat zij ook loodrecht op het vlak VV' , wegens hare evenwijdigheid met QR . Dus wordt de projectie eener lijn op een vlak ook gevormd door de voetpunten der loodlijnen, die uit alle punten der lijn op het vlak worden neergelaten. Tevens blijkt, dat de snijding van eene lijn en een vlak altijd plaats heeft in de projectie der lijn.

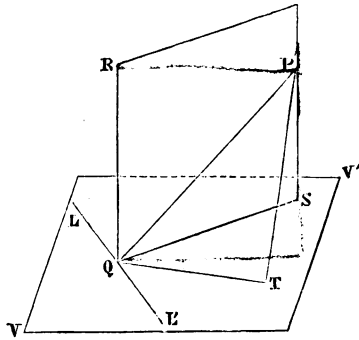


Fig. 4.

18. De hoek PQS , die eene lijn met hare projectie maakt, wordt hare helling ten opzichte van het vlak genoemd; zij is het complement van den hoek RQP . Onder alle hoeken, die eene lijn buiten een vlak met lijnen in een vlak maakt, is hare helling de kleinste. Want trekken wij in VV' door het voetpunt Q eene willekeurige lijn QT en nemen $QT = QS$, dan hebben de driehoeken PQS en PQT twee zijden gelijk; de derde zijden PS en PT zijn ongelijk daar PS als loodlijn altijd kleiner is dan PT (n^o. 16). Hieruit volgt (I, § 4 n^o. 24) dat $\angle PQS$ ook kleiner is dan $\angle PQT$, en tevens dat de hoeken, die PQ met lijnen in het vlak maakt, grooter worden naarmate deze zich verder van de projectie verwijderen. De grootste van deze hoeken zal derhalve door PQ gevormd worden met het verlengde van QS .

19. Daar $\angle PQS$ scherp is en bijgevolg zijn supplement stomp, kan altijd door Q eene lijn in het vlak VV' getrokken worden, die loodrecht staat op PQ . Zij LL' deze lijn, dan is zij ook loodrecht op het vlak RS , omdat zij loodrecht is gericht op twee lijnen QR en QP van dit vlak. Derhalve staat LL' loodrecht op elke lijn in het vlak RS , bijgevolg ook loodrecht op de doorsnede QS van dit vlak met VV' , dat is op de projectie van PQ . Omgekeerd volgt uit den loodrechten stand van LL' en QS die van LL' en QP , zoodat eene lijn buiten een vlak loodrecht staat op eene lijn in een vlak, wanneer hare projectie loodrecht staat op die lijn, en omgekeerd.

20. Eene lijn loop evenwijdig aan een vlak wanneer zij evenwijdig is aan hare projectie op het vlak. In dit geval kan de lijn het vlak niet snijden, omdat (n^o. 17) de snijding steeds in de

projectie der lijn plaats vindt. De evenwijdigheid van eene lijn en een vlak volgt reeds uit die van de lijn en eene willekeurige lijn in het vlak.

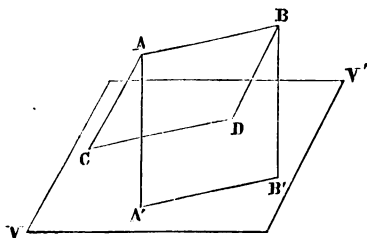


Fig. 5.

niet snijden, bijgevolg ook die van $A'B'$ en AB . Tevens blijkt, dat, wanneer eene lijn evenwijdig loopt aan een vlak en men brengt door die lijn een willekeurig vlak, de doorsnede der beide vlakken evenwijdig loopt aan de lijn en hare projectie.

21. Door de evenwijdigheid met een vlak is de richting eener lijn niet volkomen bepaald en omgekeerd. Door een punt der ruimte kunnen toch eene menigte lijnen evenwijdig aan een vlak getrokken worden, die men zich het gemakkelijkst voorstelt als de loodlijnen op de normaal van het vlak. Zij vormen dus een nieuw vlak, dat met het eerste vlak dezelfde normaal, derhalve gelijke richting heeft. Hierop komen wij bij het nagaan van den onderlingen stand van twee vlakken terug.

22. Door eene lijn kan altijd een, en niet meer dan een, vlak gebracht worden, evenwijdig aan eene andere lijn. Daartoe behoeft men slechts door een punt der eerste lijn eene lijn te trekken evenwijdig aan de tweede en door deze beide lijnen een vlak te brengen.

Eene lijn zal tegelijk evenwijdig loopen aan twee vlakken, wanneer zij evenwijdig is aan de doorsnede der beide vlakken; dan is zij tevens evenwijdig aan alle lijnen, die in de vlakken evenwijdig aan de doorsnede worden getrokken.

23. De afstand van de lijn AB en hare evenwijdige projectie $A'B'$ wordt genoemd de afstand van de lijn tot het vlak, zoodat de afstand van eene lijn tot een vlak, waarmede zij evenwijdig loopt, in elk van hare punten even groot is, en korter dan elke andere lijn, die uit een punt der evenwijdige lijn tot het vlak getrokken kan worden.

24. Tevens blijkt, dat de vlakken, die door eene van twee evenwijdige lijnen gebracht worden, alle vlakken door de andere lijn gebracht snijden volgens lijnen, die onderling en aan de gegeven lijnen evenwijdig zijn. Ook zullen alle vlakken, die evenwijdig zijn aan eenzelfde lijn, elkander snijden volgens lijnen, die onderling en aan de gegeven lijn evenwijdig zijn.

§ 4.

Onderlinge stand van twee vlakken.

25. Daar, zooals in § 2 n°. 14 is aangetoond, de loodlijn in een willekeurig punt de richting van een vlak aanwijst, zal ook de onderlinge stand van twee vlakken worden bepaald door den hoek tusschen de loodlijnen op die vlakken.

De figuur, die door de snijding van twee vlakken ontstaat (Fig. 6) wordt genoemd tweevlakkige hoek. Neemt men in de doorsnede of ribbe VW een willekeurig punt A en trekt in dit punt eene loodlijn op elk der vlakken, dan zal de hoek BAC tusschen deze loodlijnen een maat zijn voor den stand der vlakken. Daar echter twee lijnen met elkander een scherp en een stompen hoek maken, dient men een kenmerk te hebben om te weten, welke van dezen tot den tweevlakkigen hoek behoort. Dit kenmerk ligt opgesloten in de opmerking, dat de loodlijnen

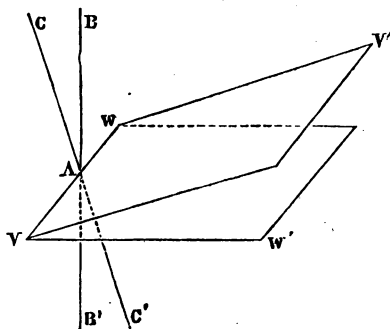


Fig. 6.

noodwendig moeten samenvallen; wanneer dit met de vlakken plaats heeft. Want laat men een der vlakken met zijne normaal wentelen om de doorsnede, dan moeten bij het samenvallen der vlakken de loodlijnen of samen- of in elkanders verlengde vallen. Beschouwt men b. v. in de figuur BA als de normaal van het vlak WW' en CA als die van VV' , dan vallen deze normalen samen na de wenteling van het laatste vlak om de doorsnede VW tot het met WW' samenvalt; maar nam men de normaal AB met AC' of AB' met AC dan zouden zij in elkanders verlengde komen, waaruit blijkt dat $\angle BAC$ en niet $\angle BAC'$ den stand der vlakken aanwijst.

26. Hetzelfde geldt, wanneer men de loodlijnen op de vlakken niet uit een punt der doorsnede, maar uit een willekeurig punt der ruimte trekt, zoodat: de stand van twee vlakken wordt aangegeven door den hoek tusschen de loodlijnen, uit een willekeurig punt op de vlakken getrokken, mits de richtingen van deze lijnen zoodanig worden genomen, dat bij het samenvallen der vlakken dit evenzeer met de loodlijnen plaats heeft.

27. Brengt men door de normalen AB en AC (Fig. 7) een vlak

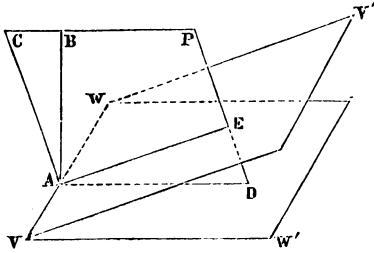


Fig. 7.

AP, dan snijdt dit de vlakken VV' en WW' volgens de lijnen AE en AD , hierbij is $\angle EAD = \angle CAB$. Want CA staat loodrecht op AE , omdat zij loodrecht is op alle lijnen van het vlak VV' , evenzoo is BA loodrecht op AD , dus zijn in hetzelfde vlak de beenen van $\angle EAD$ loodrecht op die van $\angle CAB$, waaruit de gelijkheid der hoeken voortvloeit. Bijge-

volg is $\angle EAD = \angle CAB$ de maat voor den tweevlakkigen hoek; om die reden wordt hij de standhoek genoemd, terwijl het vlak van den standhoek den naam van standvlak verkrijgt.

28. Daar verder CA en BA beide loodrecht staan op de doorsnede VW is deze lijn eene loodlijn op het vlak AP , zoodat zij ook loodrecht staat op AE en AD . De standhoek van twee vlakken wordt dus gevormd door de snijlijnen van de vlakken met een vlak dat loodrecht staat op hunne doorsnede; of ook door de lijnen, die uit een punt der doorsnede in elk der vlakken loodrecht op de doorsnede worden getrokken.

Twee vlakken vormen in hun geheel genomen vier tweevlakkige hoeken op dezelfde wijze als de loodlijnen vier hoeken geven. Overeenkomstig hiermede heeft men gelijke overstaande, en supplementaire tweevlakkige hoeken.

29. Twee vlakken staan loodrecht op elkander, wanneer hun standhoek recht is, en dit heeft plaats wanneer de loodlijn op het eene vlak valt in het andere, of met andere woorden, wanneer het

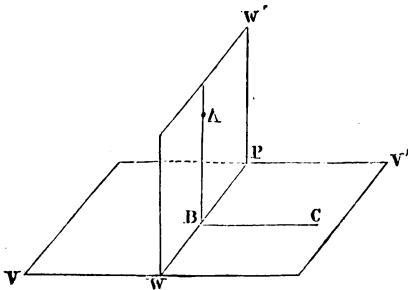


Fig. 8.

eene vlak gaat door de normaal op het andere vlak. Een vlak is door zijn loodrechten stand op een ander vlak niet geheel in richting bepaald, omdat door een punt eene menigte vlakken loodrecht op een ander vlak kunnen gebracht worden.

30. Zijn twee vlakken VV' en WW' (Fig. 8) loodrecht op elkander en trekt men in een der beide vlakken eene lijn AB loodrecht op de doorsnede WP ,

dan staat zij ook loodrecht op de lijn BC , die in het vlak VV' loodrecht

op WP wordt getrokken, omdat AB en BC den standhoek vormen. AB is nu loodrecht op twee lijnen in het vlak VV' derhalve loodrecht op dit vlak. Eene lijn, uit A buiten het vlak WW' getrokken kan niet loodrecht staan op VV', dus vallen alle loodlijnen uit punten van het eene vlak op het andere neergelaten geheel in het eerste vlak.

Evenzoo blijkt, dat een vlak loodrecht staat op een ander vlak, wanneer het loodrecht staat op éene lijn in dat vlak.

31. Terwijl alle vlakken, gebracht door de normaal op een ander vlak, loodrecht op dit vlak staan, kan door eene lijn, die schuin staat op, of evenwijdig loopt aan een vlak, slechts één vlak loodrecht op dat vlak gebracht worden. Dit vlak wordt bepaald door de schuine of evenwijdige lijn en hare projectie. Hieruit volgt, dat de doorsnede van twee vlakken, die ieder op zichzelf loodrecht staan op een derde vlak, ook loodrecht op dit vlak is gericht; ware zij toch schuin of evenwijdig, dan zouden de beide vlakken niet loodrecht op het derde kunnen staan. Evenzoo zal een vlak tegelijk loodrecht staan op twee vlakken wanneer het loodrecht staat op de doorsnede dezer vlakken. Zoo is (nº. 27) het standvlak loodrecht op beide vlakken van den tweevlak-kigen hoek, en kan men ook zeggen: de standhoek wordt gevormd door de snijlijnen der vlakken met een derde vlak, dat loodrecht op beide vlakken staat. Bijgevolg zijn de beenen van den standhoek elkanders projectiën op de vlakken van den tweevlakkigen hoek.

32. Daar de hoek, die eene lijn met hare projectie op een vlak maakt, kleiner is dan alle andere hoeken tusschen de lijn en eene willekeurige lijn in het vlak (§ 3 nº. 18) is ook de standhoek van twee vlakken kleiner dan elke andere hoek tusschen een been des standhoeks en eene willekeurige lijn in het andere vlak. De standhoek is echter grooter dan elke andere hoek gevormd door de snijlijnen van de beide vlakken met een vlak dat loodrecht staat op een der vlakken. Want zij van de vlakken AV en AW (Fig. 9) BAC de standhoek, en brengen wij door de normaal AP van AV een willekeurig vlak, dat de beide vlakken snijdt volgens de lijnen AE en AD, dan is $\angle PAB$ kleiner dan $\angle PAD$, omdat $\underline{AB}$ de projectie is van $\underline{AP}$ op het vlak AW. Maar de hoeken PAC en PAE zijn gelijk als rechte hoeken, men heeft dus:

$$\begin{aligned} \angle PAC &= \angle PAE = R \\ \angle PAB &< \angle PAD \\ \angle BAC &> \angle DAE \text{ afg.} \end{aligned}$$

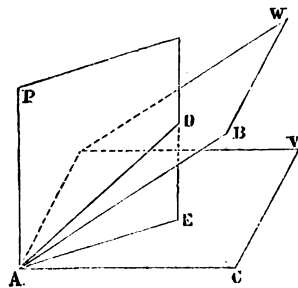


Fig. 9.

Men kan deze eigenschap ook op de volgende wijze uitdrukken: de

standhoek van twee vlakken is grooter dan elke hoek gevormd door eene willekeurige lijn in een der vlakken en hare projectie op het andere vlak. Tevens blijkt dat de hoeken kleiner worden naarmate de beenen tot de doorsnede der vlakken naderen.

33. Ook kan hieruit worden afgeleid, dat van elke twee vlakken, die door de beenen van een hoek gebracht worden, en waarvan het eene loodrecht staat op het vlak van den hoek, diegene den kleinsten hoek met elkander maken, wier doorsnede de normaal is tot het vlak van den hoek.

34. Twee vlakken zijn evenwijdig wanneer zij gelijke richting hebben, zoodat de normalen der beide vlakken evenwijdig zijn; daar echter de normaal op een vlak naar een willekeurig punt kan verplaatst worden, staan de vlakken dan ook loodrecht op eene zelfde lijn.

35. Zijn (Fig. 10) PA en QB twee gemeenschappelijke normalen tot de evenwijdige vlakken VV' en WW' dan zijn de stukken CA

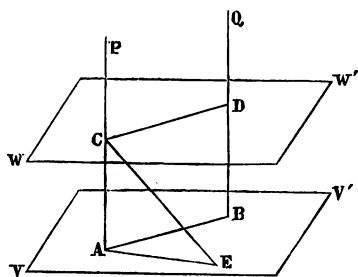


Fig. 10.

en DB van deze lijnen, die tusschen de vlakken zijn begrepen, gelijk. Want, A, B, C, D zijn de hoekpunten van een rechthoek, wiens overstaande zijden altijd gelijk zijn. Noemt men het stuk der gemeenschappelijke normaal, dat tusschen de vlakken is begrepen hun afstand, dan wordt de eigenschap op deze wijze uitgedrukt: twee evenwijdige vlakken hebben overal gelijken af-

stand, waaruit volgt, dat zij geen punt kunnen gemeen hebben. De afstand van twee evenwijdige vlakken is de kortste lijn, die een punt van het eene met een punt van het andere verbindt, omdat elke andere lijn CE de hypotenusa is van een rechthoekigen driehoek CAE , waarvan de afstand CA eene rechthoekszijde vormt.

Gemakkelijk kan uit het voorgaande worden afgeleid, dat twee evenwijdige vlakken van een stelsel evenwijdige lijnen gelijke stukken afsnijden.

36. Daar de loodrechte stand eener lijn op een vlak bepaald wordt door twee lijnen in het vlak, die elkander snijden, zullen twee vlakken ook evenwijdig zijn, wanneer twee lijnen in het eene evenwijdig zijn aan twee lijnen in het andere, mits de lijnen in hetzelfde vlak onderling niet evenwijdig zijn. Want de normaal tot het eene vlak kruist de lijnen van het andere onder een rechten hoek en hierdoor wordt zijn loodrechte stand op dit vlak bepaald.

37. De richting van een vlak is door hare evenwijdigheid met een

ander vlak volkomen bepaald, zoodat door een punt der ruimte slechts één vlak evenwijdig aan een ander vlak kan gebracht worden.

38. Twee kruisende lijnen AB , CD (Fig. 11) bepalen een eenig stelsel van twee evenwijdige vlakken VV' en WW' , die men verkrijgt, wanneer men door elke lijn een vlak brengt evenwijdig aan de andere lijn (§ 3 n^o. 22). Brengt men vervolgens door elke lijn een vlak loodrecht op de beide evenwijdige vlakken, dan zal de doorsnede PQ van deze vlakken ook loodrecht staan op de evenwijdige vlakken, en elk der kruisende lijnen onder een rechten hoek snijden. Volgens het bovenstaande (n^o. 35) is deze gemeenschappelijke loodlijn de kortste lijn, die tusschen de kruisende lijnen kan getrokken worden, weshalve zij de afstand der kruisende lijnen genoemd wordt; P en Q heeten de kruispunten.

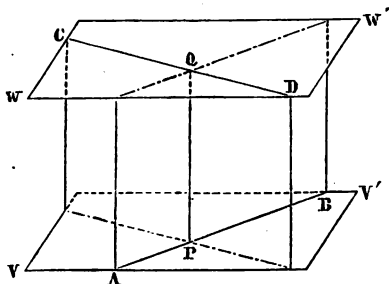


Fig. 11.

§ 5.

Onderlinge stand van drie vlakken.

39. Drie vlakken kunnen in de ruimte ten opzichte van elkander verschillende standen aannemen, die wij achtereenvolgens zullen beschouwen.

1^o. Twee van de drie vlakken zijn evenwijdig.

Het derde vlak RR' (Fig. 12) snijdt de evenwijdige vlakken PP' en QQ' volgens lijnen AB en CD , die evenwijdig zijn, omdat zij in één vlak gelegen, elkander niet kunnen snijden.

De acht tweevlakkige hoeken, die in de figuur voorkomen, worden op gelijke wijze genoemd en bezitten dezelfde eigenschappen als de hoeken, gevormd door de snijding van eene lijn met twee evenwijdige lijnen (I, § 2 n^o. 11).

2^o. De drie vlakken zijn evenwijdig. In dit geval staan de vlakken loodrecht op dezelfde

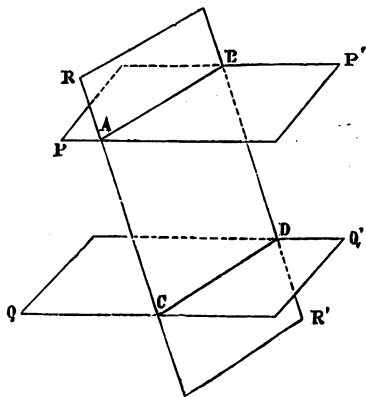


Fig. 12.

lijnen, hebben overal gelijken afstand en kunnen geen punt gemeen hebben.

40. Trekt men twee willekeurige lijnen AB , $A'B'$ (Fig. 13), die de drie vlakken snijden in de punten C , D , E , en C' , D' , E' , dan bestaat tusschen de stukken, die van de lijnen door de vlakken worden afgesneden, de volgende betrekking. Trekt men CE' , die het middelste vlak in F snijdt, dan snijdt het vlak van den driehoek CEE' de vlakken QQ' , RR' volgens twee evenwijdige lijnen DF en EE' . Dit geeft volgens eene bekende eigenschap (I n^o. 57) van den driehoek

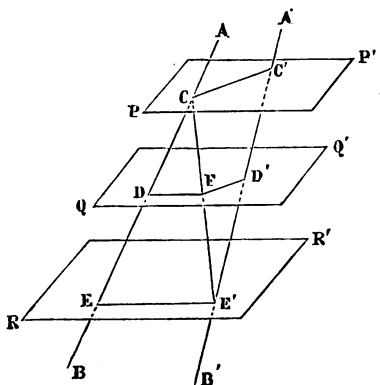


Fig. 13.

$$CD : DE = CF : FE'.$$

Evenzoo snijdt het vlak van den driehoek $CE'C'$ de vlakken PP'

en QQ' volgens de evenwijdige lijnen CC' en FD' , waaruit volgt

$$CF : FE' = C'D' : D'E';$$

derhalve door verbinding der beide evenredigheden;

$$CD : DE = C'D' : D'E'.$$

Dit kan op de volgende wijze worden uitgedrukt: wanneer drie evenwijdige vlakken een willekeurig stelsel rechte lijnen snijden, zullen de twee stukken die op elke rechte lijn ontstaan eene standvastige verhouding hebben. Die verhouding wordt ook bepaald door de stukken, die van de gemeenschappelijke normaal tot de drie vlakken worden afgesneden. Verder kan deze eigenschap gemakkelijk over meerdere evenwijdige vlakken worden uitgebreid.

41. 3^o. De drie vlakken snijden elkander volgens eene enkele lijn. In dit geval vormen zij zes tweevlakkige hoeken, die eene gemeenschappelijke ribbe bezitten.

4^o. De vlakken snijden elkander volgens drie evenwijdige lijnen. Dit zal plaats hebben (§ 3 n^o. 24) wanneer een vlak evenwijdig loopt aan de doorsnede der beide andere vlakken. Zij vormen dan met elkander twaalf tweevlakkige hoeken, in eigenschappen geheel overeenkomende met de twaalf hoeken, die in het platte vlak ontstaan door de snijding van drie willekeurige lijnen (I § 3).

42. 5^o. De drie vlakken snijden elkander in een punt. Dit meest algemeene geval zal zich voordoen bij alle vlakken, tusschen welke geen verband, in de vorige gevallen genoemd, bestaat. Immers

twee vlakken snijden elkander in eene lijn, en het derde vlak snijdt deze lijn in een punt, dat het eenige aan de drie vlakken gemeenschappelijke punt is. Men kan de beschouwing ook omkeeren, door eerst een punt aan te nemen, door dit punt drie willekeurige lijnen in de ruimte te trekken, en door die lijnen twee aan twee vlakken te brengen.

43. Trekt men de lijnen niet door maar uit het punt, dan ontstaat eene figuur, welke drievlakkige hoek wordt genoemd, en in de meetkunde der ruimte dezelfde belangrijke rol vervult als de driehoek in die van het vlak. In Fig. 14 is een drievlakkige hoek

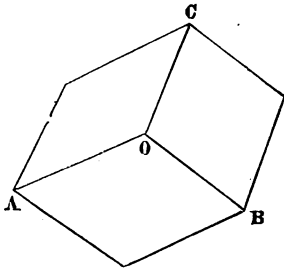


Fig. 14.

O A B C voorgesteld; de drie vlakken worden genoemd zijne zijvlakken, de lijnen O A, O B, O C, volgens welke de vlakken elkander snijden, de ribben, het snijpunt O dezer ribben de top. De hoeken A O B, A O C, B O C, begrepen tusschen de ribben noemt men de vlakke hoeken, in tegenoverstelling van de standhoeken, die door de vlakken twee aan twee worden gevormd. Elke drievlakkige hoek heeft drie vlakke hoeken en drie standhoeken; te samen worden zij de elementen van

den drievlakkigen hoek genoemd.

44. Drie vlakken in hunne gansche uitgestrektheid genomen vormen acht drievlakkige hoeken. Snijden de drie vlakken elkander twee aan

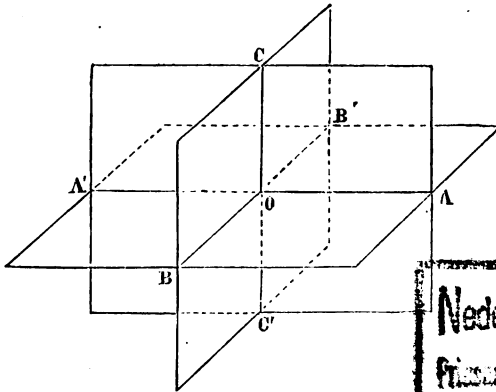


Fig. 15.

twee volgens de lijnen A A', B B', C C' (Fig. 15), dan is haar snij-

punt O de gemeenschappelijke top van de acht drielakkige hoeken:

$O.ABC$, $O.A'B'C$, $O.A'BC$, $O.A'B'C$;
 $O.ABC'$, $O.A'B'C'$, $O.A'BC'$, $O.A'B'C'$.

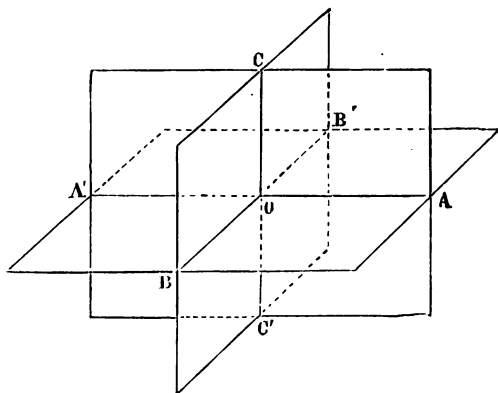


Fig. 15.

45. Zij staan met elkander, in een nauw verband, zoodanig dat de elementen van een hunner, die van alle anderen bepalen. Gaan wij uit van den eerstgenoemden en stellen zijne vlakke hoeken:

$$\angle AOB = c, \angle AOC = b, \angle BOC = a;$$

zijne standhoeken:

op de ribbe $OA = A$, op de ribbe $OB = B$, op de ribbe $OC = C$,
 dan hebben de acht drielakkige hoeken de volgende elementen:

DRIEVL. HOEK.	VLAKKE HOEKEN.			STANDHOEKEN.		
$O.ABC$	a ,	b ,	c ,	A ,	B ,	C ,
$O.A'B'C$	$180^\circ - a$,	b ,	$180^\circ - c$	$180^\circ - A$,	B ,	$180^\circ - C$
$O.A'BC$	a ,	$180^\circ - b$,	$180^\circ - c$	A ,	$180^\circ - B$,	$180^\circ - C$
$O.A'B'C$	$180^\circ - a$,	$180^\circ - b$,	c ,	$180^\circ - A$,	$180^\circ - B$,	C ,
$O.ABC'$	$180^\circ - a$,	$180^\circ - b$,	c ,	$180^\circ - A$,	$180^\circ - B$,	C ,
$O.A'B'C'$	a ,	$180^\circ - b$,	$180^\circ - c$	A ,	$180^\circ - B$,	$180^\circ - C$
$O.A'BC'$	$180^\circ - a$,	b ,	$180^\circ - c$	$180^\circ - A$,	B ,	$180^\circ - C$
$O.A'B'C'$	a ,	b ,	c ,	A ,	B ,	C .

46. Hieruit blijkt, dat elke twee drievlakkige hoeken, waarvan de drie ribben uit den top in tegenovergestelde richting zijn gelegen, en tegengestelde drievlakkige hoeken genoemd worden, gelijke elementen bezitten, terwijl elk ander paar, dat niet tegengesteld is, één vlakken hoek en één standhoek gelijk hebben, doch de overige elementen elkanders supplementen zijn. Drievlakkige hoeken, welke een zijvlak gemeen hebben, zoo als $O.ABC$ en $O.A'BC$ zullen wij aangelegene drievlakkige hoeken noemen. Elke drievlakkige hoek heeft derhalve één tegengestelden drievlakkigen hoek, die verkregen wordt door het verlengde van de drie ribben te nemen, en drie aangelegene drievlakkige hoeken, die ontstaan door twee ribben met het verlengde van de derde te verbinden.

§ 6.

Eigenschappen van den drievlakkigen hoek.

47. De zes elementen van een drievlakkigen hoek zijn onderling niet onafhankelijk, maar verbonden door verschillende voorwaarden, die wij in de eerste plaats zullen opsporen.

Zij $O.ABC$ (Fig. 16) een willekeurige drievlakkige hoek, waarvan AOB de grootste vlakke hoek is, dan kan binnen dezen altijd eene lijn OC' zoodanig getrokken worden, dat

$$\angle AOC' = \angle AOC.$$

Zijn de punten A en C willekeurig op de ribben OA en OC gelegen en neemt men $OC' = OC$, bepaalt volgens het punt B door de snijding van OB en AC' , dan zijn de driehoeken AOC' en AOC gelijk en gelijkvormig wegens de gelijkheid van een hoek en zijne omliggende zijden. Hieruit volgt $AC' = AC$. Verder is in driehoek ABC (I. § 3, n°. 15):

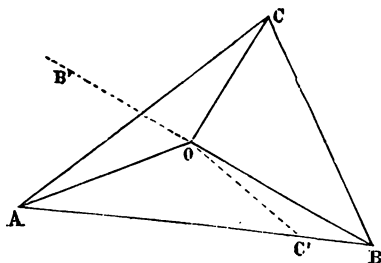


Fig. 16.

$$\begin{array}{rcl} AC + BC & > & AB \\ AC & = & AC' \\ \hline BC & > & BC'. \end{array} \text{ afg.}$$

Vergelijkt men nu de driehoeken BOC en BOC' , dan blijkt dat zij twee zijden gelijk hebben, nl.: $OB = OB$ en $OC = OC'$. Uit

de bovenstaande ongelijkheid van de derde zijden volgt dus (I. § 4. n^o. 24)

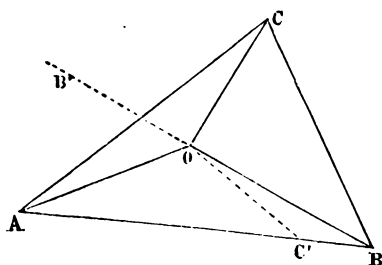


Fig. 16.

$$\angle BOC > \angle BOC',$$

maar

$$\angle AOC = \angle AOC'$$

— opg.

$$\angle AOC + \angle BOC > \angle AOB,$$

en dus ook

$$\angle BOC > \angle AOB - \angle AOC,$$

waaruit blijkt, dat de som van de twee kleinste vlakke hoeken grootter is dan de grootste, hetgeen meer algemeen aldus kan worden uitgedrukt:

elke vlakke hoek is kleiner dan de som en grootter dan het verschil der beide anderen.

48. Zij OB' het verlengde van OB , dan bepalen de lijnen OB' , OA , OC een aangelegen drievlakkigen hoek. Passen wij op dezen de gevonden eigenschap toe, dan volgt

$$\angle AOC < \angle AOB' + \angle COB',$$

waarvoor geschreven kan worden

$$\angle AOC < (180^\circ - \angle AOB) + (180^\circ - \angle COB),$$

of door omzetting

$$\angle AOC + \angle AOB + \angle COB < 360^\circ,$$

en hieruit blijkt, dat de som van de drie vlakke hoeken altijd kleiner is dan 360 graden of 4 rechte hoeken.

49. Brengen wij in een punt C van een der ribben (Fig. 17) loodrecht op die ribbe een vlak, dat de zijvlakken volgens den driehoek

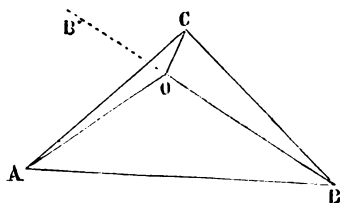


Fig. 17.

CAB snijdt, dan is $\angle ACB$ de standhoek op de ribbe C ; daarenboven zijn, wegens den loodrechten stand van het vlak ABC op AOC en BOC (§ 4, n^o. 31), AC en BC de projectien van AB op de zijvlakken AOC en BOC . Hieruit volgt, gebruik makende van de in § 4 n^o. 32 gevonden eigenschap, dat $\angle BAC$ kleiner is dan de standhoek op de ribbe OA ,

en $\angle ABC$ kleiner dan de standhoek op de ribbe OB . Noemen wij de standhoeken als in de vorige paragraaf A , B , C , dan is dus

$$A + B + C > \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB;$$

maar in $\triangle ABC$ is

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ,$$

derhalve:

$$A + B + C > 180^\circ,$$

gevende de eigenschap, dat de som van de drie standhoeken eens drievlakkigen hoeks grooter is dan 180° of twee rechte hoeken.

De bovenstaande redenering gaat door voor elken drievlakkigen hoek; heeft hij toch een stompen en twee scherpe standhoeken, dan brengt men het vlak loodrecht op de ribbe van den stompen standhoek; voor twee of drie stompe standhoeken is het bewijs niet meer noodig, omdat hun som reeds grooter dan 180° is.

50. Past men de laatstgenoemde eigenschap toe op den aangeleggen drievlakkigen hoek $O.A'B'C$ (Fig. 17) en houdt daarbij de in § 5 n°. 45 gevonden betrekkingen tusschen de standhoeken in het oog, dan volgt

$$(180^\circ - A) + (B) + (180^\circ - C) > 180^\circ,$$

of na omzetting:

$$A + C - B < 180^\circ,$$

leerende, dat de som van twee standhoeken verminderd met den derden kleiner is dan 180° of twee rechte hoeken.

Deze betrekking tusschen de standhoeken kan ook op de volgende wijze worden uitgedrukt: elke standhoek is grooter dan de som der beide anderen verminderd met 180° .

51. Schrijft men de laatste ongelijkheid op de drie verschillende wijzen:

$$A + B - C < 180^\circ$$

$$B + C - A < 180^\circ$$

$$A + C - B < 180^\circ,$$

en telt op, dan volgt

$$A + B + C < 540^\circ,$$

zoodat de som van de standhoeken altijd kleiner moet zijn dan 540° of zes rechte hoeken; doch deze eigenschap heeft geene waarde, omdat uit de samenstelling der figuur blijkt, dat elke vlakke hoek en standhoek van een drievlakkigen hoek kleiner is dan twee rechte hoeken.

52. De betrekkingen, die tusschen de vlakke hoeken onderling en de standhoeken onderling bestaan, zijn niet onafhankelijk van elkander. Zij kunnen uit elkander worden afgeleid door middel eener hulpfiguur, die ook later vele diensten kan bewijzen en daarom hier moet behandeld worden. Wanneer men namelijk in den top van een drievlakkigen hoek op elk der drie vlakken eene loodlijn plaatst, en wel

naar die zijde van het vlak waar de ribbe, die niet in het vlak ligt, zich uitstrekt, dan vormen deze drie loodlijnen de ribben van een nieuwen drievlakkigen hoek, die de supplementaire ten opzichte van den oorspronkelijken wordt genoemd.

53. Zijn $O C'$, $O B'$, $O A'$ (Fig. 18) loodlijnen op de vlakken $A O B$,

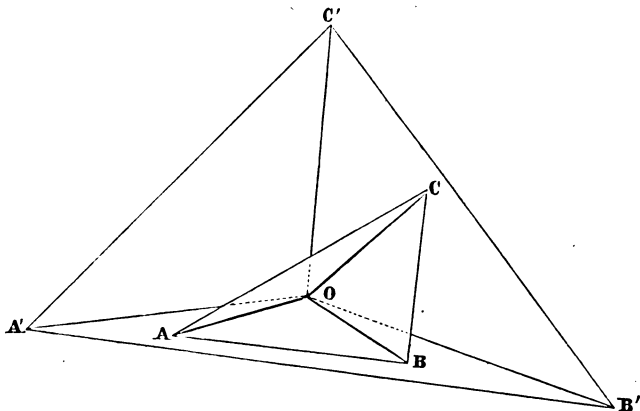


Fig. 18.

$A O C$, $B O C$, en dus de ribben van den supplementairen drievlakkigen hoek $O . A' B' C'$, dan staat elk van zijne vlakken loodrecht op twee vlakken van den oorspronkelijken, omdat het gaat door de loodlijnen op die vlakken. Zoo is het vlak $A' O B'$ loodrecht op de vlakken $A O C$ en $B O C$, dus ook loodrecht op de doorsnede dezer vlakken $O C$ (§ 4, n^o 31). Evenzoo blijkt, dat het vlak $A' O C'$ loodrecht staat op $O B$ en het vlak $B' O C'$ loodrecht op $O A$. De ribben van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek staan dus ook loodrecht op de vlakken van den supplementairen en aan dezelfde zijde als de overeenkomstige ribben, waaruit volgt dat de beide drievlakkige hoeken $O . A B C$ en $O . A' B' C'$ tot elkander supplementair zijn. Nu zijn de hoeken tusschen $O A'$, $O B'$, $O C'$ de supplementen van de standhoeken op de ribben $O A$, $O B$, $O C$, en omgekeerd de hoeken tusschen deze de supplementen van de standhoeken op de ribben $O A'$, $O B'$, $O C'$, omdat bij het samenvallen der vlakken de overeenkomstige loodlijnen in elkanders verlengde komen (§ 4 n^o. 26). Deze eigenschappen worden op de volgende wijze uitgedrukt:

de vlakke hoeken van den supplementairen drievlakkigen hoek zijn de supplementen van de standhoeken van den oorspronkelijken, en omgekeerd.

54. Noemen wij weder de elementen van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek a , b , c , A , B , C ,; de overeenkomstige elementen

van den supplementairen drievlakkigen hoek: a', b', c', A', B', C' , dan wordt de bovenstaande eigenschap aldus in vergelijking gebracht:

$$a + A' = b + B' = c + C' = a' + A = b' + B = c' + C = 180^\circ. (1).$$

Passen wij nu op den supplementairen drievlakkigen hoek de eigenschappen toe, die op de vlakke hoeken betrekking hebben, zijnde

$$c' < a' + b'; \quad a' + b' + c' < 360^\circ,$$

dan worden zij ingevolge de betrekking (1)

$$180^\circ - C < 180^\circ - A + 180^\circ - B;$$

en $180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ;$

of $A + B - C < 180^\circ,$

en $A + B + C > 180^\circ,$

zoodat de eigenschappen van de standhoeken te voorschijn komen, die te voren op onafhankelijke wijze waren gevonden. Evenzoo zou men van de laatsten tot de eigenschappen der vlakke hoeken kunnen teruggaan.

Hieruit blijkt, dat de supplementaire drievlakkige hoek nuttig kan zijn om eigenschappen van vlakke hoeken over te brengen op standhoeken en ook omgekeerd. Tot dit doel wordt hij ook later gebruikt.

55. Men zou kunnen vragen, of de loodlijnen op de vlakken van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek niet zoodanig kunnen gericht worden, dat zij met elkander hoeken maken die gelijk zijn aan de standhoeken der vlakken; doch lettende op het tafeltje uit § 5, n^o. 45 blijkt, dat dit onmogelijk is, en alle andere drievlakkige hoeken, door de loodlijnen of hare verlengden gevormd, behalve de tegengestelde, twee hoeken supplementair en een gelijk aan den oorspronkelijken bezitten.

De loodlijnen op de vlakken behoeven niet uit den top, maar kunnen uit elk punt der ruimte getrokken worden, mits men lette op de juiste richting, die bepaald wordt door de voorwaarde, dat bij het samenvallen van twee vlakken de overeenkomstige loodlijnen in elkanders verlengde komen.

56. De betrekkingen tusschen de vlakke hoeken onderling en de standhoeken onderling zijn niet voldoende om uit twee gegevene de derde te vinden; zij bepalen slechts de grenzen tusschen welke deze derde moet gelegen zijn. Heeft b. v. een drievlakkige hoek twee vlakke hoeken van 85° en 140° , dan weet men dat de derde tusschen 55° en 135° moet gelegen zijn, omdat anders de derde kleiner zou zijn dan het verschil der gegevene of de som van de drie grooter dan 360° . Zijn 85° en 140° twee standhoeken, dan moet de derde grooter dan 45° en kleiner dan 125° zijn, opdat de som van twee verminderd met den derden kleiner blijve dan 180° .

57. Is een der standhoeken recht, dan wordt de drievlakkige hoek

rechthoekig genoemd; is een der vlakke hoeken recht dan heet hij rechtzijdig. De supplementaire drievlakkige hoek van een rechthoekigen is rechtzijdig en omgekeerd. Neemt men in de betrekkingen

$$A + B + C > 180^\circ,$$

$$B + C - A < 180^\circ, \quad A + B - C < 180^\circ,$$

$A = 90^\circ$, dan volgt:

$$B + C > 90^\circ, \quad B + C < 270^\circ, \quad B - C < 90^\circ,$$

zoodat in een rechthoekigen drievlakkigen hoek de som der scheeve hoeken tusschen 270° en 90° is gelegen, en het verschil der scheeve hoeken kleiner is dan 90° .

Is in de betrekkingen

$$a < b + c, \quad a > b - c, \quad a + b + c < 360^\circ$$

$a = 90^\circ$, dan volgt

$$90^\circ < b + c < 270^\circ, \quad b - c < 90^\circ,$$

zoodat in een rechtzijdigen drievlakkigen hoek dezelfde betrekkingen bestaan tusschen de scheeve zijden als in den rechthoekigen tusschen de scheeve hoeken.

58. Heeft een drievlakkige hoek twee rechte standhoeken, dan staan twee der zijvlakken dus ook hunne doorsnede loodrecht op het derde vlak, waaruit volgt, dat de vlakke hoeken over de rechte standhoeken ook recht zijn, en de derde standhoek gelijk is aan den derden vlakken hoek.

Staan de drie vlakken loodrecht op elkander, dan is dit ook met hunne doorsneden het geval; zoodat de drievlakkige hoek drie rechte standhoeken en drie rechte vlakke hoeken heeft. Drie vlakken, welke onderling loodrecht staan, vormen acht drievlakkige hoeken, waarvan alle hoeken recht zijn.

59. Heeft een drievlakkige hoek twee gelijke vlakke hoeken, dan heet hij gelijkbeenig, en zijn de drie vlakke hoeken gelijk, dan is hij gelijkzijdig. Van een gelijkzijdigen drievlakkigen hoek is de vlakke hoek kleiner dan 120° , en de standhoek grooter dan 60° .

§ 7.

Bepaling van den drievlakkigen hoek.

60. Behalve de voorwaarden, die de overeenkomstige elementen van een drievlakkigen hoek onderling verbinden, bestaan er ook zoodanige betrekkingen, dat de waarde van enkele elementen uit die van de andere voortvloeit. Daarom moet thans even als bij den driehoek (I. § 4) worden nagegaan, door hoevele en welke elementen de drievlakkige hoek wordt bepaald, zoodat uit de gegevene de grootte der onbekende voortvloeien. Tevens zal dan blijken, onder welke omstandigheden twee drievlakkige hoeken gelijk zijn, omdat dit plaats

zal hebben, wanneer zij aan dezelfde bepalende voorwaarden voldoen. Bij drievlakkige hoeken kan, evenals bij hoeken in de vlakke meetkunde, slechts sprake zijn van gelijkheid en niet van gelijkvormigheid, zoo als blijkt uit de leer der gelijkvormigheid, die vroeger (I. § 10) is uiteengezet.

Om de overeenkomst goed in het licht te plaatsen, zullen wij de beschouwingen in I. § 4 over de bepaling van den driehoek op den voet volgen, daarbij in plaats van de zijden der driehoeks de vlakke hoeken van den drievlakkigen hoek en voor de hoeken de standhoeken nemende. Hierdoor komen wij tot de volgende eigenschappen:

61. I. Een drievlakkige hoek is bepaald door één vlakken hoek en de beide aangelegene standhoeken.

Zij (fig. 14) AOB de gegeven vlakke hoek; brengen wij dan door OA en OB vlakken, die de gegeven standhoeken met het vlak AOB maken, dan zullen deze elkander slechts volgens ééne lijn OC kunnen snijden en deze lijn zal de derde ribbe van den drievlakkigen hoek zijn, welke hierdoor geheel en ondubbelzinnig is bepaald.

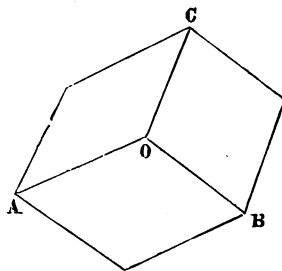


Fig. 14.

62. II. Een drievlakkige hoek is bepaald door twee vlakke hoeken en de tusschengelegene standhoek.

Zijn (Fig. 14) de vlakken AOB en AOC zoodanig geplaatst, dat zij den gegeven standhoek vormen, en trekken wij uit een punt der doorsnede O in het eerste vlak eene lijn OB , en in het tweede eene lijn OC , die de gegeven vlakke hoeken met de ribbe OA maken, dan is het derde vlak van den drievlakkigen hoek bepaald door deze beide lijnen.

63. III. Een drievlakkige hoek is bepaald door zijne vlakke hoeken.

Nemen wij toch aan dat (Fig. 17) de hoeken AOB , AOC , BOC gegeven zijn, en zij weder het vlak ABC in een willekeurig punt C der ribbe OC loodrecht op die ribbe dus ook loodrecht op de beide vlakken AOC en BOC geplaatst, dan zijn de driehoeken AOC en BOC , die in C recht zijn, bepaald door de hoeken in O en de lengte OC , waaruit dus de lengte van AO , BO , AC en BC voortvloeien. De beide eerstgenoemden sluiten den bekenden hoek AOB in, zoodat de driehoek

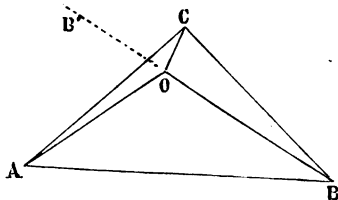


Fig. 17.

AOB bepaald is en dus ook de lengte van AB . Eindelijk is nu ook de driehoek ACB door zijne zijden geheel gegeven, zoodat hierdoor de grootte van den hoek C , dat is van den standhoek op de ribbe C bepaald wordt. Evenzoo kan men de standhoeken op de andere ribben vinden, en daar deze beschouwing onafhankelijk is van de lengte OC zal uit de grootte van de drie vlakke hoeken die van de standhoeken voortvloeien, zoodat de eerstgenoemde elementen den drievlakkigen hoek volkomen bepalen.

64. IV. Een drievlakkige hoek is bepaald door zijne standhoeken.

Want, volgens het geleerde in § 6 n^o. 53 bepalen de standhoeken van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek de vlakke hoeken van den supplementairen. In dezen kunnen volgens het voorgaande geval de standhoeken uit de vlakke hoeken gevonden worden, en door van deze laatste de supplementen te nemen, verkrijgt men de vlakke hoeken van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek. Dit geval komt bij den vlakken driehoek niet voor, omdat daar de drie hoeken door eene vaste betrekking zijn verbonden en dus den driehoek niet bepalen. Op dezelfde wijze als dit geval uit het voorgaande is afgeleid, kan ook het tweede geval door middel van den supplementairen drievlakkigen hoek tot het eerste teruggebracht worden.

65. Uit de voorgaande bepalingen van den drievlakkigen hoek volgt, dat drievlakkige hoeken gelijk zijn, wanneer zij óf een vlakken hoek en de aangelegen standhoeken, óf een standhoek en de omgelegen vlakke hoeken, of de drie vlakke hoeken of de drie standhoeken gelijk hebben. Die gelijkheid kan echter op twee onderscheiden wijzen plaats hebben, en dit blijkt het duidelijkst, wanneer men de bepaling van den drievlakkigen hoek uit zijne drie vlakke hoeken op dezelfde wijze verricht als in n^o. 21 van het 1^e deel de driehoek uit zijne zijden is bepaald. Zet men namelijk de vlakke hoeken AOC en BOC (Fig. 19), onder het vlak AOB , dan ontstaat de drievlakkige hoek $O.ABC'$ die gelijke elementen heeft met den drievlakkigen hoek $O.ABC$, evenals in Fig. 22 van Deel I, $\triangle ABC'$ ten opzichte van $\triangle ABC$. Terwijl echter daar ter plaatse de eerste driehoek in den stand van den tweeden kan gebracht worden door eene wenteling

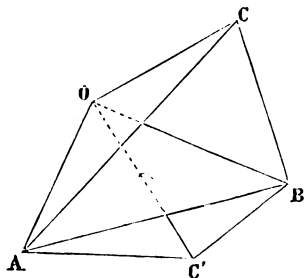


Fig. 19.

om de lijn AB , is dit hier niet mogelijk, omdat bij de wenteling van den drievlakkigen hoek $O.ABC'$ om de lijn AB , of om eenige an-

dere lijn hij nooit in den stand $O.ABC$ kan gebracht worden. De beide drievlakkige hoeken van Fig 19, hoewel alle elementen gelijk hebbende, zijn toch nog onderscheiden, en dit is blijkbaar een gevolg van de omstandigheid, dat de overeenkomstige elementen in omgekeerde volgorde zijn genomen. Plaatst men toch het oog in O , dan volgen de vlakke hoeken a, b, c , van links naar rechts in $O.ABC$, en van rechts naar links in $O.ABC'$; hetzelfde heeft plaats met de standhoeken. Van daar dat de gelijkheid van drievlakkige hoeken op twee wijzen kan plaats hebben nl.:

1^o. de gelijkheid bij denzelfden stand, waarbij de gelijke elementen in beide figuren in dezelfde orde op elkander volgen;

2^o. de gelijkheid bij tegenoverstand (symmetrie) waarbij de gelijke elementen in tegenovergestelde volgorde zijn gelegen.

Men zal nu gemakkelijk nagaan dat elk paar tegengestelde drievlakkige hoeken (zie Fig. 15) bij tegenoverstand gelijk zijn.

Voor gelijkbeenige en dus ook voor gelijkzijdige drievlakkige hoeken valt de gelijkheid bij tegenoverstand samen met de gelijkheid bij denzelfden stand, omdat het hier geheel onverschillig is, in welke volgorde de elementen worden genomen.

66. Uit de voorwaarden voor de gelijkheid van drievlakkige hoeken volgen eenige eigenschappen waarvan de eenvoudigste hier genoemd worden.

Zij $O.ABC$ (Fig. 20) een gelijkbeenige drievlakkige hoek met de gelijke vlakke hoeken $AOO = BOC$. Brengen wij door de ribbe OC een vlak COD , dat den standhoek op deze ribbe midden doordeelt, dan verdeelt dit den drievlakkigen hoek in twee anderen, die aan elkander gelijk zijn, omdat zij een standhoek en de omgelegen vlakke hoeken gelijk hebben. Hieruit volgt:

1^o. dat het vlak COD ter wederzijde gelijke hoeken maakt met het vlak AOB en dus loodrecht op dit vlak staat;

2^o. dat $\angle AOD = \angle BOD$, en dus het vlak COD den hoek AOB midden doordeelt;

3^o. dat de standhoek op de ribbe OA gelijk is aan dien op OB en dus: over gelijke vlakke hoeken staan gelijke standhoeken. Ook het omgekeerde is uit de figuur gemakkelijk af te leiden. Verder volgt hieruit, dat in een gelijkzijdigen drievlakkigen hoek ook de standhoeken onderling gelijk zijn.

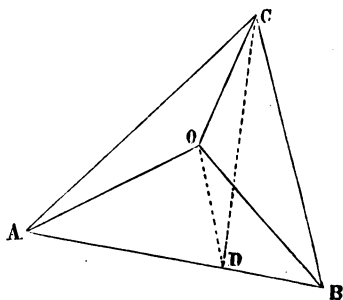


Fig. 20.

67. Is in den drievlakkigen hoek $O.ABC$ (Fig. 21) de standhoek op de ribbe OB grooter dan die op de ribbe OA , dan kan men door OB een vlak brengen, dat met het vlak AOB den zelfden hoek

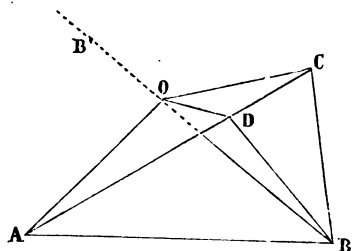


Fig. 21.

maakt als het vlak AOC , en dit vlak snijdt volgens eene lijn OD , die tusschen OA en OC is gelegen. Nu is volgens het voorgaande de drievlakkige hoek $O.ADB$ gelijkbeenig, dus $\angle AOD = \angle BOD$, en in den drievlakkigen hoek $O.DBC$ is

$$\angle BOD + \angle COD > \angle BOC,$$

of

$$\angle AOD + \angle COD > \angle BOC,$$

dat is

$$\angle AOC > \angle BOC,$$

waaruit wij leeren: in elken drievlakkigen hoek staat over een grooter vlakken hoek een grooter standhoek. Daar over gelijke vlakke hoeken slechts gelijke standhoeken kunnen staan, volgt nu ook dat de laatstgenoemde eigenschap omgekeerd mag worden.

68. Passen wij haar toe op den aangelegenen drievlakkigen hoek $O.AB'C$ en zij hierin

$$\text{standhoek op } OB' < \text{standhoek op } OA,$$

dan is ook

$$\angle AOC < \angle B'OC,$$

of de vroegere benamingen invoerende, met

$$B < 180^\circ - A$$

stemt overeen

$$b < 180^\circ - a;$$

dat is

$$A + B < 180^\circ$$

geeft:

$$a + b < 180^\circ;$$

evenzoo vindt men voor

$$A + B > 180^\circ$$

$$a + b > 180^\circ,$$

waaruit het besluit kan getrokken worden, dat de som van twee vlakke hoeken te gelijk grooter en kleiner is dan 180° met de som van de overstaande standhoeken.

69. Zij (Fig. 20) OD de lijn, die den hoek AOB midden doordeelt; brengt men door deze lijn een vlak loodrecht op het vlak van den

hoek en trekt hierin de lijn OC uit O willekeurig, dan behooren de ribben OA , OD , OC en OB , OD , OC tot twee gelijke drievlakkige hoeken, waaruit volgt, dat elke lijn, getrokken in een vlak dat een hoek rechthoekig midden doordeelt, gelijke hoeken maakt met de beenen van dien hoek.

Door middel van deze eigenschap kan men eene lijn trekken, die gelijke hoeken maakt met de drie ribben van een drievlakkigen hoek. Zij zal de doorsnede zijn der vlakken, die de drie vlakke hoeken rechthoekig midden doordeelen. Deze drie vlakken snijden elkander altijd volgens ééne rechte lijn, zoo als gemakkelijk uit eene figuur kan afgeleid worden. Evenzoo kan worden aangetoond, dat dezelfde eigenschap plaats heeft voor de drie vlakken, welke door elke ribbe loodrecht op het tegenoverstaande vlak zijn gebracht, en voor de drie vlakken, die men door elke ribbe en de lijn, welke den tegenoverstaanden vlakken hoek midden doordeelt, kan brengen.

70. Gaat men in Fig. 20 uit van den loodrechten stand der vlakken AOB en COD en brengt men dan door OC vlakken, die gelijke hoeken met het vlak COD maken, dan komt men tot de gelijkheid der vlakke hoeken COA en COB , benevens die der standhoeken op de ribben OA en OB , door gebruik te maken van de eigenschap, dat twee drievlakkige hoeken gelijk zijn, wanneer zij een vlakken hoek (COD) en de aangelegen standhoeken gelijk hebben. Door middel van deze en eenige der voorgaande eigenschappen kunnen wij nu onderzoeken in hoeverre een drievlakkige hoek bepaald is door twee vlakke hoeken en een standhoek, die niet tusschen beide is gelegen.

71. Zij (Fig. 22) AOB een der gegeven vlakke hoeken en brengen wij door AO een vlak AVV' dat met AOB den gegeven standhoek maakt, dan moet door OB een vlak gebracht worden, dat een gegeven vlakken hoek vormt door zijne doorsnede met het vlak AOV . Aan deze voorwaarde zullen echter wanneer deze hoek niet recht is, twee vlakken voldoen, die het vlak AOV

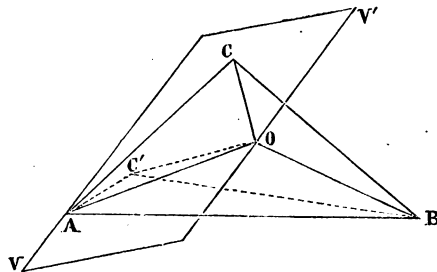


Fig. 22.

snijden volgens twee lijnen OC en OC' . Vallen beide lijnen boven AO dan voldoen beide lijnen als derde ribben en verkrijgt men twee drievlakkige hoeken, die beide met de gegevens overeenstemmen; valt

een van beiden beneden A O, dan kan deze de derde ribbe niet zijn, omdat de gegeven standhoek voor zijn supplement plaats maakt, en dus bestaat slechts één drievlakkige hoek, die voldoet; vallen beide lijnen beneden O A dan heeft men geen drievlakkigen hoek, die met de gegevens overeenkomt. Hieruit volgt, dat een drievlakkige hoek in zooverre door twee vlakke hoeken en een standhoek over een van beide is bepaald, dat soms één, soms géén, soms twee drievlakkige hoeken uit deze gegevens voortvloeien. De kenmerken ter onderscheiding dezer verschillende gevallen kunnen eerst later (bij de behandeling der bolvormige driehoeken) gegeven worden. Deze beschouwing komt overeen met de bepaling van een driehoek door twee zijden en een hoek over een van beiden (I. § 4 n^o. 27).

Door dit geval op den supplementairen drievlakkigen hoek over te brengen, verkrijgt men dezelfde dubbelzinnigheid voor de bepaling van den drievlakkigen hoek uit twee standhoeken en een vlakken hoek, die niet tusschen beide is gelegen. Om die reden worden deze beide gevallen de twijfelachtige genoemd. Houdt men deze dubbelzinnigheid in het oog, dan komt men tot de slotsom dat een drievlakkige hoek door elke drie zijner elementen is bepaald.

§ 8.

De veelvlakkige hoek.

72. Op welke wijzen drie vlakken elkander kunnen snijden, hebben

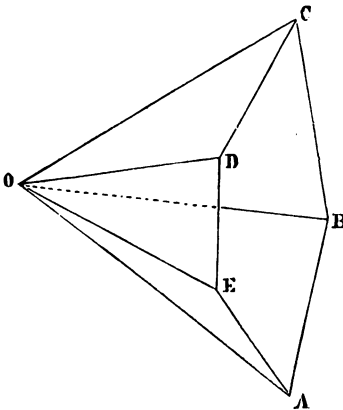


Fig. 23.

wij in de voorgaande paragrafen nagegaan. Voor meer dan drie vlakken kan de onderlinge snijding op meer verschillende manieren plaats hebben. Gaan al de vlakken door eenzelfde punt, dan wordt de figuur, die zij van uit dit punt naar ééne zijde genomen vormen, veelvlakkige hoek genoemd.

De wording van den veelvlakkigen hoek kan ook anders worden voorgesteld. Trekt men namelijk uit een punt O (Fig. 23) eenige lijnen O A, O B, O C, enz. in willekeurige richting in de ruimte en brengt door elke twee

opvolgende een vlak, dan ontstaat een veelvlakkige hoek. Het aantal

vlakken bepaalt den bijzonderen naam van de figuur; zoo spreekt men van een vier-vijflakkigen hoek enz., wanneer het aantal vlakken vier, vijf enz. is. Wordt dit aantal onbepaald gelaten, dan wordt het door de letter n aangeduid en spreekt men van den n -vlakkigen hoek. Een n -vlakkige hoek heeft n ribben, n vlakke hoeken, n standhoeken.

73. De mogelijkheid van inspringende standhoeken, welke bij den drievlakkigen hoek is uitgesloten, bestaat hier, evenals die voor de inspringende hoeken bij een vlakken veelhoek. De vlakken, welke door twee ribben gaan, die niet in een zelfde zijvlak zijn gelegen, worden diagonaalvlakken genoemd. Bij een n -vlakkigen hoek is het aantal diagonaalvlakken door ééne ribbe gebracht $n-3$, en dus het geheele aantal $\frac{1}{2} n (n-3)$, evenals voor de diagonalen van een veelhoek. Door de diagonaalvlakken van ééne ribbe worden in den veelvlakkigen hoek $n-2$ drievlakkige hoeken gevormd. Bij elken veelvlakkigen hoek kan een supplementaire veelvlakkige hoek gevonden worden, die evenzoo wordt bepaald als bij den drievlakkigen hoek, doch hier is hij van minder belang.

74. In een veelvlakkigen hoek is elke vlakke hoek kleiner dan de som der anderen; door behulp van de diagonaalvlakken door ééne ribbe wordt deze eigenschap terstond uit de overeenkomstige eigenschap van den drievlakkigen hoek afgeleid. Brengen wij vervolgens een vlak, dat alle zijvlakken snijdt en niet door den top gaat, dan ontstaat in dat vlak een veelhoek die evenveel zijden heeft als het aantal zijvlakken bedraagt. Zij b. v. $O A B C \dots$ (Fig. 23) een n -vlakkige hoek, dan ontstaat door de snijding met een vlak de n -hoek $A B C \dots$. In de zijvlakken ontstaan driehoeken $O A B$, $O B C$, enz. en in de punten $A, B, C, \dots$ drievlakkige hoeken. Stellen wij nu ter bekorting de som der vlakke hoeken van den veelvlakkigen hoek $= S$, de som van de hoeken der driehoeken, die aan de bases $A B, B C, \dots$ zijn gelegen $= S'$, de som der hoeken van den n -hoek $A B C \dots = S''$, dan is

$$S + S' = n \times 180^\circ \dots \dots (1).$$

daar zij met elkander de som der hoeken van n driehoeken uitmaken.

Beschouwen wij vervolgens een der drievlakkige hoeken b. v. die aan het hoekpunt A , dan is de som van twee zijner vlakke hoeken grooter dan de derde, dat is

$$\angle O A E + \angle O A B > \angle E A B;$$

passen wij dit toe op al de hoekpunten van den n -hoek, en tellen de ongelijkheden op, dan verkrijgt men in het tweede lid al de hoeken van den veelhoek, waaruit volgt

$$S' > S''.$$

kige hoek in het algemeen door elke drie elementen bepaald; omdat nu een n -vlakkige hoek in $n-2$ aaneensluitende drielakkige hoeken kan verdeeld worden door de diagonaalvlakken van ééne ribbe, kan hieruit het aantal bepalende elementen gemakkelijk worden afgeleid. Even als bij den veelhoek heeft men voor den eersten drielakkigen hoek 3 elementen noodig en voor elken volgenden 2, omdat hij steeds een element, namelijk een zijvlak, met den vorigen gemeen heeft; derhalve is het aantal bepalende elementen voor den n -vlakkigen hoek

$$3 + (n - 3) \times 2 = 2n - 3,$$

zijnde evengroot als voor den vlakken n -hoek; met dit onderscheid, dat alle hoeken, zoowel vlakke als standhoeken, als elementen mogen beschouwd worden. Ook moet hier op de volgorde gelet worden; met gelijke volgorde verkrijgt men de gelijkheid bij denzelfden stand, met tegenovergestelde volgorde de gelijkheid bij tegenoverstand.

TWEEDE HOOFDSTUK.

VEELVLAKKIGE LICHAMEN.

§ 9.

Algemeene beschouwingen.

78. Elk gedeelte der ruimte, dat geheel begrensd is door platte of gebogen vlakken is een meetkundig lichaam. Zijn de grenzen slechts platte vakken, dan wordt het lichaam veelvlakig genoemd. De lijnen, volgens welke de grens- of zijvlakken elkander snijden, zijn de ribben, de snijpunten van de ribben onderling de hoekpunten van het lichaam. Op elke ribbe wordt een tweevlakkige hoek gevormd door de beide vlakken, waarvan zij de doorsnede is; in elk hoekpunt ontstaat een drie- of veelvlakkige hoek door de vlakken, die elkander in dat punt snijden en waarvan het aantal gelijk is aan dat der ribben, die in het hoekpunt samenkomen. Eene lijn, die tussen twee hoekpunten wordt getrokken, welke niet door eene ribbe verbonden zijn, is eene diagonaal van het lichaam; gaat de diagonaal dóór het lichaam, of verbindt twee hoekpunten, die niet op hetzelfde zijvlak zijn gelegen, dan is zij hoofddiagonaal of lichaamsdiagonaal; ligt zij op een zijvlak, dan draagt zij den naam van zijdiagonaal. Elk vlak dat gebracht kan worden door twee ribben, en geen zijvlak is, vormt een diagonaalvlak.

80. Daar drie vlakken nimmer een gedeelte der ruimte geheel kunnen begrenzen, is het aantal zijvlakken van een veelvlakig lichaam minstens vier. Door vier vlakken kan een lichaam geheel begrensd worden, want snijdt men een drievlakkigen hoek door een vlak, dat niet door den top gaat, dan wordt een gedeelte der ruimte door de vier vlakken afgesloten. Zulk een lichaam draagt den naam van viervlak.

In het algemeen kan een lichaam genoemd worden naar het aantal zijner zijvlakken, hoewel dit kenmerk tot bepaling van het lichaam niet voldoende is.

Elk viervlak (Fig. 25) heeft vier driehoeken tot zijvlakken, vier hoekpunten, zes ribben en geene diagonalen of diagonaalvlakken, omdat alle hoekpunten twee aan twee door ribben zijn verbonden.

Elk hoekpunt is de top van een drievlakkigen hoek, zoodat elk vlak als het snijvlak kan aangemerkt worden.

80. Elk veelvlakkig lichaam kan in viervlakken worden verdeeld. Vereenigt men toch een willekeurig hoekpunt door diagonalen met al de andere hoekpunten, en brengt vervolgens vlakken twee aan twee door al de diagonalen en ribben die in dat hoekpunt samenkomen, dan zal het lichaam door deze vlakken in viervlakken verdeeld zijn. Deze wijze van verdeling eens lichaams in viervlakken komt geheel overeen met de verdeling van een willekeurig veelhoek in driehoeken. Het bezwaar, dat zich voordoet bij de veelhoeken met een of meer inspringende hoeken, heeft men ook bij de veelvlakkige lichamen, wanneer op een of meer ribben de tweevlakkige hoek inspringend is. In dit geval zullen een of meer diagonalen en diagonaalvlakken geheel of gedeeltelijk buiten het lichaam vallen. Aan dit bezwaar wordt te gemoet gekomen, wanneer men het lichaam met een of meer inspringende hoeken door een of meer diagonaalvlakken in lichamen zonder inspringende hoeken verdeelt, en deze op de boven omschreven wijze in viervlakken.

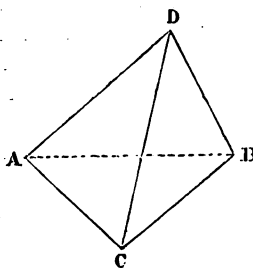


Fig. 25.

81. Omgekeerd kan elk veelvlakkig lichaam worden beschouwd als een samenstel van viervlakken. Hierbij moeten echter twee gevallen onderscheiden worden. In de eerste plaats kunnen de viervlakken zoodanig worden saamgesteld, dat elk nieuw bijgevoegd viervlak met een zijvlak volkomen sluit op een driehoek van het lichaam, dat reeds verkregen is, zoodat drie hoekpunten samenvallen met drie hoekpunten van een voorgaand viervlak en slechts het vierde een nieuw hoekpunt van het lichaam oplevert. Zoodanige lichamen worden om hunne bijzondere eigenschappen, die wij zoo straks nader zullen leeren kennen, Eulersche lichamen genoemd. In de tweede plaats kan de aansluiting zoodanig plaats hebben, dat een of meer viervlakken niet volkomen met een zijvlak passen op een reeds verkregen zijvlak, maar het eene het andere of niet geheel bedekt of een of meer uitstekende punten vertoont. Dit geval doet zich ook voor wanneer een lichaam, door een

of meer viervlakken is uitgehold, zoodat het geheel kan beschouwd worden als het verschil van een stelsel viervlakken met een ander stelsel, die geen zijvlak volkomen gemeen hebben. Zoodanige samenstellingen worden niet-Eulersche lichamen genoemd en zullen bij het volgende buiten beschouwing blijven.

82. Beschouwen wij de Eulersche lichamen als een samenstel van n viervlakken die op de hierboven beschreven wijze met een driehoek op elkander passen en nemen in de eerste plaats aan, dat bij het plaatsen van elk viervlak op het reeds verkregen samenstel geen der drie andere zijvlakken in het verlengde van een zijvlak van het reeds verkregen lichaam valt. Dan geeft elk viervlak, behalve het eerste en laatste, aan het lichaam drie ribben, twee zijvlakken en één hoekpunt. Het eerste viervlak geeft zes ribben, drie zijvlakken en vier hoekpunten; het laatste drie ribben, drie zijvlakken en één hoekpunt. Noemt men het geheel aantal ribben van het lichaam r , het aantal zijvlakken z , het aantal hoekpunten h , dan ontstaan uit de voorgaande redeneering deze betrekkingen:

$$r = 3n + 3,$$

$$z = 2n + 2,$$

$$h = n + 3,$$

waaruit volgt:

$$\dagger \quad z + h = r + 2 \dots\dots\dots (1)$$

Valt bij het plaatsen van een viervlak op het reeds verkregen lichaam nog een zijvlak in één vlak met een vorig zijvlak dan verdwijnt hierdoor de tusschen gelegen ribbe, doch er ontstaat ook een zijvlak minder, omdat twee tot één zijn saamgefallen. Hierdoor blijft dus de betrekking 1) onveranderd.

Vallen twee zijvlakken van een viervlak ieder in één vlak met twee zijvlakken van het reeds verkregen lichaam, dan vervallen de beide tusschen gelegen ribben, maar ook de ribbe die de doorsnede is der beide saamgefallen vlakken, omdat zij nu in het verlengde ligt van een ribbe van het lichaam; ook valt het tusschen gelegen hoekpunt weg en twee zijvlakken, zoodat ook in dit geval de betrekking 1) onveranderd blijft.

Valt eindelijk ook het derde zijvlak in één vlak met een zijvlak van het reeds verkregen lichaam, dan verdwijnen hierdoor nogmaals drie ribben, één zijvlak en twee hoekpunten, zoodat ook hierdoor de betrekking 1) geene verandering ondergaat. En daar hiermede alle wijzen zijn nagegaan, waarop een viervlak op het reeds verkregen samenstel kan geplaatst worden, volgt, dat de betrekking 1) altijd doorgaat, zoodat zij een eenvoudig verband tusschen het aantal ribben, zijvlakken en hoekpunten van elk Eulersch lichaam voorstelt, dat aldus in woorden wordt gebracht: de som van het aantal zijvlakken en het

aantal hoekpunten is twee meer dan het aantal ribben. Zij draagt den naam van het theorema van Euler en geeft aanleiding tot vele eigenschappen en betrekkingen, waarvan wij thans de voornaamste zullen nagaan.

83. Daar elke ribbe twee hoekpunten verbindt en in elk hoekpunt minstens drie ribben samen komen heeft men de betrekking:

$$\begin{array}{c} + \\ \hline < \end{array} \quad 3h \leq 2r \dots\dots\dots (2)$$

waarbij het teeken $\begin{array}{c} + \\ \hline < \end{array}$ de beteekenis heeft: gelijk aan of kleiner dan.

Evenzoo is elke ribbe de doorsnede van twee zijvlakken en liggen minstens drie ribben op elk zijvlak, gevende:

$$\begin{array}{c} + \\ \hline < \end{array} \quad 3z \leq 2r \dots\dots\dots (3)$$

Elimineert men uit de drie betrekkingen (1), (2) en (3) achtereenvolgens elk der drie grootheden z , h en r , dan ontstaat na eenvoudige herleiding het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}r \geq h \geq \frac{1}{3}r + 2 \\ 3(h-2) \geq r \geq \frac{3}{2}h; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}r \geq z \geq \frac{1}{3}r + 2 \\ 3(z-2) \geq r \geq \frac{3}{2}z; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2h-4 \geq z \geq \frac{1}{2}h + 2 \\ 2z-4 \geq h \geq \frac{1}{2}z + 2; \end{cases}$$

welke betrekkingen de grenzen aangeven van elk der grootheden in verband tot elk der beide andere.

Zoo blijkt hieruit, dat bij elk lichaam:

1°. het aantal ribben, zijvlakken en hoekpunten grooter is dan bij het viervlak, welk lichaam dus het kleinst aantal ribben (6), hoekpunten (4) en zijvlakken (4) heeft.

2°. het aantal ribben grooter is dan het aantal zijvlakken, en ook dan het aantal hoekpunten.

3°. het aantal hoekpunten en ook het aantal zijvlakken ligt tusschen één derde en twee derden van het aantal ribben, terwijl het alleen de laatste grens kan bereiken;

4^e. het aantal ribben ligt tusschen drie maal het geheel en drie maal het halve aantal zijvlakken of hoekpunten en alleen de laatste grens kan bereiken;

5^e. het aantal zijvlakken ligt tusschen de helft en het dubbel van het aantal hoekpunten, en omgekeerd;

6^e. het aantal ribben nooit gelijk kan worden aan het aantal zijvlakken of het aantal hoekpunten, maar wel het aantal zijvlakken aan het aantal hoekpunten.

84. Uit de bovenstaande ongelijkheden kunnen nog andere betrekkingen worden afgeleid. Zoo kan men er uit bepalen hoevele en welke lichamen een gegeven aantal ribben, zijvlakken of hoekpunten hebben.

Stelt men b. v. $r=8$, dan vindt men $\frac{16}{3} > h > \frac{14}{3}$ zoodat h en z slechts 5 kunnen zijn. Er is slechts één lichaam dat voldoet, nl.: $z=5$, $h=5$, $r=8$.

Wil men onderzoeken hoevele lichamen 6 zijvlakken hebben, dan stelt men $z=6$ en vindt: $12 \geq r \geq 9$, $8 \geq h \geq 5$, gevende de volgende gevallen:

$$\begin{array}{lll} z=6, & h=5, & r=9, \\ z=6, & h=6, & r=10, \\ z=6, & h=7, & r=11, \\ z=6, & h=8, & r=12; \end{array}$$

zoodat vier lichamen aan de vraag voldoen.

Bij een gegeven aantal ribben kan het aantal zijvlakken met dat der hoekpunten verwisseld worden. Twee lichamen heeten verwant wanneer het eerste zooveel hoekpunten heeft als het ander zijvlakken en omgekeerd, zoodat zij evenveel ribben bezitten. Deze verwantschap vervalt zoodra het aantal zijvlakken gelijk is aan het aantal hoekpunten.

85. Neemt men aan dat het lichaam wordt begrensd door veelhoeken van dezelfde soort en stelt n het aantal zijden van elken veelhoek voor, dan zal — daar elk zijvlak n ribben van het lichaam telt maar ook elke ribbe tot twee zijvlakken behoort, — de betrekking ontstaan:

$$r = \frac{nz}{2} \dots \dots \dots (4)$$

Zijn alle veelvlakkige hoeken van dezelfde soort en stelt m het aantal vlakken voor, dat in elk hoekpunt samen komt dan zal, daar elke ribbe twee hoekpunten verbindt, ook deze betrekking bestaan:

$$r = \frac{mh}{2} \dots \dots \dots (5)$$

Uit (4) volgt, dat wanneer een lichaam door gelijksoortige veelhoeken wordt begrensd, en deze een oneven aantal zijden hebben, het aantal zijvlakken even moet zijn, en omgekeerd.

Eenzoo leert (5), dat wanneer een lichaam enkel gelijksoortige veelvlakkige hoeken telt, en een oneven aantal vlakken in elk hoekpunt samenkomen, het aantal hoekpunten even is, en omgekeerd.

Dus bezit een lichaam dat alleen door driehoeken wordt begrensd een even aantal zijvlakken en een lichaam dat in elk hoekpunt een drievlakkigen hoek heeft, een even aantal hoekpunten.

86. Brengt men de betrekking (4) over in de vijfde ongelijkheid van n°. 83 dan wordt

$$\frac{1}{3}nz \geq z > \frac{1}{6}nz$$

of

$$3 \leq n < 6; \dots\dots\dots (6)$$

en brengt men evenzoo de betrekking (5) over in de derde ongelijkheid, dan wordt

$$3 \leq m < 6; \dots\dots\dots (7)$$

waaruit de beide eigenschappen voortvloeien:

1°. Wanneer een lichaam door enkel gelijksoortige veelhoeken wordt begrensd, kunnen dit slechts zijn driehoeken, vierhoeken of vijfhoeken;

2°. Wanneer een lichaam enkel gelijksoortige veelvlakkige hoeken bezit, kunnen dit slechts zijn drievlakkige, viervlakkige of vijfvlak-kige hoeken.

Een lichaam kan dus nooit begrensd worden door enkel veelhoeken van zes of meer zijden, noch enkel veelvlakkige hoeken van zes of meer vlakken bezitten.

87. Om gelijksoortige lichamen onderling te kunnen vergelijken, is het noodig te weten, op welke wijze en door hoevele grootheden een veelvlakkig lichaam is bepaald. Deze bepaling is niet zoo eenvoudig uit te drukken, als bij een veelhoek en in het algemeen bij vlakke figuren het geval is.

Even als in de vlakke meetkunde de driehoek als uitgangspunt voor de bepaling van rechte lijnige figuren dient, moet bij de beschouwing van lichamen in de ruimte het viervlak als element worden aangemerkt.

Het aantal grootheden waardoor het viervlak is bepaald kan gemakkelijk worden opgespoord. Beschouwt men toch een der zijvlak-

ken, b. v. den driehoek ABC (Fig. 25) dan is deze door drie onafhankelijke grootheden (I § 4, n^o, 28) bepaald. De plaats van het vierde

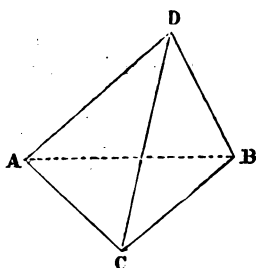


Fig. 25.

hoekpunt D wordt met betrekking tot het vlak ABC door drie grootheden vastgesteld, b. v. door zijne afstanden tot de hoekpunten A, B, C , of door twee van deze afstanden DA, DB en den hoek tusschen de vlakken ABD en ABC , of door den stand van de derde ribbe AD van den drievlakkigen hoek in A , waarvan een vlakke hoek bekend is, en de lengte dezer ribbe. Het viervlak is derhalve door zes onafhankelijke elementen bepaald, waaruit volgt (I § 4) dat viervlakken gelijk en gelijkvormig

zijn, wanneer zij zes onderling onafhankelijke elementen gelijk hebben. Deze zes grootheden kunnen zijn:

- de zes ribben,
- vijf ribben en een vlakke hoek,
- vier ribben en twee vlakke hoeken,
- enz.
- vijf ribben en een standhoek,
- vier ribben en twee standhoeken,
- enz.
- vier ribben, één vlakke hoek, één standhoek,
- enz.

doch niet zes hoeken, hetzij vlakke of standhoeken, omdat zes hoeken in de figuur nimmer onderling onafhankelijk zijn.

88. Beschouwen wij nu weder het Eulersche lichaam en nemen aan dat het uit n op elkander geplaatste viervlakken bestaat.

Voor het eerste viervlak zijn 6 bepalende grootheden noodig, voor elk der volgende slechts 3, omdat het met een zijvlak op een reeds gegeven vlak moet sluiten. Het aantal bepalende grootheden P noemende zal men dus hebben

$$P = 6 + 3(n - 1) = 3(n + 1) \dots \dots \dots (8)$$

dat is, volgens n^o. 82, juist het aantal ribben. Deze eigenschap blijft gelden, wanneer een of meer ribben wegvallen door het samenvallen van twee of meer zijvlakken der samenstellende viervlakken tot één zijvlak van het lichaam, omdat met het wegvallen van elke ribbe ook een der bepalende grootheden vervalt. Dus is in het algemeen, het aantal bepalende grootheden gelijk aan het aantal

ribben. Drukt men het aantal bepalende grootheden uit in het aantal hoekpunten, dan vindt men

$$P = 3n - 6 \dots\dots\dots (9)$$

Echter moeten bijzondere omstandigheden zooals de onderlinge gelijkheid van twee of meer ribben, van twee of meer vlakke hoeken, van twee of meer standhoeken, het recht zijn van een of meer vlakke hoeken of standhoeken onder de bepalende grootheden worden opgenomen. Doch niet, dat meer dan drie hoekpunten in één zijvlak vallen, of meer dan drie vlakken door één hoekpunt gaan, omdat voor elk hoekpunt dat valt in een reeds bepaald zijvlak ook eene ribbe verdwijnt, hetgeen evenzeer plaats heeft voor elk vlak, dat door het snijpunt van drie reeds bepaalde vlakken gaat.

89. Even als bij de gelijkheid van drie- en veelvlakkige hoeken (§ 7) kunnen bij de veelvlakkige lichamen twee gevallen van gelijk- en gelijkvormigheid plaats grijpen, namelijk die bij denzelfden stand, en die bij tegenoverstand of symmetrie. Welk dezer beide gevallen zich voordoet zal afhangen van de rangschikking der gelijke elementen, die in het eerste geval in dezelfde orde, in het tweede geval in tegenovergestelde volgorde plaats grijpt. Zijn lichamen gelijk en gelijkvormig bij denzelfden stand, dan kunnen zij in elkanders plaats gesteld worden; zijn zij gelijk en gelijkvormig bij tegenoverstand, dan kan tusschen beide een vlak van symmetrie geplaatst worden, ten opzichte waarvan de gelijke elementen ter wederzijde denzelfden stand bezitten. In beide gevallen zijn alle overeenkomstige elementen onderling gelijk.

90. Volgens de theorie der gelijkvormigheid in § 10 van het 1^{ste} deel uiteengezet kan men besluiten, dat gelijksoortige veelvlakkige lichamen gelijkvormig zijn, wanneer alle lijnen, die onder de bepalende elementen voorkomen, evenredig en de overige bepalende grootheden gelijk zijn. Uit dit eenvoudig kenmerk der gelijkvormigheid kan ook hier het gevolg worden afgeleid, dat alle gelijksoortige lichamen die door slechts éene lijn worden bepaald, (hoedanige lichamen wij in het vervolg zullen leeren kennen) gelijkvormig zijn.

Na deze algemeene opmerkingen komen wij tot de afzonderlijke beschouwing van enkele klassen van veelvlakkige lichamen.

§ 10.

De pyramide.

91. Onder de veelvlakkige lichamen neemt de groep der pyramiden eene voorname plaats in en onderscheidt zich van de overige veel-

vlakkige lichamen door het volgende kenmerk. Eene pyramide is een veelvlakkig lichaam, waarvan alle zijvlakken, behalve één, door een zelfde punt gaan.

Volgens deze bepaling kan eene pyramide op twee verschillende wijzen ontstaan: 1^o. door een veelvlakkigen hoek te snijden met een vlak, dat niet door het hoekpunt gaat; 2^o. door van een veelhoek al de hoekpunten door rechte lijnen te vereenigen met een punt, buiten het vlak van den veelhoek gelegen, en door deze lijnen twee aan twee in een bepaalde volgorde vlakken te brengen.

92. Het hoekpunt van den veelvlakkigen hoek is de top, het tegenovergelegen vlak is de basis of het grondvlak der pyramide. Aan de hoekpunten van het grondvlak kunnen enkel drievlakkige hoeken ontstaan, en alle zijvlakken behalve het grondvlak zijn driehoeken. De loodlijn TP (Fig. 26) uit den top op het grondvlak neergelaten, is de hoogte der pyramide. Blijkbaar is het in de vorige para-

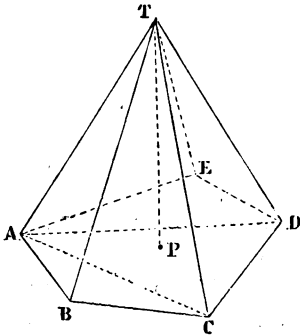


Fig. 26.

graaf beschouwde viervlak niets anders dan de eenvoudigste der pyramiden, waarbij elk hoekpunt als top, elk zijvlak als basis kan beschouwd worden. Bij elke pyramide is het aantal zijvlakken gelijk aan dat der hoekpunten, en wel gelijk aan het aantal vlakken van den veelvlakkigen hoek, of zijden van het grondvlak plus één. De naam der pyramide wordt ontleend niet aan het geheel aantal hoekpunten, maar aan dat van de hoekpunten van het grondvlak; zoo heeft eene n -hoekige pyramide $n + 1$ hoekpunten en zijvlakken, en $2n$ ribben, hetgeen over-

eenkomt met het theorema van Euler. Verder volgt hieruit (n° 88) dat de n -hoekige pyramide door $2n$ onafhankelijke grootheden wordt bepaald.

Tot hetzelfde aantal gegevens komt men door eerst het grondvlak te bepalen, waartoe (§ 6, n° 42) $2n - 3$ grootheden noodig zijn, vervolgens den top, die door drie elementen is bepaald, gevende te zamen evenzoo $2n$ elementen. Hieruit vloeit de gelijk- en gelijkvormigheid voort bij het gelijk zijn van $2n$ onafhankelijke elementen in dezelfde of in tegenovergestelde volgorde; en de gelijkvormigheid, wanneer onder die bepalende grootheden de lijnen evenredig, de overige gegevens gelijk zijn.

93. Zij $T.ABCD$ (Fig. 27) eene willekeurige pyramide, gesneden door twee evenwijdige vlakken waarvan de doorsneden zijn de veel-

hoeken $PQRS$ en $pqr s$. Daar (§ 5, n^o. 39) de snijding van een vlak met twee evenwijdige vlakken evenwijdige lijnen oplevert, zullen de overeenkomstige zijden der genoemde veelhoeken evenwijdig, dus ook de overeenkomstige hoeken P en p , Q en q enz. gelijk zijn. Volgens heeft men in de gelijkvormige driehoeken PQT en pqt , QRT en qrt , enz. de evenredigheden:

$$\begin{aligned} PQ : pq &= QT : qT, \\ QR : qr &= QT : qT = RT : rT, \\ RS : rs &= RT : rT = ST : sT, \\ &\text{enz.} \end{aligned}$$

gevende

$$PQ : pq = QR : qr = \text{enz.} = TQ : Tq. \quad |||$$

De veelhoeken $PQRS$ en $pqr s$, hunne hoeken gelijk en hunne overeenkomstige zijden evenredig hebbende, zijn gelijkvormig, zoodanig dat de verhouding der gelijkstandige lijnen is als die van de afstanden der overeenkomstige hoekpunten tot den top der pyramide. Hieruit volgt, in verband met het boven gezegde:

1^o. in elke pyramide geven evenwijdige doorsneden onderling gelijkvormige figuren;

2^o. pyramiden, die door evenwijdige vlakken van een zelfden veelvlakkigen hoek worden afgesneden, zijn gelijkvormig.

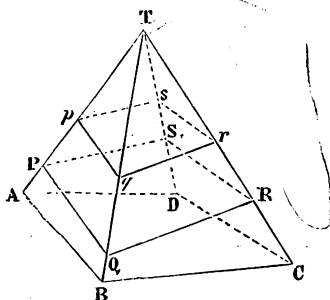


Fig. 27.

94. Daar in gelijkvormige figuren en lichamen alle gelijkstandige lijnen evenredig zijn, zullen de zijden der gelijkvormige veelhoeken zich verhouden als de afstanden hunner vlakken tot den top der pyramide; en in verband met de eigenschap (I § 24, n^o. 228), dat de inhouden van gelijkvormige figuren zich verhouden als de tweede machten der gelijkstandige lijnen, zullen bij elke pyramide de inhouden van evenwijdige doorsneden zich verhouden als de tweede machten der afstanden van hare vlakken tot den top.

95. Het gedeelte eener pyramide begrepen tusschen twee vlakken, die niet door den top gaan, heet afgeknotte pyramide. Zijn de vlakken niet evenwijdig, dan is de pyramide schuin afgeknott; zijn zij wel evenwijdig, dan ontstaat de recht afgeknotte pyramide; omdat echter dit laatste geval in den regel voorkomt, onderstelt men, wanneer geene nadere bepaling wordt gegeven, dat van eene afgeknotte pyramide de snijvlakken evenwijdig loopen. Deze vlakken worden dan

grondvlak en bovenvlak, en hun afstand de hoogte der afgeknotte pyramide genoemd; de zijvlakken zijn altijd trapezijs.

Ook zal eene afgeknotte pyramide ontstaan, wanneer twee gelijkvormige veelhoeken in evenwijdige vlakken met de gelijkstandige zijden evenwijdig worden geplaatst, en vervolgens door deze zijden vlakken gebracht. Dan toch volgt uit de evenredigheid der gelijkstandige zijden, dat de opstaande ribben verlengd zijnde elkander in één punt, den top der pyramide, snijden.

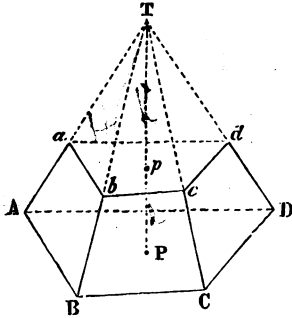


Fig. 28.

96. Wanneer van eene afgeknotte pyramide (Fig. 28) de inhouden van grond- en bovenvlak benevens de hoogte gegeven zijn, kunnen op de volgende wijze de afstanden dezer vlakken tot den top berekend worden.

Zij de inhoud van het grondvlak G , die van het bovenvlak B , hun afstand $pP = h$, verder $TP = H$, $Tp = k'$ dan is $H - k' = h$ en volgens de hierboven genoemde eigenschap:

$$G : B = H^2 : k'^2,$$

of

$$\sqrt{G} : \sqrt{B} = H : k',$$

gevende

$$(\sqrt{G} - \sqrt{B}) : h = \sqrt{G} : H = \sqrt{B} : k';$$

derhalve

$$H = h \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}; \quad k' = h \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} \dots \dots (1)$$

waardoor de onbekende in de bekende grootheden zijn uitgedrukt. Door deze uitkomsten kan men berekenen de plaats van het vlak van doorsnede, wier inhoud rekenkundig of meetkundig midden-evenredig is tusschen die van grond- en bovenvlak.

97. Heeft het grondvlak eener pyramide een middelpunt, dan is de lijn die den top met dit middelpunt vereenigt de as der pyramide; zij bevat de middelpunten van alle doorsneden evenwijdig aan het grondvlak.

Eene pyramide is recht, wanneer de as loodrecht staat op het grondvlak, en dus de top ligt in de loodlijn in het middelpunt op het grondvlak opgericht. De pyramide is regelmatig, wanneer zij recht, en tevens het grondvlak een regelmatige veelhoek is.

98. Eene bijzondere pyramide bezit eene eigenschap die eenige

overeenkomst bezit met het theorema van Pythagoras in de vlakke meetkunde. Deze eigenschap is de volgende: wanneer in eene driehoekige pyramide (Fig. 29) drie ribben, die in een hoekpunt (A) samenkomen, onderling loodrecht zijn geplaatst, dan is de tweede macht van den inhoud van het schuine vlak TBC gelijk aan de som der tweede machten van de inhouden der drie andere vlakken. Het bewijs dezer eigenschap kan op de volgende wijze gegeven worden. Men trekke TD loodrecht op BC, dan is ook (§ 3 n^o. 19) AD loodrecht op BC en verder:

$$\begin{aligned} \text{I. } \Delta BTC &= \frac{1}{2} BC \times TD, \\ \text{I. } \Delta BAC &= \frac{1}{2} BC \times AD, \\ \text{I. } \Delta BTA &= \frac{1}{2} BA \times TA, \\ \text{I. } \Delta CTA &= \frac{1}{2} CA \times TA. \end{aligned}$$

Wegens den onderling loodrechten stand van AT, AB, AC is ook

$$BC^2 = BA^2 + CA^2,$$

derhalve

$$\begin{aligned} BC^2 \times TD^2 &= BC^2 (AD^2 + TA^2) \\ &= BC^2 \times AD^2 + (BA^2 + CA^2) TA^2, \end{aligned}$$

of

$$\left(\frac{1}{2} BC \times TD\right)^2 = \left(\frac{1}{2} BC \times AD\right)^2 + \left(\frac{1}{2} BA \times TA\right)^2 + \left(\frac{1}{2} CA \times TA\right)^2;$$

dat is

$$(\Delta BTC)^2 = (\Delta BAC)^2 + (\Delta BTA)^2 + (\Delta CTA)^2;$$

waarmede de genoemde eigenschap is bewezen. Zij kan ook meer algemeen op de volgende wijze worden uitgedrukt: de tweede macht van den inhoud eens driehoeks is gelijk aan de som van de tweede machten der inhouden van zijne projectien op drie onderling loodrechte vlakken.

§ 11.

Het prisma en het prismoïde.

99. Een tweede groep van bijzondere lichamen omvat de prisma's die zich door het volgend kenmerk onderscheiden. Een prisma is een veelvlakig lichaam, waarvan twee zijvlakken onderling evenwijdig zijn, en al de andere evenwijdig aan

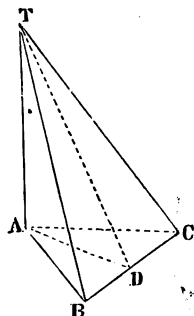


Fig. 29.

eene zelfde rechte lijn. De beide eersten zijn het grond- en bovenvlak, de laatste ~~een in het bijzonder~~ zijvlakken genoemd, snijden elkander (§ 4 n^o. 24) volgens evenwijdige ribben, zoodat bij het prisma alle opstaande ribben, zijnde degene, die niet tot het bovenvlak of grondvlak behooren, evenwijdig zijn. Uit de bepaling volgt, dat alle zijvlakken parallelogrammen zijn, want daar evenwijdige vlakken door een derde vlak volgens evenwijdige lijnen worden gesneden, zijn van elk zijvlak

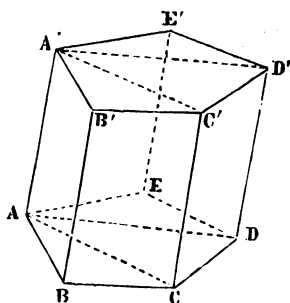


Fig. 30.

$ABA'B'$ (Fig. 30) de overstaande ribben evenwijdig. Hieruit volgt weder de gelijkheid der overstaande ribben AB en $A'B'$, BC en $B'C'$ enz., zoodat grond- en bovenvlak gelijke en evenwijdige zijden bezitten, derhalve gelijk en gelijkvormig zijn. Tevens blijkt dat alle opstaande ribben evenlang zijn. Het prisma kan dus beschouwd worden als eene afgeknotte pyramide, waarvan grond- en bovenvlak niet alleen gelijkvormig maar ook gelijk zijn, zoodat de top op oneindig grooten afstand valt.

100. Hieruit volgt, dat het prisma ook ontstaat wanneer uit al de hoekpunten van een willekeurigen veelhoek evenwijdige rechte lijnen worden getrokken, door deze achtereenvolgens twee aan twee vlakken gebracht, en deze vlakken gesneden door een vlak evenwijdig aan het grondvlak. De naam van het prisma wordt even als bij de pyramide ontleend aan het aantal hoekpunten van het grondvlak. Is dit aantal n , dan is het geheel aantal hoekpunten $2n$, het aantal zijvlakken $n + 2$, het aantal ribben $3n$, waardoor aan het theorema van Euler is voldaan. Het aantal bepalende grootheden is $2n$, zijnde $2n - 3$ ter bepaling van het grondvlak en 3 voor den stand en de lengte der gelijke opstaande ribben. Dit kan ook uit de in n^o. 88 voorkomende algemeene bepaling afgeleid worden. Het aantal ribben is hier namelijk $3n$, doch grond- en bovenvlak zijn evenwijdig, gevende ééne voorwaarde, de n opstaande ribben zijn ook onderling evenwijdig gevende $n - 1$ voorwaarden, zoodat ter bepaling nog $2n$ onafhankelijke grootheden overblijven.

De voorwaarden tot de gelijk- en gelijkvormigheid als mede die voor de gelijkvormigheid der prisma's kunnen hieruit gemakkelijk afgeleid worden.

In het prisma heeft men geene andere dan drievlakkige hoeken.

101. Bij elk prisma geven evenwijdige doorsneden gelijke en gelijkvormige veelhoeken. Het bewijs dezer eigenschap ligt opgesloten in het voorgaand betoog, dat grond- en bovenvlak gelijk en gelijkvormig zijn.

102. Een afgeknot prisma is het gedeelte, dat van een prisma wordt afgesneden door een vlak, dat niet evenwijdig is aan het grondvlak. Het bovenvlak is dan een veelhoek van evenveel zijden, doch niet gelijk en gelijkvormig met het grondvlak.

Een prisma is recht, wanneer de opstaande zijvlakken, dus ook de ribben, volgens welke zij elkander snijden, loodrecht staan op het grondvlak. De lengte der opstaande ribben is dan tevens de hoogte van het prisma.

Heeft het grondvlak een middelpunt, dan is de lijn door dit middelpunt evenwijdig aan de opstaande ribben getrokken de as van het prisma.

Een prisma is regelmatig, wanneer het recht is en tot grondvlak een regelmatig veelhoek heeft. Alle zijvlakken zijn dan gelijke en gelijkvormige rechthoeken.

103. Wanneer een prisma tot grondvlak heeft een parallellogram, dan wordt het parallelipedum genoemd. Alle zijvlakken van zulk een lichaam (Fig. 31) zijn parallelogrammen. In het geheel zijn er zes, die twee aan twee evenwijdig en tevens gelijk en gelijkvormig zijn, zoo dat elk zijvlak als grondvlak, het tegenovergestelde als bovenvlak en de afstand dezer vlakken als de hoogte van het lichaam kan beschouwd worden. Het parallelipedum heeft verder twaalf ribben, die vier aan vier gelijk zijn, en ook twaalf vlakke hoeken en twaalf standhoeken, die vier aan vier gelijk zijn, zoodat aan elk hoekpunt de ongelijke elementen samenkomen. Men kan het parallelipedum gemakkelijk verkrijgen, wanneer men op de ribben van een drievlakkigen hoek willekeurige stukken uitzet en door elk der uiteinden een vlak brengt evenwijdig aan het tegenoverstaande vlak; deze drie vlakken begrenzen met die van den drievlakkigen hoek een parallelipedum; tevens blijkt hieruit, dat zulk een lichaam door zes grootheden wordt bepaald.

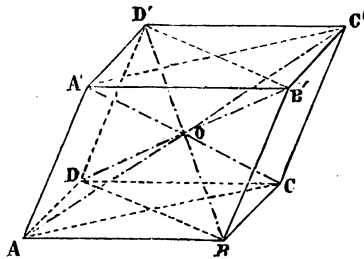


Fig. 31.

104. Het parallelipedum heeft vier hoofddiagonalen en twaalf zijddiagonalen. De vier hoofddiagonalen $A'C'$, $A'C$, $B'D'$, $B'D$, snijden elkander binnen het lichaam in een enkel punt, zijnde het snijpunt van de drie assen, tevens het middelpunt van het lichaam.

De hoofddiagonalen $A'C'$ en $A'C$ liggen in het diagonaalvlak $AA'C'C'$, evenzoo $B'D'$ en $B'D$ in het diagonaalvlak $BB'D'D'$; elk van deze vlakken verdeelt het lichaam in twee driehoekige prisma's die

bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn. Passen wij toe de eigenschap van het parallellogram in I § 13 n^o. 99 gevonden, dan is

$$A C'^2 + A' C^2 = A A'^2 + C C'^2 + A C^2 + A' C'^2,$$

en

$$B D'^2 + B' D^2 = B B'^2 + D D'^2 + B D^2 + B' D'^2;$$

gevende

$$A C'^2 + A' C^2 + B D'^2 + B' D^2 = A A'^2 + B B'^2 + C C'^2 + D D'^2 + A C^2 + B D^2 + A' C'^2 + B' D'^2.$$

Maar volgens dezelfde eigenschap is

$$A C^2 + B D^2 = A B^2 + B C^2 + C D^2 + A D^2$$

$$A' C'^2 + B' D'^2 = A' B'^2 + B' C'^2 + C' D'^2 + A' D'^2;$$

derhalve

$$A C'^2 + A' C^2 + B D'^2 + B' D^2 = A A'^2 + B B'^2 + C C'^2 + D D'^2 + A B^2 + B C^2 + C D^2 + A D^2 + A' B'^2 + B' C'^2 + C' D'^2 + A' D'^2,$$

leerende: in elk parallelopipedum is de som van de tweede machten der hoofd-diagonalen gelijk aan de som van de tweedemachten der ribben.

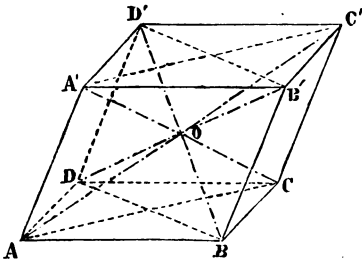


Fig. 31.

Noemende de ongelijke ribben

$$A B = a, A D = b, A A' = c,$$

dan wordt

$$A C'^2 + A' C^2 + B D'^2 + B' D^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

Op dezelfde wijze kan worden aangetoond, dat de som van de tweede machten van al de zijdiagonalen gelijk is aan tweemaal de som van de tweede machten der ribben; waaruit volgt, dat de som van de tweede machten der zijdiagonalen gelijk is aan tweemaal de som van de tweede machten der hoofd-diagonalen.

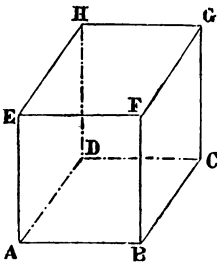


Fig. 32.

105. Staan van een parallelopipedum de ribben in één hoekpunt loodrecht op elkander, dan zijn in alle hoekpunten de ribben en de vlakken onderling loodrecht. Het lichaam (Fig. 32) wordt dan een recht hoekig parallelopipedum of korter een balk genoemd. Elk der diagonaal-

vlakken verdeelt het in twee gelijke en gelijkvormige rechte drie-

hoekige prisma's. De hoofddiagonalen zijn onderling gelijk en dus is, volgens de bovengenoemde eigenschap, de tweede macht van elke hoofddiagonaal gelijk aan de som van de tweede machten der drie ongelijke ribben, welke betrekking ook onmiddellijk aan de figuur kan worden ontleend.

106. Zijn van een balk de ribben in één hoekpunt samenkomende onderling gelijk, dan zijn al de ribben even groot en het lichaam wordt cubus of teerling genoemd. Bij dit lichaam zijn alle hoofd- en ook alle zijdiagonalen onderling gelijk. Is a de lengte der ribben, dan is $a\sqrt{2}$ de lengte der zijdiagonalen, en $a\sqrt{3}$ de lengte der hoofddiagonalen.

Het rechthoekig parallelipedum wordt bepaald door drie onafhankelijke grootheden, de cubus door slechts éene, zoodat alle cubussen onderling gelijkvormige lichamen zijn.

107. Het prismoïde¹⁾ is een lichaam, dat in de ruimste beteekenis genomen op de volgende wijze ontstaat. Zijn (Fig. 33) A B C D E F en P Q R S twee willekeurige veelhoeken in evenwijdige vlakken gelegen; brengt men dan achtereenvolgens vlakken door eene zijde van den eenen en een hoekpunt van den anderen veelhoek, b. v. door A B en P, B en P Q, C D en Q, D en Q R enz., dan zal het op deze wijze begrensde lichaam een prismoïde zijn. Grond- en bovenzvlak van dit lichaam zijn dus willekeurige maar evenwijdige veelhoeken, de zijvlakken allen driehoeken. Zij het aantal zijden van het grondvlak m , van het bovenzvlak n , dan is het aantal hoekpunten $m + n$, het aantal zijvlakken $m + n + 2$, het aantal ribben $2(m + n)$, het aantal bepalende grootheden $2(m + n) - 1$ omdat de voorwaarde van de evenwijdigheid van grond- en bovenzvlak één grootheid telt. Verder is gemakkelijk in te zien, dat de doorsnede van het lichaam met een vlak evenwijdig aan grond- en bovenzvlak een veelhoek geeft waarvan het aantal zijden is $m + n$. De afstand van grond- en bovenzvlak is de hoogte van het lichaam. Loopt eene zijde van het bovenzvlak evenwijdig aan de overeenkomstige zijde van het grondvlak, dan vallen twee grens-driehoeken in

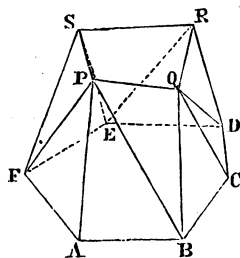


Fig. 33.

¹⁾ Omtrent deze benaming zijn de wiskundigen het niet eens. Sommige noemen het lichaam prismatoïde (zie o. a. Landré Stereometrische hoofdstukken enz. Hoofdstuk IV n°. 57). Om mij hierin zekerheid te verschaffen wendde ik mij tot mijn ambtgenoot Cobet, die mij ondubbelzinnig verklaarde, dat prismatoïde geen grieksch woord, maar prismoïde de behoorlijke vorm is.

één vlak en vormen te zamen een trapezium. Heeft het bovenvlak evenveel zijden als het grondvlak, en zijn de zijden van het eerste evenwijdig aan de overeenkomstige zijden van het tweede, dan worden al de zijvlakken trapeziums. Onder die omstandigheden wordt het lichaam ook wel obelisk of zuil genoemd. Zijn daarenboven de zijden van het bovenvlak evenredig aan de overeenkomstige zijden van het grondvlak, dan zijn deze veelhoeken gelijkvormig en het lichaam gaat over in eene afgeknotte pyramide. Zijn van een obelisk grond- en bovenvlak trapeziums, dan zijn alle grensvlakken trapeziums; zijn eindelijk grond- en bovenvlak rechthoeken, dan draagt het lichaam den naam van recht prismoïde of rechte zuil.¹⁾

§ 12.

De regelmatige lichamen.

108. Een regelmatig veelvlakkig lichaam is een lichaam, waarvan alle zijvlakken zijn regelmatige veelhoeken van dezelfde soort, die volgens gelijke tweevlakkige hoeken aan elkander sluiten. Uit deze bepaling blijkt, dat regelmatige pyramiden en prisma's nog geene regelmatige lichamen zijn. Verder volgt uit de gegeven bepaling, dat bij elk regelmatig lichaam:

1^o. in alle hoekpunten evenveel zijvlakken samenkomen,

2^o. de drie- of veelvlakkige hoeken onderling gelijk zijn,

3^o. al de ribben even lang zijn;

4^o. de grootte slechts afhangt van éene lijn, nl. de bepalende grootheid van het regelmatig zijvlak, zoodat alle regelmatige lichamen van dezelfde soort gelijkvormig zijn,

5^o. elk zijvlak, elk hoekpunt en elke ribbe op dezelfde wijze in het lichaam voorkomt.

109. Daar volgens de bepaling de regelmatige lichamen tot de Eulersche lichamen behooren geldt voor hen de betrekking 1) uit § 9, zijnde

$$z + h = r + 2 \dots \dots \dots (1)$$

waarin weder z het aantal zijvlakken, h het aantal hoekpunten, r het aantal ribben voorstelt.

Zijn de grensvlakken regelmatige n hoeken, dan heeft men ook (n^o. 69)

$$r = \frac{n}{2} z \dots \dots \dots (2).$$

Zij eindeijk m het aantal vlakken, die in elk hoekpunt samenkomen,

1) Vóór de uitbreiding door Wittstein in 1860 met zijn geschrift „das Prismatoïde“ aan dit deel der stereometrie gegeven, werd alleen het laatst in den text genoemde lichaam prismoïde genoemd. Thans vormt het slechts een bijzonder geval.

dan zullen in elk hoekpunt ook m ribben samenkomen, waaruit volgt

$$r = \frac{m}{2} h \dots \dots \dots (3).$$

Uit de betrekkingen (1), (2) en (3), kunnen z , h en r worden opgelost en uitgedrukt in m en n ; men verkrijgt dan:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{4m}{2n + 2m - nm} \\ h &= \frac{4n}{2n + 2m - nm} \\ r &= \frac{2nm}{2n + 2m - nm}; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

zoodat z , h en r bekend zijn voor elke waarde van n en m . Wanneer voor twee regelmatige lichamen n en m onderling verwisselen, zullen ook z en h verwisselen en voor beiden r dezelfde waarde hebben. Zoodanige regelmatige lichamen noemt men verwant.

110. Om tot het aantal en de verdere bepaling der regelmatige lichamen te komen, moeten wij nagaan, hoeveel overeenkomstige waarden voor n en m gevonden kunnen worden. Daartoe merken wij op dat in de uitdrukkingen (4) de noemer noodzakelijk een positief getal moet zijn, gevende de betrekking:

$$2n + 2m > nm$$

of

$$\left. \begin{aligned} m &< \frac{2n}{n-2} \\ n &< \frac{2m}{m-2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

De waarde der tweede leden in deze ongelijkheden nemen af met toenemende waarden van n en m en verkrijgen dus hunne grootste waarde, zijnde 6, voor de kleinste van n of m , zijnde drie. Hieruit volgt dat zoowel n als m tusschen de waarden drie en zes zijn gelegen, waarbij slecht de eerste grens kan bereikt worden.

Tot dezelfde uitkomst geraken wij, door uit te gaan van de eigenschap (§ 8, n^o. 74), dat in elken veelvlakkigen hoek de som der vlakke hoeken kleiner is dan 360° . Nu heeft de veelvlakkige hoek van een regelmatig lichaam gelijke vlakke hoeken, en daar zij de hoeken zijn van een regelmatigen n -hoek is de grootte van elken hoek (I § 21, n^o. 176)

$$= \frac{n-2}{n} \times 180^\circ. \text{ Daar verder in elk hoekpunt van het lichaam } m$$

vlakken samenkomen, moet

$$m \times \frac{n-2}{n} \times 180^\circ < 360^\circ.$$

of

$$m(n-2) < 2n$$

waaruit weder de bovenstaande betrekkingen (5) kunnen afgeleid worden.

111. Elk stel geheele waarden van m en n , dat aan deze betrekkingen voldoet en binnen de boven bepaalde grenzen is gelegen, zal een regelmatig lichaam opleveren.

Stelt men $n = 3$, dan wordt $m < 6$.

$$\begin{array}{ccccccc} & & n = 4, & & & m < 4. \\ " & " & & " & " & & \\ & & n = 5, & & & m < 3\frac{1}{2}. \\ " & " & & " & " & & \end{array}$$

zoodat hieruit de volgende gevallen ontstaan:

1^o. $n = 3$, $m = 3$; in elk hoekpunt komen drie gelijkzijdige driehoeken te zamen;

2^o. $n = 3$, $m = 4$; in elk hoekpunt komen vier gelijkzijdige driehoeken te zamen;

3^o. $n = 3$, $m = 5$; in elk hoekpunt komen vijf gelijkzijdige driehoeken te zamen;

4^o. $n = 4$, $m = 3$; in elk hoekpunt komen drie vierkanten te zamen;

5^o. $n = 5$, $m = 3$; in elk hoekpunt komen drie regelmatige vijfhoeken te zamen.

112. Voor de grensgevallen:

$$n = 3, m = 6,$$

$$n = 4, m = 4,$$

$$n = 6, m = 3,$$

vallen de veelhoeken om het hoekpunt in één plat vlak, zoodat zij geen lichaam kunnen begrenzen. Dit stemt overeen met hetgeen in het eerste deel § 21 n^o. 195 hieromtrent is opgemerkt.

113. Met behulp der formules (4) zullen wij nu elk der vijf gevallen afzonderlijk onderzoeken. Vooraf zij opgemerkt, dat overeenkomstig de gegeven bepaling het 2^e en 4^e geval, zoowel als het 3^e en 5^e verwante regelmatige lichamen zullen opleveren.

1^{ste} Geval.

Voor $n = 3$, $m = 3$ geven de formules (4)

$$z = 4, h = 4, r = 6;$$

zoodat het lichaam wordt begrensd door vier gelijkzijdige driehoeken en daarom genoemd wordt het regelmatig viervlak (tetraeder).

Blijkbaar is het niets anders dan eene driehoekige pyramide, waarvan de zijvlakken gelijke gelijkzijdige driehoeken zijn (Fig. 34).

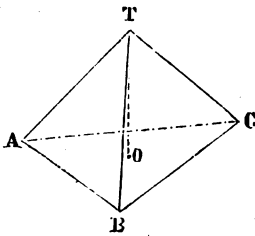


Fig. 34.

2de Geval.

Voor $n = 3$, $m = 4$ geven de formules (4)

$$z = 8, h = 6, r = 12;$$

het lichaam wordt dus begrensd door acht gelijkzijdige driehoeken, waarvan er in elk hoekpunt vier te zamen komen. Het lichaam draagt den naam van regelmatig achthvlak (oktaeder), heeft zes hoekpunten en twaalf ribben (Fig. 35). Elk diagonaalvlak b. v. B C D E is een vierkant en verdeelt het lichaam in twee regelmatige vierhoekige pyramiden, die volgens hun gemeenschappelijk grondvlak aan elkander sluiten, en twee tegenovergelegen hoekpunten tot top hebben.

3de Geval.

$n = 3$, $m = 5$ geven

$$z = 20, h = 12, r = 30,$$

zoodat het lichaam begrensd wordt door twintig gelijkzijdige driehoeken, waarvan vijf in elk hoekpunt samenkomen; om die reden wordt het lichaam regelmatig twintigvlak (ikosaeder) genoemd (Fig. 36). Elk hoekpunt b. v. A kan beschouwd worden als de top van eene regelmatige vijfhoekige pyramide, wier basis B C D E F het diagonaalvlak is, gaande door de vijf naastgelegen hoekpunten. Neemt men deze pyramide weg, benevens de gelijke pyramide die het tegenovergelegen hoekpunt a tot top heeft dan blijft een regelmatig prismoïde over.

4de Geval.

Voor $n = 4$, $m = 3$ wordt

$$z = 6, h = 8, r = 12;$$

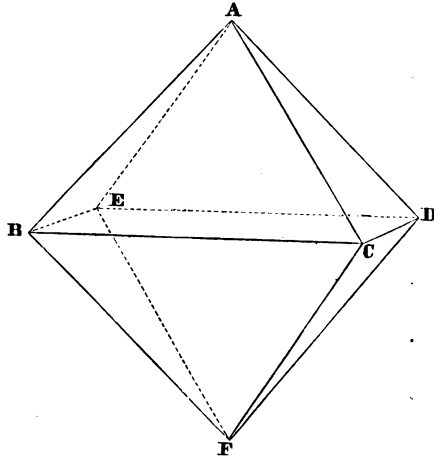


Fig. 35.

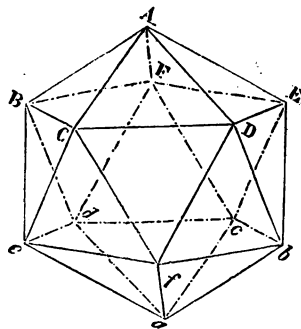


Fig. 36.

het lichaam begrensde wordende door zes vierkanten is geen ander dan de reeds bekende cubus (Fig 37), die nu ook den naam van regelmatig zesvlak (hexaeder) ontvangt.

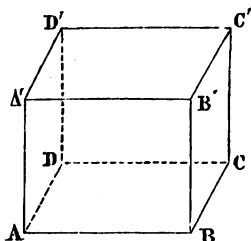


Fig 37.

Dit lichaam bezit acht hoekpunten en twaalf ribben.

5de Geval.

Voor $n = 5$, $m = 3$ worden

$$z = 12, h = 20, r = 30,$$

zoodat de grensvlakken zijn twaalf regelmatige vijfhoeken, waarvan drie in elk hoekpunt samenkomen. Het lichaam verkrijgt daarom den naam van regelmatig twaalfvlak (dodekaeder), en bezit twintig hoekpunten en dertig ribben (Fig. 38).

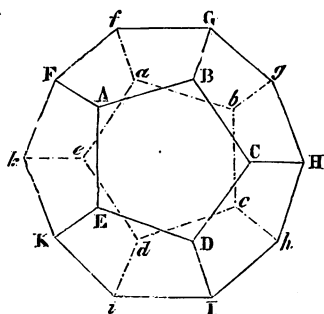


Fig 38.

114. Behalve de vijf genoemde zijn onder de gegeven bepaling geene andere regelmatige lichamen mogelijk. Zooals reeds is opgemerkt zijn het achthekvlak en het zesvlak, het twintigvlak en het twaalfvlak, verwante regelmatige lichamen, want het aantal ribben is voor hen hetzelfde, het aantal zijvlakken en hoekpunten verwisselt.

115. Tot gemakkelijk overzicht laten wij een tafeltje volgen, de aantallen elementen der vijf regelmatige lichamen bevattende, waarbij zij naar het aantal zijvlakken zijn gerangschikt.

Naam.	Hoekpunten op één zijvlak. n	Zijvlakken in één hoekpunt. m	Hoekpunten. h	Ribben. r .
Viervlak.	3	3	4	6
Zesvlak.	4	3	8	12
Achthekvlak.	3	4	6	12
Twaalfvlak.	5	3	20	30
Twintigvlak.	3	5	12	30

AANMERKING. In de inleiding tot het eerste deel is reeds opgemerkt dat indien men van eene ruimere bepaling van het begrip veelhoek uitgaat, dan hier zooals gewoonlijk is gevolgd, verschillende merkwaardige eigenschappen der rechthoekige figuren worden verkregen. Zoo is het ook met de regelmatige veelvlakkige lichamen. Door van eene ruimere bepaling van het begrip veelvlak en regelmatig veelvlak uit te gaan, kunnen tot de laatste soort van figuren nog een viertal worden toegevoegd, die den naam van regelmatige stervormige lichamen hebben verkregen, fraaien vorm en hoogst belangrijke eigenschappen bezitten. Waarom deze nieuwere beschouwingen niet in dit leerboek zijn opgenomen, is in de genoemde inleiding vermeld, terwijl ik nogmaals verwijs naar de aldaar genoemde werken (Landré. Stereometrische hoofdstukken enz. Hoofdstuk VII; Wiener, über Vielecke und Vielfläche), ten behoeve van hen die hiermede kennis willen maken. Fraaie modellen van de regelmatige stervormige lichamen bevinden zich in de mathematische collectie van de Leidsche universiteit.

DERDE HOOFDSTUK.

GEBOGEN OPPERVLAKKEN.

§ 13.

Kegelvlakken en Cylindervlakken.

116. Elk niet plat vlak is een gebogen oppervlak; de verscheidenheid dezer oppervlakken is dus eindeloos, zoodat het moeilijk zou vallen eigenschappen te zoeken, die aan allen gemeen zijn. Doch er zijn enkele klassen, die een algemeen kenmerk en bijzondere eigenschappen bezitten; alleen met diegenen, welke op de eenvoudigste wijze ontstaan, zullen wij ons hier bezig houden.

In het eerste deel (n^o. 3) en ook in het begin van het tweede is het platte vlak bepaald door de beweging eener rechte lijn, die aan bijzondere voorwaarden is gebonden. Hieruit volgt, dat niet bij elke beweging eener rechte lijn een plat vlak ontstaat; in het algemeen noemt men alle vlakken, die door de beweging eener rechte lijn worden voortgebracht regelvlakken. Deze klasse van oppervlakken hebben derhalve de eigenschap gemeen, dat door elk van hunne punten minstens ééne rechte lijn kan getrokken worden, die geheel op het oppervlak ligt. Onder de groote groep van deze regelvlakken komen twee klassen voor, die het eerst in aanmerking komen, omdat zij zich het naast bij de beschouwingen van het voorgaande hoofdstuk aansluiten.

117. Eene rechte lijn, die altijd door een vast punt gaat en zich tevens langs eene andere rechte lijn beweegt, beschrijft een plat vlak (§ 1 n^o. 2); laat men nu de rechte lijn door het vaste punt gaan en zich bewegen langs eene willekeurige kromme lijn, mits niet in één vlak met het vaste punt gelegen, dan beschrijft de rechte lijn een kegelvlak.

118. De lijn, die zich beweegt, heet de beschrijvende lijn (genera-

trix), de kromme lijn, waarlangs zij zich beweegt de richtlijn (directrix), het vaste punt de top van het kegelvlak. Is de richtlijn recht of in één vlak gelegen met den top, dan gaat het kegelvlak over in een plat vlak. De beschrijvende lijn moet in beide richtingen onbepaald lang gedacht worden, zoodat het kegelvlak bestaat uit twee deelen of bladen, die onderling slechts door één punt, den top, verbonden zijn en zich beide in tegenovergestelde richting onbepaald uitstrekken. Is de richtlijn eene gesloten kromme lijn, dan heet ook het kegelvlak gesloten; snijdt men het door een plat vlak, dat niet door den top gaat, maar alle beschrijvende lijnen aan dezelfde zijde van den top snijdt, dan wordt een gedeelte der ruimte ingesloten en daardoor een lichaam gevormd, dat den naam van kegel ontvangt. Dit lichaam heeft tot grondvlak de figuur, die in dit vlak door de doorsnede met het kegelvlak ontstaat, en tot hoogte den afstand van den top tot het grondvlak. Hieruit volgt, dat de kegel na verwant is aan de pyramide; de laatste gaat over in den eersten, wanneer de veelhoek, die hare basis uitmaakt, overgaat in eene kromme lijn. Derhalve zijn alle eigenschappen der pyramide, die niet afhangen van het aantal zijden van het grondvlak van toepassing op den kegel.

119. Hieruit kunnen twee voorname eigenschappen der kegelvlakken worden afgeleid.

1^o Een kegelvlak is een ontwikkelbaar oppervlak.

Een gebogen oppervlak is ontwikkelbaar, wanneer het zoodanig in een plat vlak kan uitgestrekt worden, dat de onderlinge samenhang der deelen niet wordt verbroken en de onderlinge afstand der punten op het oppervlak gemeten geene verandering ondergaat. Nu is duidelijk dat het oppervlak eener pyramide kan ontwikkeld worden door de verschillende driehoeken om de gemeenschappelijke zijde te laten wendelen, tot zij alle in één vlak zijn gelegen. Laat men dan de zijden van het grondvlak al kleiner en kleiner worden, tot zij in elementen eener kromme lijn overgaan, dan zal dezelfde ontwikkeling kunnen plaats grijpen, waardoor het kegelvlak, op het platte vlak uitgestrekt, den vorm zal aannemen van een uitgespreiden waaier, wiens hoekpunt de top des kegels is.

2^o. Evenwijdige doorsneden van een kegelvlak geven gelijkvormige figuren. Deze eigenschap der pyramide § 10 n^o. 93), onafhankelijk zijnde van het aantal en de grootte der zijvlakken kan op het kegelvlak worden overgebracht. De verhouding van de gelijkstandige lijnen der gelijkvormige figuren is ook hier de verhouding van de afstanden van de vlakken van doorsnede tot den top.

120. Het gedeelte van een kegel, begrepen tusschen twee snijvlakken, is een afgeknotten kegel; scheef afgeknott, wanneer de vlakken niet evenwijdig zijn; recht afgeknott wanneer zij evenwijdig

derhalve grond- en bovenvlak gelijkvormig zijn. Dit laatste geval wordt altijd bedoeld, wanneer men zonder nadere aanwijzing van afgeknotten kegel spreekt. De betrekkingen (1) van § 10 n°. 96 en de benamingen daar gebruikt, gelden ook voor den afgeknotten kegel.

Heeft het grondvlak des kegels een middelpunt, dan is de lijn uit dit punt naar den top getrokken de as des kegels; zij bevat de middelpunten van alle aan het grondvlak evenwijdige doorsneden. Staat de as loodrecht op het grondvlak dan is de kegel recht.

121. Een plat vlak ontstaat ook (§ 1 n°. 2) door de beweging eener rechte lijn evenwijdig aan zich zelven langs eene andere rechte lijn. Laten wij nu de rechte lijn bewegen evenwijdig aan zich zelve langs eene kromme lijn, dan ontstaat een cylindervlak. De rechte lijn is ook hier de beschrijvende lijn, de kromme lijn is de richtlijn. Is de laatste recht of gelegen in een plat vlak, dat ook de richting der beschrijvende lijn bevat, dan gaat het cylindervlak over in een plat vlak. Elke rechte lijn door een punt van een cylindervlak evenwijdig aan de richting der beschrijvende lijn getrokken, ligt geheel op het oppervlak. Het cylindervlak kan beschouwd worden als een bijzonder geval van het kegelvlak, wanneer nl. de top van het laatste valt op oneindigen afstand. Het cilindervlak is gesloten wanneer de richtlijn eene gesloten kromme lijn is. Snijdt men een gesloten cilindervlak door twee evenwijdige vlakken, dan wordt een lichaam begrens'd, dat den naam van cylinder draagt.

122. Hieruit blijkt, dat een cylinder is een prisma, waarvan het grondvlak eene kromlijnige figuur is, zoodat alle eigenschappen van het laatstgenoemd lichaam, die onafhankelijk zijn van de grootte en het aantal zijden van het grondvlak, ook op den cylinder van toepassing zijn. Deze overeenkomst levert de beide volgende eigenschappen van de cylindervlakken:

1°. een cylindervlak is ontwikkelbaar. De zijvlakken van een prisma kunnen in één plat vlak uitgestrekt worden door ze beurtelings te laten wentelen om eene gemeenschappelijke ribbe. Laat men de zijden van het grondvlak kleiner worden tot zij in elementen eener kromme lijn overgaan, dan blijft de eigenschap onveranderd en het prisma gaat over in een cylinder.

2°. alle evenwijdige doorsneden van een cylindervlak geven gelijke en gelijkvormige figuren. Deze eigenschap van het prisma, onafhankelijk zijnde van de grootte en het aantal zijvlakken geldt onveranderd voor het cylindervlak. Grond- en bovenvlak een cylinders zijn derhalve gelijke en gelijkvormige figuren.

123. Heeft het grondvlak eens cylinders een middelpunt, dan is de lijn, door dit punt evenwijdig aan de beschrijvende lijn getrokken, de as des cylinders. Staat de beschrijvende lijn loodrecht op het grond-

vlak dan is het geheele oppervlak loodrecht op het grondvlak, en wordt de cylinder recht genoemd. Een afgeknotte cylinder is het gedeelte, dat van een cylinder wordt afgesneden door een vlak dat niet evenwijdig loopt aan het grondvlak. Snijdt men een scheeven cylinder door een vlak loodrecht op de beschrijvende lijn, dan wordt hij verdeeld in twee rechte afgeknotte cylinders.

De hoogte eens cylinder is de afstand van grond- en bovenvlak; bij een rechten cylinder is de hoogte gelijk aan het gedeelte der beschrijvende lijn, dat tusschen grond- en bovenvlak is begrepen.

§ 14.

Omwentelingsvlakken.

124. Laat men eene vlakke figuur om eene rechte lijn zoodanig wentelen, dat elk harer punten voortdurend blijft op denzelfden afstand van het voetpunt der loodlijn uit het punt op de rechte lijn neergelaten, dan ontstaat een omwentelingsvlak. De rechte lijn is de omwentelingsas; de wentelende figuur is de beschrijvende lijn van het omwentelingsvlak; bij de beweging beschrijft elk harer punten een cirkel, waarvan het vlak loodrecht staat op de as en het middelpunt is gelegen in de as. Hieruit volgt, dat alle doorsneden van het oppervlak loodrecht op de as cirkels zijn, zoodat het omwentelingsvlak ook beschouwd kan worden als te ontstaan door de beweging eens cirkels, waarvan het vlak blijft loodrecht op, het middelpunt in de as, en de straal gedurende de beweging zoodanig verandert, dat hij altijd gaat door eene vaste rechte of kromme lijn, zijnde de beschrijvende lijn uit de eerstgenoemde wijze van wording in een harer standen. Hier is dus de oorspronkelijke beschrijvende lijn overgegaan in eene richtlijn.

125. Elk punt van de beschrijvende lijn blijft gedurende hare beweging op denzelfden afstand van elk punt der as.

De beschrijvende lijn behoeft niet in één vlak te zijn gelegen met de as; zoo ontstaat een omwentelingsvlak, wanneer men van een paar kruisende lijnen de eene als as, de andere als beschrijvende lijn beschouwt. Snijdt men echter een omwentelingsvlak door verschillende platte vlakken, die door de as gaan, dan zullen altijd de doorsneden gelijke en gelijkvormige figuren zijn, want alle bestaan uit eene rij punten, die op gelijke afstanden van dezelfde punten der as zijn gelegen. Hieruit volgt, dat elk omwentelingsvlak kan beschouwd worden, als te zijn ontstaan door de wenteling van eene figuur, die in één vlak ligt met de as, om die as.

126. De doorsneden met vlakken, die door de as gaan, worden door

de as in twee bij tegenoverstand gelijke en gelijkvormige deelen verdeeld, zoodanig dat de omwentelingsas is de as van symmetrie. Door eene wenteling van 180° kan het eene gedeelte in den stand van het andere worden gebracht.

De doorsneden van een omwentelingsvlak loodrecht op de as heeten parallelcirkels, de onderling gelijke en gelijkvormige doorsneden dóór de as meridianen.

Elk meridiaan-vlak verdeelt het omwentelingsvlak in twee gelijke en gelijkvormige deelen.

Een omwentelingsvlak is niet ontwikkelbaar, tenzij het vlak is ontstaan door de beweging eener rechte lijn, die met de as in één vlak ligt; dit bijzonder geval wordt straks nader behandeld.

127. Sluit de wentelende figuur zich bij de as aan, dan is het omwentelingsvlak gesloten; heeft de wentelende figuur met de as geen punt gemeen, dan is het oppervlak ringvormig. Als overgang dezer beide gevallen kan het zijn, dat de wentelende figuur met de as slechts één punt gemeen heeft; bij de beweging blijft dit punt op zijn plaats en is het eenige punt van overgang voor de symmetrische helften van elke meridiaan. Wanneer de as de beschrijvende figuur doorsnijdt zonder as van symmetrie te zijn, dan bestaat het omwentelingsvlak uit twee verschillende vlakken, die beschreven worden door de beide deelen waarin de beschrijvende figuur door de as is verdeeld. De beschrijvende lijn moet dus altijd aan éene zijde van de as zijn gelegen.

Twee omwentelingsvlakken, die de as gemeen hebben snijden elk-ander volgens een of meer cirkels, zijnde de parallelcirkels, beschreven door de snijpunten van de beide beschrijvende lijnen.

Het lichaam, dat door een omwentelingsvlak wordt begrensd is een omwentelingslichaam; dit lichaam is gesloten of ringvormig, tegelijk met het oppervlak.

128. De eenvoudigste omwentelingsvlakken en ook de eenige, die in de elementaire meetkunde beschouwd worden, zijn die, welke ontstaan door de beweging eener rechte lijn of van een cirkel. Deze beide gevallen zullen wij nader onderzoeken.

Staat de rechte lijn, die wentelt, loodrecht op de as, dan beschrijft zij een plat vlak loodrecht op de as (§ 2 n^o. 10); snijdt zij de as onder een bepaalden hoek, dan wordt het omwentelingsvlak een kegelvlak, want alle beschrijvende lijnen gaan door één punt, nl. het snijpunt van de wentelende lijn en de as. Dit bijzonder kegelvlak wordt omwentelings-kegelvlak genoemd. Loopt de beschrijvende rechte lijn evenwijdig aan de as dan is het omwentelingsvlak tegelijk een cylindervlak; want alle beschrijvende lijnen loopen evenwijdig aan de as. Dit bijzonder cylindervlak wordt evenzoo omwentelings-cylindervlak genoemd.

129. Door de wenteling van een rechthoekigen driehoek om eene zijner rechthoekszijden ontstaat een kegel, de omwentelingskegel, en door de wenteling van een rechthoek om een zijner zijden een cylinder, de omwentelingscylinder.

Wentelt een scheefhoekige driehoek om een zijner zijden, dan wordt een lichaam gevormd, dat uit de som of het verschil van twee omwentelingskegels bestaat, naarmate aan de zijden, die tot as is genomen twee scherpe of een scherpe en een stompe hoek zijn gelegen. Evenzoo ontstaat door de wenteling van een parallelogram om eene zijner zijden een samenstel van een omwentelings-cylinder met twee omwentelingskegels.

130. Bij de beweging van een cirkel om eene lijn, in zijn vlak maar buiten den cirkel gelegen, ontstaat een ringvormig oppervlak; het lichaam, door dit oppervlak omsloten, is de ring.

Wentelt een cirkel om een zijner middellijnen als as, dan ontstaat een bolvormig oppervlak, het lichaam dat door hetzelfde wordt omsloten is de bol. Om een bol voort te brengen moet een cirkel eene halve wenteling volbrengen, dat is eene zoodanige, waarbij de symmetrische deelen in elkanders plaats komen. Doch de bol ontstaat ook door de geheele wenteling van een halven cirkel om zijn middellijn.

Aan de eigenschappen van de drie voornamelijke lichamen: omwentelingskegel, omwentelingscylinder en bol zijn de beide volgende paragrafen gewijd.

§ 15.

De kegel en de cylinder.

131. Is de richtlijn van een kegelvlak een cirkel, dan wordt het oppervlak cirkelvormig kegelvlak genoemd, dat tot as heeft de lijn, die den top met het middelpunt van dezen cirkel vereenigt. Naar den stand van de as ten opzichte van het grondvlak heeft men het scheef cirkelvormig kegelvlak en het recht cirkelvormig kegelvlak; en evenzoo voor het lichaam, dat door het kegelvlak en het grondvlak wordt omsloten, den scheeven cirkelvormigen kegel en den rechten cirkelvormigen kegel. Daar in de elementaire meetkunde geene andere kromme lijnen dan de cirkel in behandeling komen, vallen ook alle andere kegels hier buiten beschouwing, om welke reden de eerstgenoemde kortweg de *scheeve kegel*, de tweede de *rechte kegel* wordt genoemd. De laatste wordt altijd bedoeld, wanneer men alleen van kegel spreekt, en is blijkbaar hetzelfde lichaam, dat wij in de voorgaande paragraaf als de omwentelingskegel hebben leeren kennen.

132. Geen ander kegelvlak dan het recht cirkelvormige is een omwentelingsvlak. Alle doorsneden van den scheeven en rechten kegel met vlakken evenwijdig aan het grondvlak, als zijnde onderling gelijkvormig, geven cirkels (Fig. 39), wier stralen onderling een eenvoudig verband bezitten. Zijn toch AM en $A'M'$ evenwijdige stralen van twee zoodanige cirkels, dan zijn de driehoeken ATM en $A'T'M'$ gelijkvormig, derhalve:

$$AM : A'M' = AT : A'T = MT : M'T,$$

zoodat de stralen zich verhouden als de gedeelten der as tusschen den top en het vlak der cirkels begrepen, dus ook als de afstanden der vlakken tot den top. De omtrekken der cirkels zijn evenredig aan hunne stralen, dus ook aan de afstanden der cirkels tot den top; de inhouden der cirkels zijn evenredig aan de tweede machten hunner stralen, dus ook aan de tweede machten hunner afstanden tot den top.

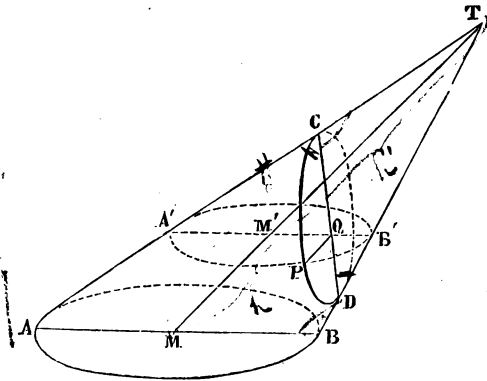


Fig. 39.

133. Het vlak dat door de as des kegels loodrecht op het grondvlak wordt gebracht is het hoofdvlak des kegels. Brengt men door een willekeurig punt C des scheeven cirkelvormigen kegels een vlak CD loodrecht op het hoofdvlak en makende

met de beschrijvende lijn TC een hoek gelijk aan den hoek, dien het grondvlak maakt met de lijn TB , zoodat ook

$$\angle TDC = \angle TAB,$$

dan wordt de doorsnede van dit vlak CD met het kegelvlak de tegengestelde doorsnede genoemd. Op de volgende wijze wordt aangetoond dat ook deze tegengestelde doorsnede een cirkel is.

Nemen wij in die doorsnede een willekeurig punt P en brengen door dit punt een vlak $A'B'$ evenwijdig aan het grondvlak, dan zal de lijn PQ , volgens welke de vlakken CD en $A'B'$ elkander snijden loodrecht staan op het hoofdvlak. Omdat de doorsnede $A'B'$ een cirkel is heeft men de eigenschap

$$PQ^2 = A'Q \times B'Q.$$

Maar de driehoeken $A'QC$ en $B'QD$ zijn gelijkvormig, omdat

volgens de onderstelling $\angle A' = \angle D$ en $\angle C = \angle B'$; hieruit volgt de evenredigheid

$$A'Q : DQ = CQ : B'Q.$$

of

$$A'Q \times B'Q = DQ \times CQ;$$

derhalve

$$PQ^2 = CQ \times DQ.$$

Hieruit blijkt, dat het punt P behoort tot een cirkel, die op de lijn CD als middellijn is beschreven; en daar dit punt willekeurig in de doorsnede is genomen, kan hetzelfde van al hare punten worden aangetoond, waaruit volgt, dat die doorsnede zelve een cirkel is. Wegens de gelijkvormigheid van alle evenwijdige doorsneden, geeft elk vlak evenwijdig aan CD op het kegelvlak een cirkel.

Een scheeve cirkelvormige kegel heeft derhalve twee rijen cirkelvormige doorsneden; de eene rij is evenwijdig aan het grondvlak, de tweede evenwijdig aan de tegengestelde doorsnede. Omgekeerd kunnen door elk punt op het genoemd kegelvlak twee cirkels getrokken worden, wier vlakken tegengesteld zijn.

134. De afgeknotte kegel begrepen tusschen de vlakken AB en A'B' heeft tot as MM', tot grondvlak den cirkel MA, tot bovenvlak den cirkel M'A'. Ook hier zijn van toepassing de formules (1) van § 10, zijnde

$$H = h \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}; \quad h' = h \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}},$$

waarin h de hoogte van den afgeknotten kegel, H die van den geheelen kegel, h' die van het bovenste stuk voorstelt. Zij R de straal van het grondvlak, r die van het bovenvlak, dan is

$$G = \pi R^2, \quad B = \pi r^2,$$

waardoor de bovenstaande formules overgaan in

$$H = h \frac{R}{R-r}, \quad h' = h \frac{r}{R-r} \dots \dots \dots (1)$$

welke eenvoudige betrekkingen ook onmiddellijk uit de figuur kunnen afgeleid worden.

Evenzoo is

$$AT = AA' \frac{R}{R-r}, \quad A'T = AA' \frac{r}{R-r} \dots \dots \dots (2).$$

135. Bij den scheeven kegel zijn de beschrijvende lijnen van den top naar het grondvlak genomen, verschillend in lengte. Volgens de

eigenschap van § 2 n^o. 16 is A T de langste, B T de kortste van alle beschrijvende lijnen, als zijnde het verst van en het dichtst bij de loodlijn gelegen, die uit T op het vlak A B wordt neergelaten. Ter wederzijde van het vlak A T B zijn de beschrijvende lijnen paarsgewijze even lang.

136. Bij den rechten kegel (Fig. 40) zijn alle beschrijvende lijnen even lang; hare lengte is die van de hypotenusa van den rechthoekigen driehoek ATM , door wiens wenteling de kegel is ontstaan. Om die reden wordt zij ook de schuine zijde des kegels genoemd. Zij die lengte $AT = S$, dan bestaat tusschen de drie groottheden, R , H en S , die de zijden van den rechthoekigen driehoek AMT zijn, de betrekking

$$S^2 = R^2 + H^2 \dots\dots\dots (3)$$

op het vlak van de richtlijn. Het lichaam door het eerste gevormd is een scheeve cylinder, door het tweede wordt de rechte cylinder omsloten, die bij bekorting ook wel alleen cylinder en anders rol wordt genoemd. De omwentelingscylinder van de voorgaande paragraaf is blijkbaar hetzelfde lichaam als de rechte cylinder. Geen ander cylindervlak kan een omwentelingsvlak zijn.

142. Bij den rechten cylinder (Fig. 42) zijn alle beschrijvende lijnen even lang en wel gelijk aan de hoogte. Alle doorsneden even-

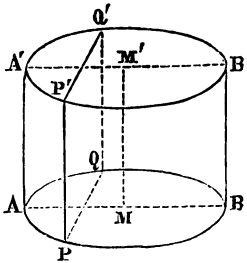


Fig. 42.

wijdig aan het grondvlak zijn cirkels van gelijke grootte. Snijdt men den cylinder door een vlak PQ evenwijdig aan de as, dan zal de figuur van doorsnede bestaan uit twee evenwijdige lijnen PP' en QQ' zijnde de beschrijvende lijnen behoorende bij de punten P en Q, waar het vlak den cirkel van het grondvlak snijdt. Gaat het snijvlak door de as, dan zijn de lijnen van doorsnede symmetrische beschrijvende lijnen.

143. Brengt men door den cylinder een willekeurig plat vlak, dan zal dit vlak alle beschrijvende lijnen doorsnijden, en daarom altijd eene gesloten kromme lijn van doorsnede, eene ellips, opleveren. De verschillende soorten van kromme lijnen, die wij bij den kegel hebben opgemerkt, bestaan hier dus niet. Ook het onderzoek van deze cylinderdoorsneden zou hier misplaatst zijn.

144. Bij ontwikkeling van het recht cirkelvormig kegelvlak zal wegens de gelijkheid van alle beschrijvende lijnen een rechthoek ontstaan, die tot hoogte heeft de lengte der as en tot basis de lengte van den cirkel AM.

Teekent men op het ontwikkelde cylindervlak eene rechte lijn in willekeurige richting en wikkelt men daarna het oppervlak weer op den cylinder, dan zal de rechte lijn op het lichaam eene kromme lijn worden, die echter de eigenschap heeft behouden, dat hare verheffing boven het grondvlak evenredig is aan haar voortgang, langs den cirkel van het grondvlak gemeten. Zoodanige kromme lijnen op den cylinder dragen den naam van schroeflijnen; het onderzoek naar de eigenschappen dezer lijnen behoort evenzoo tot de hoogere meetkunde.

§ 16.

De bol.

145. Volgens de bepaling in § 14 n°. 130 gegeven ontstaat het bolvormig oppervlak door de wenteling van een halven cirkel om zijn middellijn, en is de bol het lichaam, dat door dit omwentelingsvlak

wordt omsloten. Daar alle punten van den beschrijvenden halven cirkel op gelijken afstand zijn gelegen van zijn middelpunt, en bij de wenteling op gelijken afstand blijven van dit punt als behoorende tot de as van wenteling, zoo zullen alle punten van het bolvormig oppervlak op gelijken afstand zijn gelegen van dit middelpunt. Daar deze eigenschap kenmerkend is voor het oppervlak, kan men haar tot definitie verheffen en de volgende bepaling op den voorgrond stellen: de bol is het lichaam omsloten door een oppervlak, waarvan alle punten zich op gelijken afstand bevinden van eenzelfde punt. Dit punt is het middelpunt, die afstand de straal van den bol; de straal van den wentelenden cirkel is dus ook de straal van den bol. De middellijn van den bol is het dubbel van den straal. Uit de laatste bepaling blijkt, dat elke middellijn des bols als as van wenteling kan beschouwd worden, omdat het oppervlak met betrekking tot elke middellijn op dezelfde wijze is gelegen.

146. Snijdt men het bolvormig oppervlak met een willekeurig plat vlak VW (Fig. 43) en zij PQ de lijn van doorsnede, dan zijn alle punten dezer lijn op gelijken afstand van het punt M verwijderd. Daar nu (§ 2 n^o. 16) alle punten, die in een plat vlak op gelijken afstand van eenzelfde punt buiten dat vlak

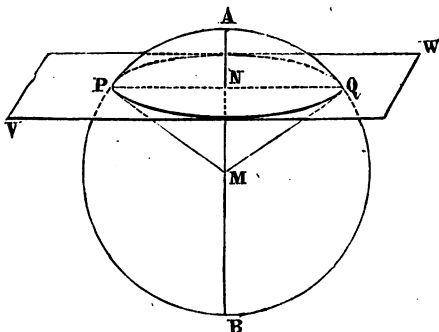


Fig. 43.

zijn gelegen, een cirkel vormen, zal ook de kromme lijn PQ een cirkel zijn, waarvan het middelpunt is het voetpunt N van de loodlijn uit M op het vlak VW neergelaten. Hieruit volgt de algemeene eigenschap: de doorsnede van het bolvormig oppervlak met een plat vlak is altijd een cirkel, waarvan het middelpunt is het voetpunt van de loodlijn uit het middelpunt des bols op het vlak des cirkels neergelaten.

147. Zij R de straal des bols, r de straal des cirkels PQ , a de afstand MN van het vlak van dezen cirkel tot het middelpunt M , dan zijn deze drie grootheden de zijden van den driehoek MPN , die rechthoekig is in N , waaruit de betrekking ontstaat

$$R^2 = a^2 + r^2,$$

gevende

$$r = \sqrt{R^2 - a^2} \dots \dots \dots (1).$$

Beschouwt men denzelfden bol en laat dus R onveranderd, dan hangen r en a van elkander af, en geeft de betrekking (1) aanleiding tot deze gevolgen:

1^o. voor gelijke waarden van a , is ook r dezelfde, dat is: alle cirkels wier vlakken zich op gelijken afstand van het middelpunt bevinden zijn even groot.

2^o. voor grooter waarden van a wordt r kleiner en omgekeerd; leerende, dat de cirkels kleiner worden, naarmate hunne vlakken zich verder van het middelpunt des bols verwijderen.

3^o. voor $a=0$ verkrijgt r hare grootste waarde R , dat is: de grootste cirkel ontstaat, wanneer het snijvlak gaat door het middelpunt van den bol; deze cirkel heeft tot straal den straal des bols. De cirkels, die deze eigenschap bezitten, noemt men groote cirkels, tegenover alle anderen, die kleine cirkels genoemd worden. De stralen der kleine cirkels kunnen veranderen van R tot nul; de groote cirkels zijn onderling gelijk.

Het vlak van elken grooten cirkel verdeelt den bol en zijn oppervlak in twee gelijke en gelijkvormige deelen, terwijl elke twee groote cirkels elkander volgens eene middellijn snijden en dus ook midden door deelen.

148. Het middelpunt des bols is derhalve het middelpunt van de oneindig vele groote cirkels, die op den bol kunnen getrokken worden. Elk ander punt binnen den bol gelegen is het middelpunt van slechts één kleinen cirkel, die door dit punt volkomen is bepaald. Hij ontstaat door de snijding van den bol met het vlak, dat door het gegeven punt loodrecht wordt gebracht op de lijn, die het punt met het middelpunt des bols vereenigt. Hieruit volgt, dat noch een groote en een kleine cirkel, noch twee kleine cirkels het middelpunt kunnen gemeen hebben, zoodat zij elkander ook nooit volgens eene gemeenschappelijke middellijn kunnen snijden.

Elke middellijn des bols is eene middellijn van alle cirkels wier vlakken door de lijn worden gebracht.

Elke koorde des bols is de middellijn van slechts één kleinen cirkel, waarvan het middelpunt in het midden der koorde is gelegen en de straal gelijk is aan de halve koorde.

149. Door elke drie punten op een bol kan een kleine cirkel gebracht worden; want de drie punten bepalen het vlak van den cirkel; voor de bepaling van een grooten cirkel zijn twee willekeurig gelegen punten op den bol noodig en voldoende, omdat het vlak van den cirkel daarenboven moet gaan door het middelpunt van den bol.

150. De middellijn des bols, die loodrecht staat op het vlak eens cirkels, is de as , en hare uiteinden zijn de polen van dezen cirkel, Zoo is (Fig. 43) de lijn AB de as en zijn A en B de polen van den

cirkel PQ . Elke cirkel heeft zijne bepaalde as en polen, doch tot elke as behooren eene menigte cirkels, namelijk alle, wier vlakken loodrecht op haar staan, waaronder één groote cirkel.

Vereenigt men (Fig. 44) twee willekeurige punten A en B van een kleinen cirkel met zijn middelpunt N en met een zijner polen P door rechte lijnen, dan ontstaan twee rechthoekige driehoeken PNA , PNB , die gelijk en gelijkvormig zijn, omdat zij de zijde PN gemeen hebben, en $AN = BN$, als stralen van denzelfden cirkel. Hieruit volgt $AP = BP$; even zoo kan men aantoonen $AP' = BP'$, wanneer P' de andere pool des cirkels is, zoodat alle punten van een kleinen cirkel op gelijken afstand zijn gelegen van elk zijner polen. Hieruit volgt, dat op een bol met een passer een cirkel kan beschreven worden, wanneer men het uiteinde van het vaste been plaatst in de pool en het andere langs den bol beweegt. PN kleiner zijnde dan $P'N$, is ook AP kleiner dan AP' zoodat de afstanden van de punten des kleinen cirkels tot de beide polen verschillen. Neemt men echter een punt C van den grooten cirkel, die dezelfde polen heeft, dan volgt uit de gelijkheid van MP en MP' , dat ook CP en CP' gelijk zijn; zoodat alle punten eens grooten cirkels zich op gelijken afstand van de beide polen bevinden.

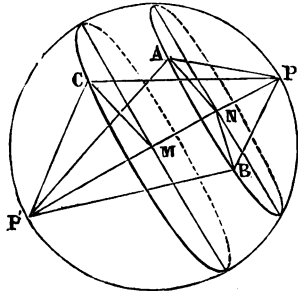


Fig. 44.

151. Zij (Fig. 45) A een willekeurig punt van een bol, dan kan deze altijd gedacht worden te zijn ontstaan door de wenteling van den halven cirkel ACB om de middellijn AB . Trekt men nu in A de raaklijn AR tot dien halven cirkel, dan zal bij de beweging van dezen de raaklijn mede wentelen en een plat vlak VW beschrijven, dat loodrecht staat op den straal MA . Dit vlak is het raakvlak tot den bol in het punt A . Om dus het raakvlak tot een punt van het bolvormig oppervlak te construeren, behoeft men slechts door dit punt een vlak te brengen loodrecht op den straal. Trekt men door het punt A op den bol een willekeurigen cirkel AD

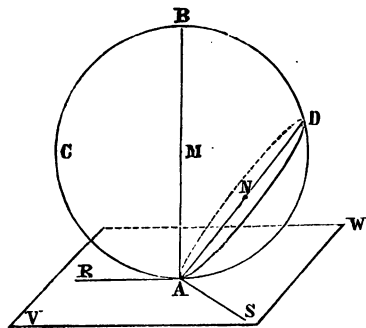


Fig. 45.

wiens middelpunt is N; wanneer het vlak van dezen cirkel, dat zonder

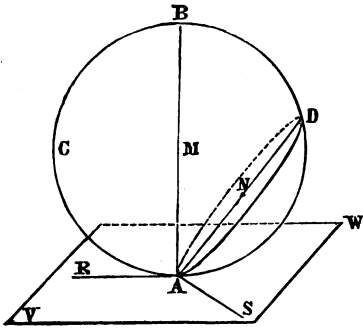


Fig. 45.

aan de algemeenheid te kort te doen kan beschouwd worden loodrecht te staan op het vlak ACB, het raakvlak VW snijdt volgens de lijn AS, zal deze lijn de raaklijn zijn tot den cirkel AD in A. Want AS is de doorsnede van twee vlakken, die beide loodrecht staan op het vlak ACB, dus is AS ook loodrecht op den straal AN, bijgevolg de raaklijn. Het raakvlak bevat derhalve de raaklijnen tot alle cirkels, die door het raakpunt op

den bol kunnen getrokken worden.

152. Uit den loodrechten stand van raakvlak en straal volgt, dat de raakvlakken aan de uiteinden eener middellijn evenwijdig zijn, dat de hoek tusschen twee raakvlakken gelijk is aan den hoek tusschen de stralen der raakpunten, dat het vlak van elken cirkel op den bol evenwijdig is aan de raakvlakken van zijne polen. Van het eerstgenoemd gevolg kan gebruik worden gemaakt om van een massieven

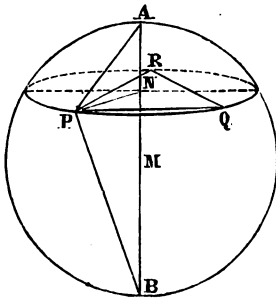


Fig. 46.

bol de middellijn proefondervindelijk te bepalen. Dit kan echter doelmatiger op de volgende wijze geschieden.

Op den massieven bol (Fig. 46) plaatst men in een willekeurig punt A het vaste been van een passer en beschrijft met een willekeurige opening AP een kleinen cirkel, op welke men drie punten P, Q, R neemt. Men meet de onderlinge afstanden dezer punten, dan kan op een plat vlak (een blad papier) de driehoek PQR in ware grootte geconstrueerd worden, dus ook zijn omgeschreven cirkel. De straal

van dezen is tevens de straal PN van den kleinen cirkel, die op den bol is getrokken. Nu kan weder op het platte vlak de driehoek APB geconstrueerd worden, die rechthoekig is in P, en waarvan de rechthoekszijde AP benevens de loodlijn PN bekend zijn. De hypotenusa AB van dezen driehoek is de middellijn van den bol; dus is de helft de gevraagde straal.

153. Het stuk APQR (Fig. 46), dat van een bol door een plat vlak wordt afgesneden is een bolvormig segment; op zich zelf

onstaat het door de wenteling van een cirkelsegment om zijne pijl A N. Gaat het snijvlak door het middelpunt des bols dan is het segment de halve bol. Elk ander vlak verdeelt den bol in twee segmenten A P Q R en B P Q R, waarvan het een kleiner, het ander grooter is dan de halve bol; zonder nadere aanduiding wordt steeds het eerstgenoemde bedoeld. De afstand A N van het middelpunt van het grondvlak tot zijn pool is de hoogte van het segment.

Het gedeelte van een bol, dat begrepen is tusschen twee evenwijdig vlakken is eene bolvormige schijf; de afstand dezer vlakken is hare hoogte. De schijf gaat over in een segment, wanneer een der snijvlakken raakvlak wordt. Ook kan de schijf beschouwd worden als het verschil van twee segmenten.

154. Plaatst men een recht cirkelvormig kegelvlak P M Q (Fig. 43) met den top in het middelpunt van een bol, dan wordt door dit vlak een gedeelte uit den bol gesneden, dat den naam van kegelvormigen bolvormigen sector draagt. Als omwentelingsvlakken met dezelfde as (§ 14 n°. 127) snijden het kegelvlak en het bolvormig oppervlak elkander volgens een cirkel P Q; het vlak van dezen cirkel verdeelt den sector in een kegel P M Q en een segment P A Q. De hoogte

van het segment noemt men ook de hoogte van den sector. De kegelvormige bolvormige sector ontstaat ook door de wenteling van een cirkelsector A P M om een zijner stralen A M. Eindelijk kan men het lichaam nog beschouwen als een rechten kegel met een bolvormig grondvlak.

155. Brengt men door den bol twee willekeurige groote cirkels (Fig. 47) P Q en R S, dan zal de lijn A B, volgens welke hunne vlakken elkander snijden gaan door het middelpunt M, en dus eene middellijn van den bol zijn.

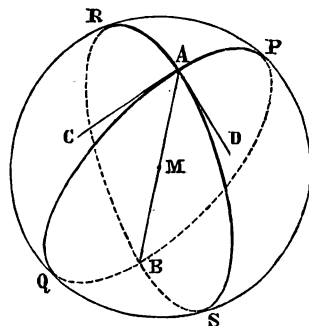


Fig. 47.

Wanneer twee kromme lijnen elkander snijden, dan ontstaat in haar snijpunt een hoek. Deze hoek is het verschil in richting van de elementen der kromme lijnen in haar snijpunt, derhalve, omdat de richting van een element door de raaklijn wordt aangewezen (I § 15 n°. 113), gelijk aan den hoek van de raaklijnen tot de beide kromme lijnen in haar snijpunt. De groote cirkels vormen in hun snijpunt A een hoek, die bolvormige hoek wordt genoemd; zijn grootte wordt bepaald door de raaklijnen A C en A D, die in A tot de beide cirkels worden getrokken. Daar echter de raaklijn van een cirkel loodrecht

staat op den raakpunt, staan AC en AD in A beide loodrecht op den gemeenschappelijken raakpunt AM, waaruit weder voortvloeit, dat zij den standhoek vormen van de vlakken der groote cirkels. Derhalve is de hoek tusschen twee groote cirkels in hun snijpunt gelijk aan den standhoek van hunne vlakken.

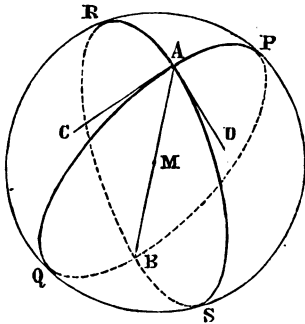


Fig. 47.

156. De bolvormige hoeken in de beide snijpunten A en B der groote cirkels zijn onderling gelijk. De vlakken van twee groote cirkels verdeelen den bol in vier deelen, die tweevlakkige bolvormige sectoren worden genoemd; de tegenoverstaande zijn gelijk als wordende op dezelfde wijze bepaald. Staan de beide vlakken loodrecht op elkander, dan zijn de vier deelen onderling gelijk.

§ 17.

De bolvormige driehoek en veelhoek.

157. Wanneer op den bol drie groote cirkels worden getrokken, dan snijden zij elkander in zes punten, en verdeelen het bolvormig oppervlak in acht deelen, die bolvormige driehoeken genoemd

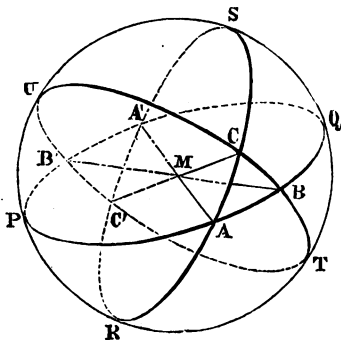


Fig. 48.

worden, omdat zij ieder drie zijden en drie hoeken bezitten. Zijn b. v. (Fig. 48) op den bol de drie groote cirkels PQ, RS, TU getrokken, dan snijden zij elkander aan de voorzijde in de drie punten A, B, C, en aan de achterzijde in de drie tegenovergelegen punten A', B', C', terwijl de lijnen AA', BB', CC' middellijnen des bols zijn (§ 16 n°. 155). De acht deelen, waarin het bolvormig oppervlak alsnu is verdeeld, zijn:

- 1° de bolvormige driehoek ABC, die geheel aan de voorzijde van den bol ligt;
- 2° drie driehoeken, die ieder eene zijde met den voorgaanden gemeen hebben en wier toppen aan de achterzijde liggen, nl.:

ABC' , $A'B'C$, $A'BC$;

3^o drie driehoeken, die ieder een hoekpunt met den eersten gemeen hebben en wier overstaande zijden aan de achterzijde vallen, nl.:

$A'B'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$;

4^o. een driehoek die geheel aan de achterzijde van den bol ligt, nl. $A'B'C'$

158. Beschouwt men de vlakken der drie groote cirkels, die elkander in het middelpunt des bols snijden en den bol verdeelen in acht stukken, welke drievlakkige bolvormige sectoren genoemd worden, dan vormen zij (§ 5 n^o. 44) acht drievlakkige hoeken, die het middelpunt des bols tot gemeenschappelijken top bezitten; elke van deze drievlakkige hoeken komt overeen met een der genoemde bolvormige driehoeken, omdat zijne ribben door de hoekpunten van den bolvormigen driehoek gaan. Tusschen een bolvormigen driehoek ABC en den overeenkomstigen drievlakkigen hoek $M.ABC$ bestaat de nauwste overeenkomst. Bedenken wij toch dat een hoek aan het middelpunt eens cirkels gemeten wordt door den boog, die tusschen de beenen is begrepen, dan zien wij dat de vlakke hoeken AMB , AMC , BMC des drievlakkigen hoeks gemeten worden door de overeenkomstige zijden AB , AC , BC van den bolvormigen driehoek. Herinneren wij ons vervolgens dat een bolvormige hoek gelijk is aan den standhoek tusschen de vlakken der groote cirkels (n^o. 155), dan volgt dat de bolvormige hoeken A , B , C gelijk zijn aan de standhoeken des drievlakkigen hoeks op de ribben AM , BM , CM .

De zes elementen van den bolvormigen driehoek komen derhalve geheel overeen met de zes elementen van den drievlakkigen hoek, zoodanig dat de zijden van den eersten gelijk zijn aan de vlakke hoeken van den ander en de hoeken gelijk aan de standhoeken. Uit deze innige verwantschap volgt, dat al de eigenschappen van den drievlakkigen hoek in § 5, 6 en 7 gevonden, op den bolvormigen driehoek kunnen overgebracht worden, hetgeen de beschouwing van den bolvormigen driehoek zeer eenvoudig maakt.

159. Uit het tafeltje van § 5 n^o. 45 of onmiddellijk uit Fig. 48 in verband met Fig. 15, volgt, dat de acht bolvormige driehoeken, waarin het oppervlak eens bols door drie groote cirkels wordt verdeeld, onderling samenhangen en wel op de volgende wijze. Uitgaande van den eersten driehoek ABC , heeft elk der zes driehoeken, die eene zijde of een hoekpunt met hem gemeen hebben, ook eene zijde en den overstaanden hoek gelijk, terwijl de overige elementen supplementair zijn; de overblijvende driehoek heeft al zijne elementen gelijk aan die van den eersten, doch in omgekeerde volgorde, zoodat de driehoeken gelijk zijn bij tegenoverstand. Deze gelijkheid bij tegenoverstand geldt;

voor elke twee bolvormige driehoeken, wier hoekpunten de tegenovergelegen uiteinden derzelfde middellijnen uitmaken.

160. Evenals bij de drievlakkige hoeken worden elke twee der acht bolvormige driehoeken, die eene zijde gemeen hebben aangelegen driehoeken genoemd; te zamen vormen zij het oppervlak van een tweevlakkigen sector. Zoo is $\triangle ABC$ aangelegen met $\triangle AB'C'$ en ook met $\triangle A'B'C$ en met $\triangle A'BC$; met den eersten vormt hij het oppervlak van den tweevlakkigen sector op de middellijn CC' ; met den tweeden dat van den sector op de middellijn BB' , met den derden dat van den sector op de middellijn AA' .

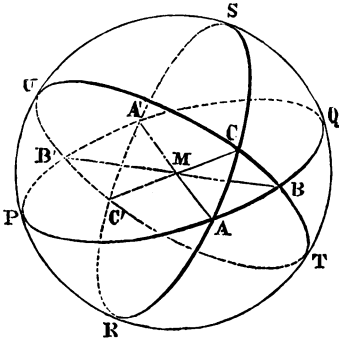


Fig. 48.

De driehoek ABC vormt met zijne drie aangelegen driehoeken $AB'C'$, $AB'C$, $A'BC$ het halve oppervlak van den bol.

161. In § 6 zijn de volgende betrekkingen tusschen de vlakke hoeken eens drievlakkigen hoeks gevonden:

1^o de som van elke twee vlakke hoeken is grooter dan de derde;

2^o de som der drie vlakke hoeken is kleiner dan 360° .

Evenzoo deze betrekkingen tusschen de standhoeken onderling:

1^o de som van de drie standhoeken is grooter dan 180° ;

2^o elke standhoek is grooter dan de som der beide anderen vermindert met 180° .

Door overbrenging op den bolvormigen driehoek volgt hieruit, dat tusschen zijne zijden onderling de volgende betrekkingen bestaan:

1^o elke zijde is kleiner dan de som en grooter dan het verschil der beide anderen;

2^o de som der drie zijden is kleiner dan de omtrek van een grooten cirkel.

De hoeken zullen aan deze voorwaarden voldoen:

1^o de som der hoeken is grooter dan 180° ;

2^o elke hoek is grooter dan de som der beide anderen vermindert met 180° .

De overmaat van de som der hoeken boven 180° wordt genoemd het spherisch excès van den driehoek.

Al deze eigenschappen kunnen, buiten den drievlakkigen hoek om, uit de figuur afgeleid worden, hetgeen als nuttige oefening aan den lezer zij overgelaten.

162. Construeert men van een drievlakkigen hoek op de in § 6 n^o. 52

beschreven wijze den supplementairen drievlakkigen hoek en plaatst vervolgens een bol met een willekeurigen straal beschreven met het middelpunt in den top, dan zal op zijn oppervlak door de snijding met de vlakken van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek een bolvormige driehoek ontstaan, en door de snijding met de vlakken van den supplementairen drievlakkigen hoek een andere bolvormige driehoek. Zij (Fig. 49) ABC de eerstgenoemde, $A'B'C'$ de laatstgenoemde bolvormige driehoek, O de top der drievlakkige hoeken tevens het middelpunt van den bol (verg. Fig 18).

Omdat volgens de bepaling $A'O$ loodrecht staat op het vlak BOC is zij de as en A' de pool van den cirkelboog BC , evenzoo is B' de pool van AC en C' die van AB . Om die reden wordt $A'B'C'$ de pool-driehoek van den driehoek ABC genoemd. Daar verder, volgens het bewezene in § 6 n°. 53, AO loodrecht staat op het vlak $B'OC'$, BO op het vlak $A'OC'$, CO op het vlak $A'OB'$, zullen op den bol A, B, C , de polen zijn der cirkels $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, zoodat de beide bolvormige driehoeken elkanders pooldriehoeken zijn.

163. Tusschen supplementaire drievlakkige hoeken bestaat de betrekking, dat de zijvlakken van den een de supplementen zijn van de standhoeken van den ander en omgekeerd, dus bezitten pooldriehoeken de eigenschap dat de zijden van den een de supplementen zijn van de hoeken van den ander en omgekeerd. Van hoeveel belang deze eigenschap is blijkt vooral in de bolvormige driehoeksmeting, daar zij het middel geeft om eigenschappen en betrekkingen tusschen de zijden eens bolvormigen driehoeks op de hoeken over te brengen. Zoo kan men de hiervoor genoemde betrekkingen tusschen de standhoeken eens bolvormigen driehoeks door middel van den pooldriehoek uit de betrekkingen tusschen de zijden afleiden.

164. Met elken rechten hoek van den oorspronkelijken driehoek komt een rechte zijde dat is een cirkelkwadrant van den pooldriehoek overeen, en omgekeerd. Een driehoek met één rechten hoek heet rechthoekig, met ééne rechte zijde rechtzijdig. Heeft een driehoek twee rechte hoeken, dan is het derde hoekpunt de pool van de overstaande zijde, en derhalve de hoek aan de pool gelijk aan die zijde, terwijl de twee andere zijden kwadranten zijn. Heeft de driehoek drie rechte hoeken, dan zijn de drie zijden kwadranten, en de driehoek is

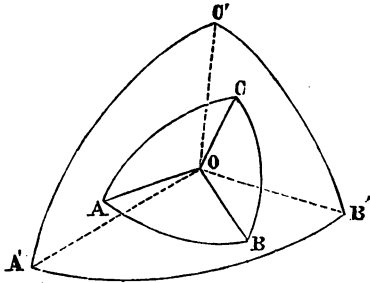


Fig. 49.

het achtste gedeelte van het oppervlak van den bol, dat is een octant.

165. Even als de drievlakkige hoek (§ 7) wordt de bolvormige driehoek door elke drie zijner zes elementen bepaald, daarbij lettende op de beide twijfelachtige gevallen. Bij gelijkheid van drie elementen zijn twee bolvormige driehoeken gelijk. Gelijkvormige bolvormige driehoeken ontstaan, wanneer men gelijkmiddelpuntige bollen met verschillende stralen snijdt door den zelfden drievlakkigen hoek, wiens top in het gemeenschappelijk middelpunt ligt.

Even als bij den drievlakkigen hoek staat bij een bolvormigen driehoek over een grooter hoek eene grootere zijde, en zijn bij de gelijkheid van twee hoeken de overstaande zijden gelijk; zulk een driehoek heet gelijkbeenig. Zijn de drie hoeken gelijk, dan zijn ook de drie zijden gelijk en omgekeerd; de driehoek is dan gelijkzijdig.

166. Uit het voorgaande is gebleken hoe een drievlakkige hoek in al zijne elementen volkomen wordt weergegeven door een bolvormigen driehoek, en hoe omgekeerd elke bolvormige driehoek volkomen overeenstemt met den drievlakkigen hoek die door de vlakken der cirkels wordt gevormd.

Tevens blijkt nu, waarom een bolvormige driehoek steeds door de snijding van groote cirkels moet gevormd worden. Wel kunnen ook kleine cirkels, of kleine en groote cirkels door hunne onderlinge snijding driehoeken op den bol te voorschijn roepen, doch deze zijn van minder belang, omdat zij in geen nauw verband staan met den drievlakkigen hoek, die in het snijpunt der vlakken ontstaat. Zij snijden elkander niet in een gemeenschappelijk middelpunt (n°. 148) zoodat de vlakke hoeken niet gemeten worden door de bogen der cirkels, evenmin worden de standhoeken bepaald door de kromlijnige hoeken tusschen de cirkels op den bol, want de raaklijnen tot de bogen staan niet loodrecht op de doorsnede der vlakken.

167. Plaatst men het middelpunt van een bol in den top van een veelvlakkigen hoek (§ 8), dan ontstaat door de onderlinge snijding op het bolvormig oppervlak eene figuur die bolvormige veelhoek wordt genoemd. Zijne zijden zijn bogen van groote cirkels en worden gemeten door de vlakke hoeken; zijne hoeken zijn gelijk aan de standhoeken des veelvlakkigen hoeks. Op den bol kan men terstond een veelhoek verkrijgen door een willekeurig aantal punten aan te nemen en ze twee aan twee in eene bepaalde volgorde door bogen van groote cirkels te vereenigen. Met elken inspringenden hoek des veelvlakkigen hoeks komt een inspringende hoek van den bolvormigen veelhoek overeen. De eigenschappen des veelvlakkigen hoeks worden op den bolvormigen veelhoek overgebracht, wanneer men de vlakke hoeken met

de zijden en de standhoeken met de hoeken verwisselt. Zoo leeren wij, dat elke zijde des veelhoeks kleiner is dan de som der overige zijden en de som der zijden kleiner is dan 360° , mits de veelhoek geene inspringende hoeken bezit. In dezelfde onderstelling is de som der hoeken grooter dan de som der hoeken van den gelijknamigen vlakken veelhoek. Wat de eerste som meer is dan de tweede wordt het spherisch exces van den veelhoek genoemd.

Het aantal bepalende elementen eens bolvormigen n -hoeks is $2n-3$, zijnde even veel als voor den vlakken veelhoek, doch hier bestaat geene voorwaarde voor het aantal hoeken.

168. Uit deze eigenschappen kan nog worden afgeleid, dat de boog van den grooten cirkel de kortste lijn is, die op den bol tusschen twee punten kan getrokken worden. Zijn toch (Fig. 50) A en B twee willekeurige punten op een bol, A B de boog van den grooten cirkel, die door beide punten gaat, A C B eene willekeurige lijn op den bol, dan kan deze lijn beschouwd worden als eene aaneenschakeling van kleine bogen van groote cirkels, evenals eene kromme lijn op het platte vlak beschouwd wordt als eene aaneenschakeling van rechte lijntjes. Hierdoor wordt A B C een bolvormige veelhoek en daarin is eene der zijden A B altijd kleiner dan de som van al de andere, zijnde A B C.



Fig. 50.

169. Is A B C de boog van een kleinen cirkel, die door de punten A en B gaat, dan is hij toch grooter dan de boog van den grooten cirkel, want wanneer men op het platte vlak tusschen twee punten verschillende cirkelbogen trekt, is die boog het kleinste, welke den grootsten straal bezit, omdat hij binnen al de andere is gelegen en het meest tot de koorde nadert. Om dezelfde reden is de boog van den grooten cirkel kleiner dan al de bogen der kleine cirkels, welke tusschen dezelfde punten op den bol kunnen getrokken worden.

170. Door elke vier punten in de ruimte, mits geen drie in dezelfde rechte lijn zijn gelegen, kan een bolvormig oppervlak gebracht worden. Vereenigt men toch één van de vier punten met de drie andere door rechte lijnen, en brengt vlakken loodrecht door het midden dezer lijnen, dan zal hun snijpunt even ver van al de vier punten verwijderd zijn, derhalve het middelpunt, en die afstand de straal wezen van een bol, wiens oppervlak door de vier punten gaat. Hieruit volgt nog, dat twee cirkels, die eene gemeenschappelijke koorde bezitten, maar niet in één vlak liggen, kunnen beschouwd worden als kleine cirkels van eenzelfde bolvormig oppervlak.

171. Zijn vier willekeurige vlakken in de ruimte gegeven, dan kan steeds een bol beschreven worden, die ze allen raakt. Neemt men

toch de doorsneden van een der vlakken met de drie andere en construeert de drie vlakken, die de tweevlakkige hoeken op deze doorsneden middendoor deelen, dan zal het snijpunt dezer vlakken even ver van de vier vlakken gelegen zijn en om die reden het middelpunt zijn van een bol, welke de vier gegeven vlakken aanraakt en tot straal heeft de loodlijn uit het middelpunt op een der vlakken neergelaten.

Uit deze en de voorgaande eigenschap blijkt, dat in en om elke driehoekige pyramide een bol kan beschreven worden.

172. Ook om en in elk der vijf regelmatige lichamen (§ 12) kan een bol beschreven worden. Trekt men toch om al de zijvlakken van een regelmatig lichaam cirkels, dan zullen deze even groot zijn, en hunne vlakken gelijke hoeken met elkander maken, terwijl zij twee aan twee eene voor allen gelijke koorde gemeen hebben; hieruit kan gemakkelijk worden afgeleid, dat hunne assen elkander in één punt snijden, dat evenver van al de zijvlakken en evenver van al de hoekpunten is verwijderd. Dit punt is het middelpunt van den ingeschreven en ook van den omgeschreven bol; de straal van den eersten is de afstand van dit punt tot de zijvlakken, de straal van den tweeden de afstand van dit punt tot de hoekpunten.

173. Het vraagstuk om een bol te construeeren, die aan verschillende voorwaarden (het gaan door punten, het aanraken van lijnen, vlakken en bollen) voldoet, is veel meer samengesteld en afwisselend dan dat om cirkels onder bijzondere omstandigheden te construeeren (I § 19). Het zij hier voldoende op te merken, dat voor de bepaling van een bol vier onafhankelijke voorwaarden noodig en toereikend zijn.

VIERDE HOOFDSTUK.

INHOUD VAN VEELVLAKKIGE LICHAMEN.¹⁾

§ 18.

Eenheid van lichamelijke inhoudsmaat.

174. De inhoud van een lichaam is de grootte van de ruimte, die door de grenzen van het lichaam wordt omsloten. De inhoud der verschillende in de beide voorgaande hoofdstukken behandelde lichamen moet nu bepaald worden, waartoe eerst noodig is eene gemeenschapelijke en geschikte maat op te sporen. In dit onderzoek is men geheel vrij, omdat in de voorgaande beschouwingen van het inhoudsbegrip der lichamen nog geen gebruik is gemaakt.

175. De grootte van het oppervlak der veelvlakkige lichamen is gemakkelijk te vinden, want de grenzen zijn veelhoeken, wier inhouden, volgens § 24 en § 25 van het 1^e Deel berekend, en vervolgens opgeteld moeten worden. Slechts in enkele gevallen, wanneer het onderzoek eenige bijzonderheid aan den dag brengt, zal deze berekening verricht worden.

176. Beginnen wij met de bepaling van de eenheid voor de inhoudsmaat der lichamen. Wanneer wij hierbij in het oog houden, op welke wijze de eenheid voor de inhoudsmaat van vlakke figuren in § 23 van het 1^e Deel is gevonden, dan kan nu op overeenkomstige wijze gehandeld worden.

Nemen wij namelijk twee rechthoekige parallelpipeda of balken (Fig. 51), die gelijke en gelijkvormige grondvlakken $ABCD$ en $abcd$, maar verschillende hoogten AA' en aa' hebben, dan is het duidelijk, dat zoo dikwijls de kleinste hoogte aa' op de grootste AA' is begrepen, ook het kleinste parallelpipedium in het grootste bevat

¹⁾ De behandeling van dit hoofdstuk kan men zonder enig bezwaar aan die van het voorgaande hoofdstuk laten voorafgaan. De volgorde in den text is gekozen wegens hare meerdere overeenstemming met die van de vlakke meetkunde in het eerste deel.

zal zijn. Want met elke gelijke hoogte der beide balken komt een gelijke inhoud overeen. Zoekt men nu op de bekende wijze (I § 8) de maat en de betrekkingwijzer der hoogten aa' en AA' , dan zal het paralle-

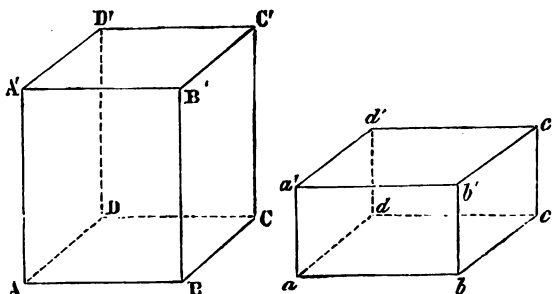


Fig. 51.

loppedum, dat deze maat tot hoogte heeft, de maat zijn voor de inhouden der beide lichamen, en de betrekkingwijzer voor deze inhouden dezelfde zijn als die voor de hoogten. Uit de gelijkheid dezer betrekkingswijzers volgt, zoowel voor het meetbare als het onmeetbare geval

$$\text{I. parall. } AC' : \text{I. parall. } ac' = AA' : aa',$$

of in woorden: de inhouden van rechthoekige parallelpipeda, die een gelijk en gelijkvormig grondvlak bezitten, verhouden zich als hunne hoogten.

Meer algemeen kan deze eigenschap aldus worden uitgedrukt: de inhouden van rechthoekige parallelpipeda, die een gelijk en gelijkvormig grensvlak bezitten, verhouden zich als de ongelijke ribben.

177. Nemen wij nu twee rechthoekige parallelpipeda, die geen enkele gelijke ribbe bezitten. Zij (Fig 52) P de inhoud, l de lengte, b de breedte, h de hoogte van het eerste, Q de inhoud, l' de lengte, b' de breedte, h' de hoogte van het tweede parallelloppedum; construeeren wij dan twee andere rechthoekige parallelpipeda, de eerste R tot inhoud, l tot lengte, b tot breedte, h' tot hoogte; de ander S tot inhoud, l' tot lengte, b' tot breedte, h tot hoogte hebbende, dan bezitten P en R, R en S, S en Q een gelijk en gelijkvormig grensvlak. Volgens de bovenstaande eigenschap is derhalve

$$P : R = h : h'$$

$$R : S = b : b'$$

$$S : Q = l' : l$$

verm.

$$P : Q = l \times b \times h : l' \times b' \times h' \dots \dots \dots (1)$$

waaruit volgt, dat de inhouden van twee willekeurige rechthoekige parallelpipeda zich verhouden als de producten der drie ongelijke ribben.

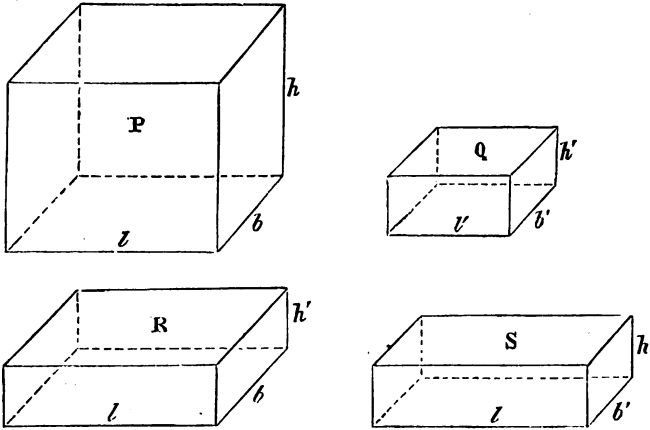


Fig. 52.

De vergelijking (1) kan ook aldus geschreven worden:

$$\frac{P}{Q} = \frac{l}{l'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{h}{h'},$$

waaruit blijkt dat, de verhouding der inhouden gelijk is aan het gedurig product van de verhoudingen der overeenkomstige ribben.

178. Nemen wij nu voor het tweede parallelipedum een cubus, wiens ribben gelijk zijn aan de eenheid van lengtemaat en stellen dus $l = b = h = 1$, dan gaat de voorgaande vergelijking over in

$$\frac{\text{I. parallelipedum}}{\text{I. cubus}} = l \times b \times h.$$

Zal nu het getal, dat den inhoud van het rechthoekig parallelipedum aanwijst, gelijk zijn aan het product van de getallen, die de lengte der ongelijke ribben aangeven, dat is, moet:

$$\text{I. rechth. parall.} = l \times b \times h \dots \dots \dots (2)$$

dan is noodig en voldoende te stellen

$$\text{I. cubus} = 1;$$

dat is: tot eenheid van lichamelijke inhoudsmaat moet genomen worden de cubus, wiens ribben gelijk zijn aan de eenheid van lengtemaat.

II.

6

In die onderstelling, en dan ook alleen, wordt de inhoud van elk rechthoekig parallelipedum voorgesteld door het product van zijne drie ongelijke ribben, of van zijne lengte, breedte en hoogte.

179. Daar het product van lengte en breedte de inhoud van het grondvlak G voorstelt, kan voor verg. (2) geschreven worden:

$$\text{I. rechth. parall.} = G \times h \dots\dots\dots, (3)$$

of: de inhoud van het rechthoekig parallelipedum is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte. Elk zijvlak kan hierbij als grondvlak, de daarop loodrecht staande ribbe als hoogte beschouwd worden.

180. De naam van het getal, dat den inhoud uitdrukt, komt overeen met dien van de getallen, welke de lengte der ribben voorstellen. Zijn deze b. v. in ellen, palmen, duimen gegeven, dan is de vlakke inhoud in vierkante ellen, palmen, duimen, en de lichamelijke inhoud in kubieke ellen, palmen, duimen uitgedrukt. Vooral moet niet over het hoofd worden gezien, dat vóór de vermenigvuldiging al de ribben in dezelfde eenheid zijn uitgedrukt.

181. Voor een cubus is $l = b = h$; hierdoor gaat de verg. (2) over in :

$$\text{I. cubus} = l^3,$$

en

$$l = \sqrt[3]{\text{I.}}$$

De inhoud van een cubus wordt dus uitgedrukt door de derde macht van het getal dat de lengte der ribbe aanwijst; en omgekeerd vindt men de ribbe van een cubus bij gegeven inhoud, door uit dit getal den derde machts-wortel te trekken. Om die reden wordt deze wortel ook de cubiekswortel genoemd. Het vinden van de lengte der ribbe bij gegeven inhoud kan slechts door berekening en niet door constructie met liniaal en passer worden verricht. Hierin ligt de moeilijkheid van het uit de oudheid beroemde vraagstuk over de verdubbeling van den cubus.

182. Uit vergelijking (3) volgt nog, dat in eenzelfde rechthoekige parallelipedum of bij parallelipeda van gelijken inhoud:

1°. de producten van elk zijvlak en de loodrechte ribbe gelijk zijn;

2°. de inhoud en der zijvlakken omgekeerd evenredig zijn aan de overeenkomstige hoogten.

Door middel van deze laatste eigenschap kan gemakkelijk worden berekend, welke hoogte aan een rechthoekig parallelipedum moet gegeven worden, dat op een gegeven grondvlak staat en evenveel inhoud bezit als een ander rechthoekig parallelipedum.

Lichamen van denzelfden vorm kunnen verschillenden inhoud, en

evenzoo bij verschillenden vorm gelijken inhoud bezitten. Deze laatste noemt men (hoewel even onjuist als in de vlakke meetkunde) gelijke lichamen.

§ 19.

Inhoud van het prisma.

183. Na in de vorige paragraaf den inhoud bepaald te hebben van het rechthoekig parallelipedum, komen wij nu tot dien van het wilkeurig scheefhoekig parallelipedum. De overgang wordt gevormd door deze eigenschap: wanneer twee parallelipeda op hetzelfde grondvlak staan, gelijke hoogte bezitten, en twee overstaande zijvlakken van het eene vallen in een vlak met de overeenkomstige zijvlakken van het andere, dan hebben deze lichamen gelijken inhoud. Zijn namelijk (Fig. 53) $ABCD A'B'C'D'$ en $ABCD A''B''C''D''$ twee parallelipeda, die hetzelfde grondvlak $ABCD$ bezitten, en waarvan het zijvlak $ABA'B'$ met $ABA''B''$ en $CD C'D'$ met $CD C''D''$ in één plat vlak valt, terwijl wegens de gelijkheid der hoogten de bovenvlakken $A'B'C'D'$ en $A''B''C''D''$ in één vlak evenwijdig aan het grondvlak zijn gelegen, dan zullen de ribben $A'B'$ en $A''B''$, benevens $D'C'$ en $D''C''$ in ééne rechte lijn vallen. Nu ontstaan in de figuren twee drielakkige prisma's $ADA'D'A''D''$ en $BCB'C'B''C''$, die gelijk en gelijkvormig zijn, omdat zij, zooals gemakkelijk is in te zien, al hunne overeenkomstige elementen gelijk hebben. Beschouwt men nu het geheele lichaam $ABCD A'B'C'D'$, zijnde een vierhoekig prisma, tot grondvlak het trapezium $ABB'A'$ hebbende, dan is

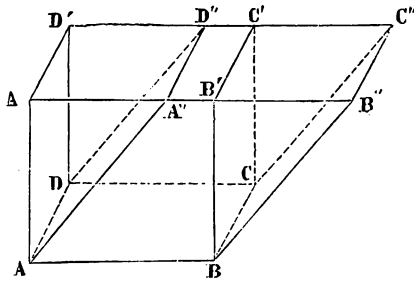


Fig. 53.

I. vierh. prisma $ACA'C'' =$ I. vierh. prisma $ACA'C''$

I. drieh. prisma $BC'' =$ I. drieh. prisma AD''

afg.

I. parallelipedum $AC' =$ I. parallelipedum AC'' ,

waardoor de genoemde eigenschap bewezen is. Dit bewijs kan gevolgd worden, in welken stand onder de gegeven voorwaarden de parallelipeda ook voorkomen. Blijkbaar blijft de eigenschap onveranderd,

wanneer de lichamen niet hetzelfde, maar gelijke grondvlakken bezitten en de overige omstandigheden dezelfde blijven.

184. Gebruik makende van deze eigenschap komt men op de volgende wijze van den inhoud van het rechthoekig op dien van het scheefhoekig parallelipedum.

Zij (Fig. 54) $ABCD A'B'C'D'$ een rechthoekig parallelipedum, verandert men dan den rechthoek $ABCD$, die het grondvlak vormt, in een parallellogram $ABEF$, dat dezelfde basis en hoogte heeft, en plaatst hierop een parallelipedum, waarvan de opstaande ribben AA' , BB' , EE' , FF' loodrecht staan op het grondvlak en even hoog zijn als die van het eerstgenoemde, dan vallen de beide parallelipeda AC' en $A'E'$ onder de bovengenoemde

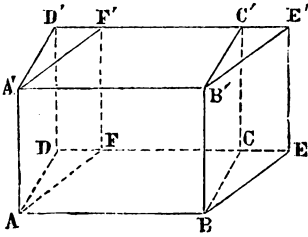


Fig. 54.

eigenschap, omdat zij hetzelfde grondvlak $AB B' A'$ en gelijke hoogte bezitten, terwijl twee overstaande vlakken van het eene in een vlak vallen met twee overstaande vlakken van het andere; bijgevolg hebben zij gelijken inhoud. De inhoud van het parallelipedum AC' is gelijk aan het grondvlak AC vermenigvuldigd met de hoogte AA' ; maar dit grondvlak is gelijk aan het parallellogram AE (I § 24 n^o. 218), derhalve is de inhoud van het rechte parallelipedum $A'E'$ gelijk aan den inhoud van zijn grondvlak AE vermenigvuldigd met zijne hoogte AA' .

Nemen wij vervolgens (Fig. 53) een recht parallelipedum AC' ,

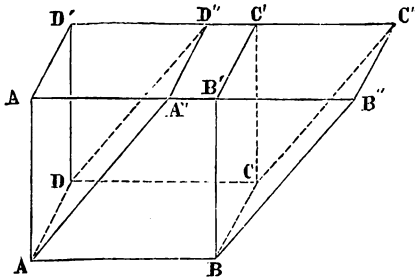


Fig. 53.

waarvan het grondvlak is een parallellogram AC , en construeeren op hetzelfde grondvlak een ander parallelipedum AC'' , waarvan slecht twee overstaande zijvlakken AB'' en DC'' loodrecht staan op het grondvlak, dan zullen ook deze beide parallelipeda gelijken inhoud bezitten, zoodat de inhoud van het tweede AC'' gelijk is aan den inhoud van zijn grondvlak AC ver-

menigvuldigd met zijne hoogte AA' , zijnde de afstand van zijn grond- en bovenvlak.

Zij eindelijk (Fig. 55) $ABCD A'B'C'D'$ een geheel willekeurig

scheefhoekig parallelipedum, en brengt men door twee overstaande ribben AB en CD van het grondvlak vlakken loodrecht op het grondvlak, dan ontstaat een nieuw parallelipedum $ABCD A''B''C''D''$ dat in het voorgaande geval verkeert, omdat twee zijvlakken AB'' en DC'' loodrecht staan op het grondvlak, en met het eerste parallelipedum hetzelfde

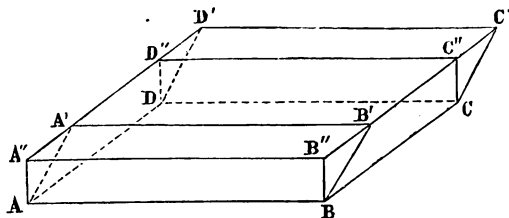


Fig. 55.

grondvlak en gelijke hoogte bezit, terwijl weder twee overstaande zijvlakken van het eene in één vlak liggen met twee overstaande zijvlakken van het ander. De beide parallelipeda AC' en $A''C''$ hebben bijgevolg gelijken inhoud, en daar volgens het voorgaande de inhoud van het parallelipedum AC'' gelijk is aan den inhoud van het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte, zal ook de inhoud van het tweede gelijk zijn aan den inhoud van zijn grondvlak AC vermenigvuldigd met zijne hoogte, zijnde de afstand van zijn grond- en bovenvlak.

Men kan ook den omgekeerden weg volgen, door van het in al zijne elementen scheefhoekige parallelipedum uit te gaan en dit door drie maal de eigenschap van n°. 183 toe te passen in een rechthoekig doen overgaan dat een gelijk grondvlak en gelijke hoogte bezit, terwijl ook de inhoud van het lichaam onveranderd is gebleven.

Daar nu de inhoud van een rechthoekig parallelipedum gelijk is aan het product van grondvlak en hoogte, volgt hieruit dat ook de inhoud van elk parallelipedum gelijk is aan den inhoud van zijn grondvlak vermenigvuldigd met zijne hoogte.

185. Uit deze voornamen eigenschap volgt:

1°. dat parallelipeda met gelijke grondvlakken en gelijke hoogten denzelfden inhoud bezitten, onafhankelijk van den stand der zijvlakken.

2°. dat bij een zelfde parallelipedum de inhouden der zijvlakken omgekeerd evenredig zijn aan de overeenkomstige hoogten.

3°. dat de inhoud van een parallelipedum gevonden wordt door de lengte te meten van eene der ribben, den afstand dezer ribbe tot eene evenwijdige ribbe van een zelfde zijvlak, den afstand van het vlak dezer beide ribben tot het evenwijdige vlak, en deze drie lengten met elkander te vermenigvuldigen.

186. Een parallelipedum wordt door een diagonaalvlak verdeeld in twee bij tegenoverstand gelijke, en gelijkvormige driehoekige prisma's.

Dat toch de gelijk- en gelijkvormigheid bij tegenoverstand ook de gelijkheid van inhoud ten gevolge moet hebben is bij de behandeling van dit onderwerp (n^o. 89) voldoende gebleken. Omgekeerd kan elk driehoekig prisma beschouwd worden als de helft van een parallelipedum.

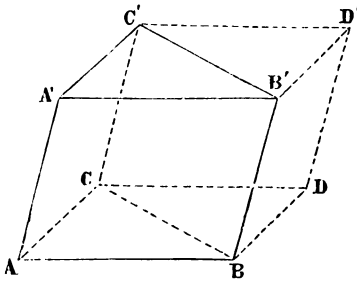


Fig. 56.

Zij toch $ABCA'B'C'$ (Fig. 56) een willekeurig driehoekig prisma; wanneer men dan het parallelogram AD construeert, waarvan de driehoek, die het grondvlak uitmaakt, de helft is, en door het vierde hoekpunt D vlakken brengt evenwijdig aan de zijvlakken AB' en AC' , dan ontstaat het parallelipedum AD' , dat het dubbel is van het gegeven prisma (§ 11 n^o. 104). Nu is de inhoud van het laatste gelijk aan zijn grondvlak

AD vermenigvuldigd met de hoogte, die tevens de hoogte is van het prisma. De inhoud van het prisma is de helft hiervan; daar echter de driehoek ABC de helft is van het parallelogram AD , zal de inhoud van het prisma gelijk zijn aan den inhoud van den driehoek ABC vermenigvuldigd met de hoogte. Hieruit volgt, dat de inhoud van elk driehoekig prisma gelijk is aan den inhoud van zijn grondvlak vermenigvuldigd met zijne hoogte.

187. Nemen wij nu een willekeurig veelhoekig prisma (Fig. 30), dan kan het door de diagonaalvlakken van ééne opstaande ribbe AA'

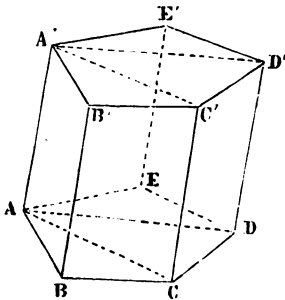


Fig. 30.

in even zoo vele driehoekige prisma's verdeeld worden, als het grondvlak in driehoeken door de diagonalen van het hoekpunt A . Al deze prisma's hebben dezelfde hoogte, zijnde de afstand van het grond- en bovenvlak. Zij deze hoogte H , dan is

$$\text{I. drieh. prisma } AC' = \triangle ABC \times H$$

$$\text{I. drieh. prisma } AD' = \triangle ACD \times H$$

enz.

enz.

opg.

$$\text{I. veelhoekig prisma} = \text{I. grondvlak} \times H,$$

waaruit blijkt, dat de inhoud van elk veelhoekig prisma gelijk is aan den inhoud van het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte.

188. Is het prisma recht, dan vindt men den inhoud door het

grondvlak met de lengte der opstaande ribben te vermenigvuldigen.

De inhoud der regelmatige prisma's wordt door middel van de uitkomsten van § 25 uit het 1^e deel gemakkelijk berekend.

189. Het opstaand oppervlak van een regelmatig prisma bestaat uit de som van eenige gelijke rechthoeken en is gelijk aan den omtrek van het grondvlak vermenigvuldigd met de opstaande ribbe. Hieruit volgt, dat de inhoud van een regelmatig prisma gelijk is aan het opstaand oppervlak vermenigvuldigd met den halven straal van den ingeschreven cirkel van het grondvlak.

§ 20.

Inhoud van de pyramide.

190. Laten (Fig. 57) $T.ABC$ en $T'.A'B'C'$ twee driehoekige pyramiden zijn, die gelijke in hetzelfde vlak gelegen grondvlakken $ABCA'B'C'$ en gelijke hoogten bezitten, zoodat de toppen T en T' liggen in een vlak evenwijdig aan de grondvlakken. Snijden wij deze pyramiden door een vlak VV' evenwijdig aan de grondvlakken, dan is de doorsnede met de eerste pyramide de driehoek PQR , met de tweede $\triangle P'Q'R'$.

Nu is volgens eene eigenschap der pyramide (§ 10 n^o. 94)

$$\begin{aligned}\triangle ABC : \triangle PQR &= AT^2 : PT^2, \\ \triangle A'B'C' : \triangle P'Q'R' &= A'T'^2 : P'T'^2\end{aligned}$$

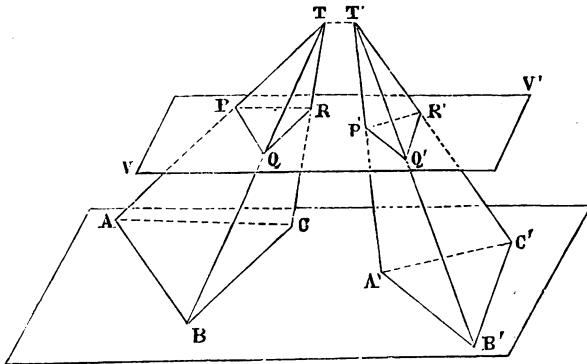


Fig. 57.

Maar omdat de lijnen AT en $A'T'$ gesneden zijn door drie evenwijdige vlakken heeft men (§ 5 n^o. 40)

$$AT : PT = A'T' : P'T'$$

of

$$A T^2 : P T^2 = A' T'^2 : P' T'^2,$$

waaruit volgt

$$\triangle A B C : \triangle P Q R = \triangle A' B' C' : \triangle P' Q' R';$$

maar volgens de onderstelling is

$$\triangle A B C = \triangle A' B' C',$$

dus is ook

$$\triangle P Q R = \triangle P' Q' R'.$$

Hieruit blijkt, dat alle doorsneden der beide pyramiden met hetzelfde

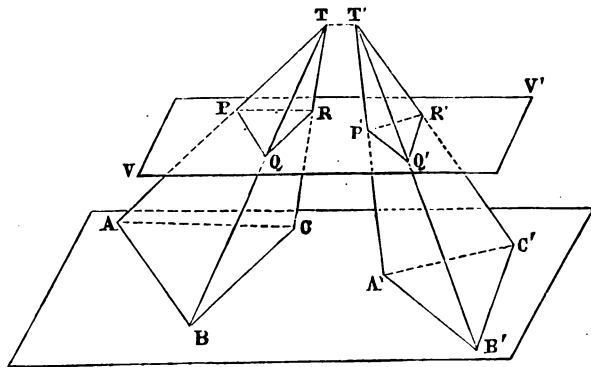


Fig. 57.

evenwijdige vlak gelijken inhoud hebben. Neemt men nu alle doorsneden van af $T T'$ tot het vlak der grondvlakken, en kent men aan elke doorsnede eene uiterst kleine dikte toe, dan is de som van de eene reeks doorsneden de inhoud der pyramide $T.ABC$, en van de andere reeks de inhoud der pyramide $T'.A'B'C'$; en daar deze reeksen term voor term gelijk zijn zal de som der eerste reeks gelijk zijn aan de som der tweede, gevende

$$I. \text{ pyramide } T.ABC = I. \text{ pyr. } T'.A'B'C';$$

waaruit wij leeren, dat driehoekige pyramiden, die gelijke grondvlakken en gelijke hoogten hebben ook gelijk van inhoud zijn.

Uitgaande van deze eigenschap, die blijkbaar onafhankelijk is van het aantal zijden en den vorm van het grondvlak, is het niet moeilijk den inhoud der pyramide te bepalen.

191. Daartoe keeren wij terug tot het driehoekig prisma, waarvan de inhoud gelijk is aan het product van basis en hoogte.

deze pyramiden hebben dezelfde hoogte H , zijnde de loodlijn TP' uit den top op het grondvlak neergelaten. Nu is

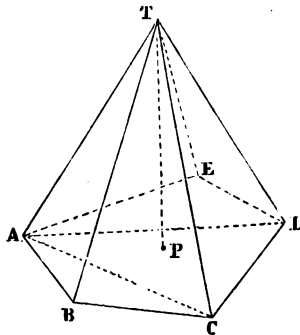


Fig. 26.

$$\text{I. drieh. pyr. } T.ABC = \triangle ABC \times \frac{1}{3} H$$

$$\text{I. drieh. pyr. } T.ACD = \triangle ACD \times \frac{1}{3} H$$

enz.

enz.

opg.

$$\text{I. pyr. } T.ABCD \dots = \text{veelh. } ABCD \dots \times \frac{1}{3} H.$$

dat is in woorden: de inhoud van elke pyramide is gelijk aan den inhoud van het grondvlak vermenigvuldigd met een derde van de hoogte.

De inhoud eener pyramide is dus ook gelijk aan den inhoud van een prisma, dat hetzelfde grondvlak en een derde zijner hoogte tot hoogte heeft.

193. Als toepassing kan men nu berekenen de inhouden van het regelmatig viervlak (Fig. 34) en het regelmatig achtvlak (Fig. 35), uitgedrukt in de lengte der ribbe. Noemt men deze lengte a , dan zal men vinden:

$$\text{I. regelm. viervlak} = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2},$$

$$\text{I. regelm. achtvlak} = \frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}.$$

194. Zij van eene afgeknotte pyramide (Fig. 28) h de hoogte, G de inhoud van het grondvlak, B die van het bovenvlak. Wanneer H de hoogte der geheele pyramide, h' die van het bovenste stuk voorstelt, dan is volgens formule (1) van § 10

$$H = h \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}; \quad h' = h \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} \dots \dots (1)$$

Nu is verder

$$\text{I. pyr. T. A B C} = G \times \frac{1}{3} H = \frac{1}{3} h \frac{G \sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}$$

$$\text{I. pyr. T. a b c d} = B \times \frac{1}{3} h' = \frac{1}{3} h \frac{B \sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}$$

afg.

$$\text{I. afgeknotte pyr.} = \frac{1}{3} h \frac{G \sqrt{G} - B \sqrt{B}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}}$$

$$= \frac{1}{3} h (G + B + \sqrt{GB}) \dots \dots \dots (2)$$

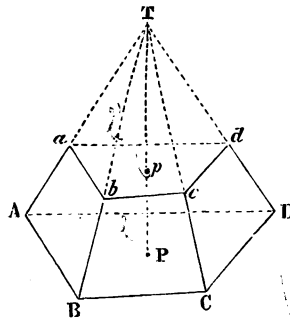


Fig. 28.

Hieruit volgt, dat de inhoud eener afgeknotte pyramide gelijk is aan een derde der hoogte vermenigvuldigd met de som van den inhoud van het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat midden evenredig is tusschen grond- en bovenvlak.

Construeert men dus eene vlakke figuur, wier inhoud gelijk is aan een derde der som van de drie genoemde vlakken, dan is zij de basis van een prisma, dat gelijke hoogte en gelijken inhoud heeft met de afgeknotte pyramide.

De inhoud der afgeknotte pyramide is volgens formule (2) ook gelijk aan de som van drie pyramiden, die dezelfde hoogte hebben als de afgeknotte, en tot grondvlak, de eerste het grondvlak, de tweede het bovenvlak, de derde een vlak, dat middenevenredig is tusschen grond- en bovenvlak. De inhoud dezer laatste pyramide is middenevenredig tusschen die der beide eersten. In de afgeknotte driehoekige pyramide kunnen deze drie pyramiden gemakkelijk geconstrueerd worden.

195. Het oppervlak eener pyramide bestaat uit de som van het grondvlak en eenige driehoeken. Alleen bij de regelmatige pyramide zijn al deze driehoeken gelijk en hebben tot inhoud de zijde van

den regelmatigen veelhoek vermenigvuldigd met de helft der loodlijn, uit den top op die zijde neergelaten. Deze loodlijn is de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek, die tot rechthoekszijden heeft de as der pyramide en den straal van den ingeschreven cirkel van het grondvlak, zoodat zij uit deze beide lijnen gemakkelijk berekend kan worden.

Het oppervlak der afgeknotte pyramide bestaat uit het grondvlak, het bovenvlak en eenige trapeziums, bij de regelmatige afgeknotte pyramide zijn deze laatsten onderling gelijk en kunnen berekend worden uit de hoogte en de stralen der ingeschreven cirkels van grond- en bovenvlak.

196. Als toepassing zullen wij thans nog het volgende vraagstuk oplossen: Eene afgeknotte pyramide door een vlak evenwijdig aan grond- en bovenvlak in twee stukken van gelijken inhoud te verdeelen.

Zij G de inhoud van het grondvlak, B die van het bovenvlak, h de hoogte der afgeknotte pyramide; noemen wij dan x den afstand van het gezochte vlak tot het grondvlak en y zijn inhoud. De inhoud van het onderste gedeelte der afgeknotte pyramide is alsdan volgens formule (2)

$$\frac{1}{3} x (y + G + \sqrt{yG}),$$

en dit gedeelte de helft zijnde van de afgeknotte pyramide heeft men de betrekking

$$\frac{1}{3} x (y + G + \sqrt{yG}) = \frac{1}{3} h (B + G + \sqrt{BG})$$

of

$$x (y + G + \sqrt{yG}) = \frac{1}{2} h (B + G + \sqrt{BG}). \dots (3)$$

Tusschen x en y bestaat nog eene betrekking. Zij toch H de hoogte der geheele pyramide dan is volgens (1):

$$H = x \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{y}}$$

of

$$h \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} = x \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{y}}$$

dat is

$$x = h \frac{\sqrt{G} - \sqrt{y}}{\sqrt{G} - \sqrt{B}} \dots (4).$$

Brengt men deze waarde over in verg. (3) dan wordt

$$(y + G + \sqrt{yG})(\sqrt{G} - \sqrt{y}) = \frac{1}{2} (B + G + \sqrt{BG})(\sqrt{G} - \sqrt{B})$$

of

$$\sqrt{G^3} - \sqrt{y^3} = \frac{1}{2} \sqrt{G^3} - \frac{1}{2} \sqrt{B^3}$$

gevende

$$y^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \left(G^{\frac{3}{2}} + B^{\frac{3}{2}} \right) \dots \dots \dots (5).$$

Hieruit wordt de waarde van y berekend, en deze overgebracht in (4) levert de waarde van x .

§ 21.

Inhoud van het prismoïde.

197. Een afgeknut driehoekig prisma $ABCDEF$ (Fig. 59) kan op dezelfde wijze in drie pyramiden verdeeld worden als het driehoekig prisma (Fig. 58). Brengt men namelijk een vlak door een der hoekpunten E van het bovenvlak en de overstaande ribbe AC van het grondvlak, vervolgens een vlak door het hoekpunt A van het grondvlak en de ribbe EF van het bovenvlak, dan is het afgeknut prisma verdeeld in de drie pyramiden $EABC$, $EACF$ en $EADF$. Construeert men vervolgens de drie pyramiden $EABC$, $FABC$, $DABC$, die hetzelfde grondvlak ABC hebben en tot top een der hoekpunten van het bovenvlak, dan heeft men twee groepen van drie pyramiden, van welke aangetoond zal worden, dat zij twee aan twee gelijk zijn.

Ten eerste zijn de eerste pyramiden van beide groepen dezelfde. Vergelijkt men vervolgens de pyramiden $EACF$ en $FABC$, en beschouwt men het hoekpunt A als haar gemeenschappelijken top, dan is de driehoek ECF het grondvlak van de eerste en driehoek BCF die van de tweede. Doch deze driehoeken zijn gelijk, omdat zij dezelfde basis CF bezitten en de toppen E en B op eene lijn evenwijdig aan die basis zijn gelegen. De beide pyramiden hebben dus gelijke grondvlakken en dezelfde hoogte, zoodat zij gelijk van inhoud zijn. Beschouwt men nu de derde pyramiden der beide groepen: $EADF$ en $DABC$, neemt tot top van de eerste het hoekpunt F en tot top der tweede het hoekpunt C , dan zijn de grondvlakken de driehoeken DAE en DAB . Deze driehoeken zijn gelijk wegens gelijkheid van basis en hoogte; de toppen der pyramiden liggen op eene lijn CF die evenwijdig loopt aan de grondvlakken, zoodat de hoogten der

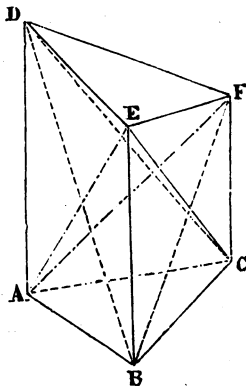


Fig. 59.

pyramiden ook gelijk zijn. Hieruit blijkt dat die beide pyramiden gelijken inhoud bezitten.

Het afgeknut driehoekig prisma heeft dus evenveel inhoud als de drie pyramiden te zamen, die het grondvlak tot gemeenschappelijk grondvlak en de hoekpunten van het bovenvlak tot toppen hebben, waaruit volgt dat die inhoud gelijk is aan het grondvlak vermenigvuldigd met een derde van de som der drie loodlijnen, welke uit de hoekpunten van het bovenvlak op het grondvlak worden neergelaten.

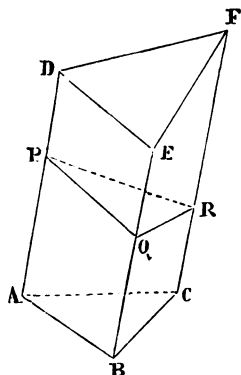


Fig. 60.

Het afgeknut driehoekig prisma is dus ook gelijk aan het prisma, dat hetzelfde grondvlak heeft en het rekenkundig gemiddelde van de drie loodlijnen tot hoogte. Is het afgeknut prisma recht, dan worden de opstaande ribben de loodlijnen, zoodat de inhoud verkregen wordt door het gemiddelde van de ribben met het grondvlak te vermenigvuldigen.

198. Brengt men in een scheef afgeknut driehoekig prisma AF (Fig. 60) een vlak PQR loodrecht op de opstaande ribben, dan wordt het lichaam verdeeld in twee recht afgeknutte prisma's PF en PC. Volgens het voorgaande is nu

$$\text{I. prisma PF} = \triangle PQR \times \frac{1}{3} (PD + QE + RF)$$

$$\text{I. prisma PC} = \triangle PQR \times \frac{1}{3} (PA + QB + RC)$$

opg.

$$\text{I. prisma AF} = \triangle PQR \times \frac{1}{3} (AD + BE + CF) \dots (1)$$

leerende, dat de inhoud van elk afgeknut driehoekig prisma gelijk is aan een derde van de som der opstaande ribben vermenigvuldigd met den inhoud der doorsnede, wier vlak loodrecht staat op die ribben.

199. Door deze eigenschap is men in staat gesteld den inhoud van het willekeurig prisma onder eene andere gedaante voor te stellen. Past men haar eerst toe op het niet afgeknut driehoekig prisma, dan blijkt, dat de inhoud van dit lichaam gelijk is aan den inhoud van den driehoek, waarvan het vlak loodrecht staat op de opstaande ribben, vermenigvuldigd met de lengte dezer ribben. Neemt men vervolgens een veelhoekig scheef prisma en brengt een vlak loodrecht op de opstaande ribben, dan is de doorsnede een veelhoek van evenveel zijden als het grondvlak.

Deze veelhoek wordt door de diagonaalvlakken in evenveel driehoeken verdeeld als het lichaam in driehoekige prisma's. Daar elk van

dezen tot inhoud heeft den overeenkomstigen driehoek der loodrechte doorsnede vermenigvuldigd met de opstaande ribbe, zal de inhoud van het geheele prisma gelijk zijn aan den inhoud der doorsnede, waarvan het vlak loodrecht staat op de opstaande ribben vermenigvuldigd met de lengte dezer ribben.

200. Leggen wij het afgeknot driehoekig prisma op een zijner zijvlakken $A C D F$ (Fig. 61), dat nu grondvlak wordt, terwijl de derde ribbe $B E$ de nok en haar afstand tot het grondvlak de hoogte is. Die hoogte h is tevens de hoogte $Q S$ van den driehoek $P Q R$, wiens vlak loodrecht staat op de evenwijdige ribben. Nu is volgens bovenstaande vergelijking (1)

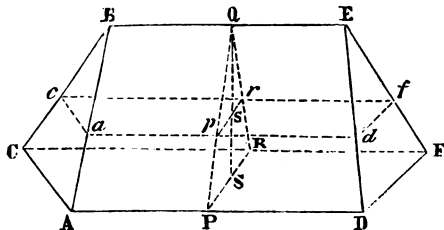


Fig. 61.

$$\begin{aligned} \text{I. prisma } A E &= \triangle P Q R \times \frac{1}{3} (A D + B E + C F) \\ &= \frac{1}{3} Q S \times P R (A D + B E + C F) \dots (2) \end{aligned}$$

Brengen wij ter halver hoogte een vlak $c a d f$ evenwijdig met het grondvlak, dan wordt dat vlak, dat ook een trapezium is, het middenvlak genoemd.

Hiervan is:

$$\begin{aligned} a d &= \frac{1}{2} (A D + B E), \quad c f = \frac{1}{2} (C F + B E), \\ p r &= \frac{1}{2} P R, \end{aligned}$$

zoodat zijn inhoud M wordt (I § 24 n°. 222):

$$M = \frac{1}{2} p r (a d + c f) = \frac{1}{8} P R (A D + C F + 2 B E).$$

De inhoud van het grondvlak is

$$G = \frac{1}{2} P R (A D + C F).$$

Schrijft men nu verg. (2) in dezen vorm:

$$\text{I. prisma} = \frac{1}{3} Q S \left\{ \frac{1}{2} P R (A D + C F) + \frac{1}{2} P R (A D + C F + 2 B E) \right\}$$

dan wordt zij volgens het bovenstaande:

$$I = \frac{1}{3} h \{ G + 4 M \} \dots \dots \dots (3)$$

leerende, dat de inhoud van een liggend driehoekig afgeknot prisma gelijk is aan een zesde van de hoogte vermenigvuldigd met de som van het grondvlak en viermaal het middenvlak.

201. Deze eigenschap geldt ook voor het niet afgeknot driehoekig prisma, en evenzoo voor alle pyramiden op haar grondvlak; want in plaats van een derde der hoogte met het grondvlak te nemen, kan men ook een zesde der hoogte vermenigvuldigen met tweemaal het grondvlak, dat is met de som van het grondvlak en viermaal het middenvlak, omdat dit vlak een vierde van het grondvlak is.

202. In n^o. 191 hebben wij het driehoekig prisma verdeeld in drie

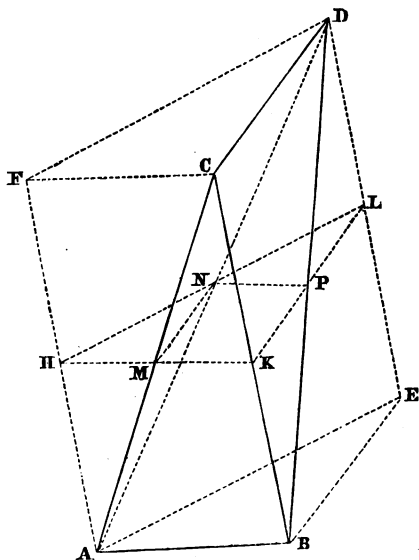


Fig. 62.

driehoekige pyramiden van gelijken inhoud. Eene van deze staat op het grondvlak, eene op het bovenvlak, de derde ligt tusschen beide in en heeft met het grondvlak en bovenvlak slechts eene ribbe gemeen. Gaan wij uit van deze laatste pyramide $ABCD$ (Fig 62), dan kan uit haar het prisma geconstrueerd worden, waarvan zij een derde gedeelte uitmaakt. Daartoe brengt men door de ribbe AB een vlak evenwijdig aan CD en door CD evenwijdig aan AB , dan zijn deze vlakken ABE en CDF grond- en bovenvlak van het gezochte driehoekige prisma $ABEFC D$, dat verder gemakkelijk wordt voltooid.

Brengt men door dit prisma een vlak HKL ter halver hoogte evenwijdig aan grond- en bovenvlak, dan is de inhoud van het prisma gelijk aan dezen driehoek HKL , vermenigvuldigd met de hoogte. Elke pyramide dus ook het viervlak $ABCD$ is het derde deel van het prisma, en heeft dus tot inhoud een derde van het product van dit middenvlak en de hoogte.

Het middenvlak snijdt de pyramide $ABCD$ volgens een vierhoek $MKNP$, die een parallelogram is, omdat het middenvlak alle lijnen van het grondvlak naar het bovenvlak getrokken middendoor deelt. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} MK &= NP = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} HK, \\ KP &= MN = \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} KL, \end{aligned}$$

terwijl de lijnen in elk dezer gelijkheden voorkomende ook evenwijdig loopen. De inhoud van het parallelogram $MKNP$ is dus de helft van den driehoek HKL , dat is van het middenvlak.

De hoogte van het prisma is tevens de afstand der kruisende ribben AB en CD . De inhoud der pyramide $ABCD$ is dus gelijk aan een derde van het product van den afstand der kruisende ribben AB en CD , en tweemaal het vlak $MKPN$, dat midden tusschen deze kruisende ribben en evenwijdig aan beide door de pyramide wordt gebracht. Deze eigenschap, alleen voor de driehoekige pyramide geldende, kan ook aldus worden uitgedrukt:

de inhoud van elk viervlak is gelijk aan een zesde van het product van den afstand van twee kruisende ribben en viermaal den inhoud der doorsnede, waarvan het vlak midden tusschen en evenwijdig aan die ribben door het lichaam wordt gebracht.

Dit vlak is een parallelogram, waarvan de zijden gelijk zijn aan de helft van de beide kruisende ribben, aan welke het evenwijdig is.

Bedenkt men, dat in dezen stand der pyramide het grondvlak eene lijn is en dus geen inhoud bezit, dan is het duidelijk, dat de verkregen uitkomst als een bijzonder geval van bovenstaande verg. (3) kan aangemerkt worden.

203. Door verbinding van de laatst verkregen uitkomsten kan nu de inhoud van het prismoïde (§ 11 n°. 107) berekend worden. In Fig. 63 is zulk een lichaam voorgesteld, tot grondvlak hebbende den n -hoek ACE , tot bovenvlak

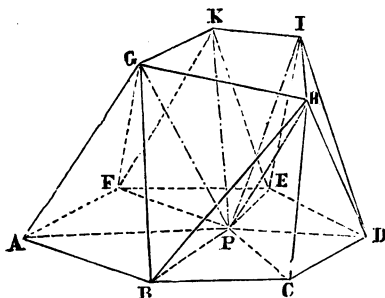


Fig. 63.

den m -hoek GHI . Nemen wij in het grondvlak een willekeurig punt P en brengen vlakken door dit punt en de ribben van het bovenvlak, dan ontstaat eene pyramide $P.GHIK$, die de kern van het lichaam uitmaakt. Brengen wij vervolgens vlakken door het punt P en de opstaande ribben, dan wordt de rest van het lichaam verdeeld in viervlakken, waarvan sommige zooals $G.ABP$ en $H.BPC$ een der hoekpunten van het bovenvlak tot top, en een gedeelte van het benedenvlak tot grondvlak bezitten, de andere, zooals $BPGH$ en $DPHI$, twee kruisende ribben hebben, waarvan er eene in het grondvlak eene in het bovenvlak is gelegen.

Denken wij nu het middenvlak ter halve hoogte evenwijdig aan grond- en bovenvlak door het lichaam gebracht, dan is, volgens de voorgaande opmerking, op al deze lichamen de vergelijking (3) van toepassing. Voor de kern is het grondvlak het bovenvlak van het

prismoïde, voor de eerstgenoemde rij van viervlakken is de som der grondvlakken het grondvlak van het prismoïde; de tweede rij van viervlakken verkeeren in het geval, dat in n^o. 202 is behandeld; zij hebben geen grondvlak maar hunne middenvlakken maken een deel uit van

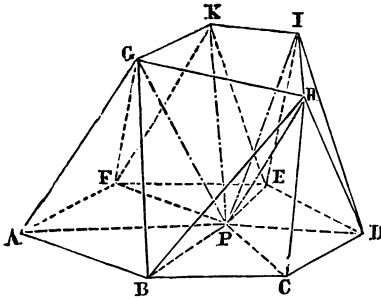


Fig. 63.

het middenvlak van het prismoïde. Dit laatste bevat dus het middenvlak van de m -hoekige pyramide die P tot top en het bovenvlak van het prismoïde tot grondvlak heeft, de middenvlakken van alle viervlakken die op het grondvlak staan en een der hoekpunten van het bovenvlak tot top hebben, en de middenvlakken van de viervlakken, die tusschen de voorgaande gelegen slechts eene ribbe in het

grondvlak en eene ribbe in het bovenvlak hebben.

Past men nu op al de lichamen, waarin het prismoïde is verdeeld de formule (3) toe, dan hebben alle dezelfde hoogte h , nl. die van het prismoïde; de som der grondvlakken is het grondvlak G en het bovenvlak B , de som van alle middenvlakken het middenvlak M van het prismoïde, zoodat de inhoud van dit lichaam wordt uitgedrukt door de formule

$$I = \frac{1}{3} h (G + B + 4 M) \dots \dots \dots (5)$$

of in woorden: de inhoud van een prismoïde is gelijk aan een zesde van de hoogte vermenigvuldigd met de som van het grondvlak, het bovenvlak en viermaal het middenvlak.

204. Van deze algemeene eigenschap zijn vele uitkomsten in deze paragraaf verkregen slechts bijzondere gevallen; zij geldt ook voor pyramiden, afgeknotten pyramiden, prisma's en zuilen, omdat al deze lichamen als prismoïden kunnen beschouwd worden; doch niet voor afgeknotten prisma's en in het algemeen voor lichamen waarvan grond- en bovenvlak niet evenwijdig loopen.

205. Heeft het prismoïde tot grond- en ook tot bovenvlak een rechthoek (Fig. 64), en zijn de lengte en breedte van het grondvlak a, b , die van het bovenvlak a', b' , dan is het middenvlak ook een rechthoek tot afmetingen hebbende,

$$KL = \frac{1}{2} (a + a'), \quad LM = \frac{1}{2} (b + b');$$

hierdoor wordt

$$G = a b, \quad B = a' b',$$

$$M = \frac{1}{4} (a + a') (b + b'),$$

en dus volgens vergelijking (5)

$$I = \frac{1}{6} h \{ a b + a' b' + (a + a') (b + b') \}$$

$$= \frac{1}{6} h (2 a b + 2 a' b' + a b' + a' b),$$

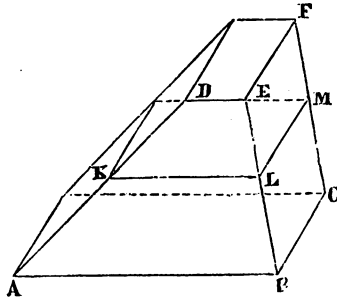


Fig. 64.

waardoor de inhoud van het recht prismoïde kan berekend worden uit de lengte en breedte van grond- en bovenvlak.

206. Wanneer een balk (Fig 65) wordt afgeknot door een schuin vlak $A'B'C'D'$, en men brengt vlakken door de overstaande opstaande ribben AA' , CC' en BB' , DD' , welke vlakken elkander volgens de

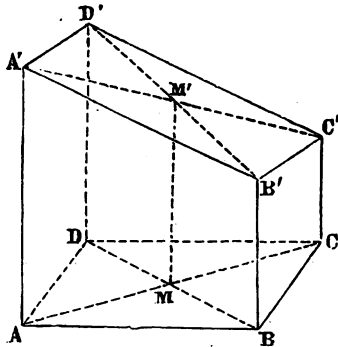


Fig. 65.

lijn MM' snijden, dan wordt het lichaam verdeeld in vier rechte afgeknotte driehoekige prisma's.

Nu is volgens verg. (1), daarbij in het oog houdende dat de driehoeken van het grondvlak onderling gelijk zijn,

I. afg. prisma $ABM' = \triangle AMB \times \frac{1}{3} (AA' + BB' + MM')$

I. afg. prisma $BCM' = \triangle BMC \times \frac{1}{3} (BB' + CC' + MM')$

I. afg. prisma $CDM' = \triangle CMD \times \frac{1}{3} (CC' + DD' + MM')$

I. afg. prisma $DAM' = \triangle DMA \times \frac{1}{3} (DD' + AA' + MM')$

opg.

I. afg. balk $= \triangle AMB \times \frac{1}{3} (2AA' + 2BB' + 2CC' + 2DD' + 4MM')$,

Verder is:

in trapezium AC' :

$$AA' + CC' = 2MM',$$

in trapezium BD' :

$$BB' + DD' = 2MM',$$

en ook

$$\triangle AMB = \frac{1}{3} \text{ parall. } AC = \frac{1}{3} G.$$

Hierdoor wordt

$$\text{I. afg. balk} = G \times MM',$$

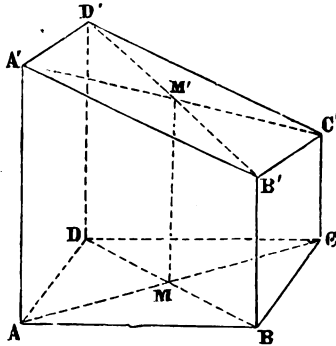


Fig. 65.

leerende, dat de inhoud van een afgeknotten balk gelijk is aan het grondvlak vermenigvuldigd met de lengte der loodlijn die in het middelpunt van het grondvlak is opgericht.

Wanneer het bovenvlak gaat door het vaste punt M' , dan heeft eene verandering in zijn stand geen invloed op den inhoud van het lichaam. Brengt men derhalve door M' een vlak evenwijdig aan het grondvlak, dan verkrijgt men een geheel balk, die evenveel inhoud heeft als alle afgeknotten balken, die op hetzelfde grondvlak staan en waarvan het bovenvlak door het punt M' gaat.

207. De inhoud van een willekeurig veelvlakkig lichaam kan alleen berekend worden, wanneer men in staat is het door verdeeling tot de in deze en de vorige paragrafen behandelde lichamen terug te brengen, en deze deelen de noodige gegevens ter inhoudsbepaling bezitten. Van alle gelijkvormige lichamen behoeft slechts de inhoud van één hunner bekend te zijn, om uit de gelijkvormigheids-verhouding tot dien van de anderen te kunnen besluiten. Immers het is gebleken, dat de inhouden van alle lichamen worden uitgedrukt door een gelijkslachtigen algebraïschen vorm, die van den derden graad is, wanneer de lengte eener lijn voor den eersten graad is aangenomen, terwijl in diezelfde onderstelling de inhoud van een vlak door een vorm van den tweeden graad wordt uitgedrukt. Bij gelijkvormige lichamen zijn alle gelijkstandige lijnen evenredig; is dus van een lichaam

$$I = A \times B \times C,$$

waarin A, B en C lengten van lijnen voorstellen, en van een ander gelijksoortig lichaam

$$I' = A' \times B' \times C',$$

waarin A', B', C' gelijkstandige lijnen zijn met A, B, C , dan volgt uit de gelijkvormigheid der lichamen

$$A : A' = B : B' = C : C',$$

gevende

$$I : I' = A \times B \times C : A' \times B' \times C' = A^3 : A'^3 = B^3 : B'^3 = C^3 : C'^3. \quad (6)$$

waaruit volgt, dat de inhouden van gelijkvormige lichamen zich verhouden als de derde machten der gelijkstandige lijnen.

Zoo zijn in gelijkvormige pyramiden of in pyramiden die door de snijding van eenzelfde drie- of veelvlakkigen hoek met evenwijdige vlakken ontstaan, alle gelijkstandige lijnen, zooals ribben en hoogten, evenredig; de inhouden van overeenkomstige vlakken, zooals grondvlakken en zijvlakken evenredig aan de tweede machten dezer lijnen; eindelijk de inhouden der pyramiden evenredig aan de derde machten dezer lijnen.

208. Hebben twee driehoekige pyramiden $T.ABC$ en $T.A'B'C'$ (Fig. 66) een gemeenschappelijke drievlakkigen hoek in T en laat men uit C en C' loodlijnen neer op het overstaande vlak, dan is

$$\left. \begin{aligned} \text{I. pyr. } T.ABC &= \triangle ATB \times \frac{1}{3} CD \\ \text{I. pyr. } T.A'B'C' &= \triangle A'TB' \times \frac{1}{3} C'D' \end{aligned} \right\} \dots \dots (7)$$

Daar echter de driehoeken ATB en $A'TB'$ een gemeenschappelijke hoek in T bezitten, is (I. § 24, n^o. 229):

$$\triangle ATB : \triangle A'TB' = AT \times BT : A'T \times B'T. \dots (8)$$

Verder is in de gelijkvormige driehoeken CTD en $C'TD'$:

$$CD : C'D' = CT : C'T,$$

dus ook

$$\frac{1}{3} CD : \frac{1}{3} C'D' = CT : C'T. \dots \dots \dots (9)$$

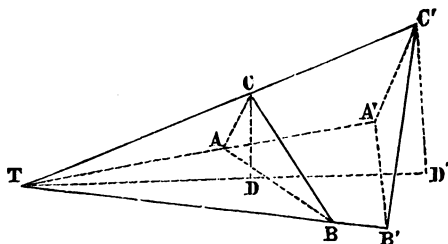


Fig. 66.

Vermenigvuldigt men nu term voor term de evenredigheden (8) en (9) daarbij lettende op de vergelijkingen (7), dan volgt

$$\begin{aligned} & \text{I. pyr. } T.ABC : \text{I. pyr. } T.A'B'C' \\ & = AT \times BT \times CT : A'T \times B'T \times C'T \dots \dots (10) \end{aligned}$$

dat is, de inhouden van driehoekige pyramiden, die een gelijken drievlakkigen hoek bezitten, verhouden zich als de producten van de drie ribben aan dezen drievlakkigen hoek.

209. Deze eigenschap komt in de ruimte overeen met de eigenschap der driehoeken in het platte vlak, die zoo even is aangehaald. Zijn de pyramiden daarenboven gelijkvormig, dan zijn de vlakken ABC en $A'B'C'$ evenwijdig en bestaat de evenredigheid

$$AT : A'T = BT : B'T = CT : C'T,$$

waardoor verg. (10) overgaat in

$$\begin{aligned} & \text{I. pyr. } T.ABC : \text{I. pyr. } T.A'B'C' = AT^3 : A'T^3 \\ & = BT^3 : B'T^3 = CT^3 : C'T^3. \end{aligned}$$

Op deze wijze vindt men een bijzonder geval van de hierboven algemeen aangetoonde eigenschap, dat de inhouden van gelijkvormige lichamen zich verhouden als de derde machten der gelijkstandige lijnen.

VIJFDE HOOFDSTUK.

INHOUD EN OPPERVLAKE VAN LICHAMEN, DIE DOOR GEBOGEN VLAKKEN WORDEN BEGRENSD.

§ 22.

Inhoud en oppervlak van den kegel.

210. Daar een kegelvormig lichaam (§ 13) kan beschouwd worden als eene pyramide, wier grondvlak in plaats van een veelhoek eene kromme lijn is, zijn alle eigenschappen der pyramide, die niet afhangen van het aantal zijden van het grondvlak, van toepassing op den kegel.

De formule, die den inhoud der pyramide uitdrukt is onafhankelijk van den vorm en het aantal zijden van het grondvlak; derhalve is zij ook van toepassing op den kegel. Hieruit volgt terstond, dat de inhoud van een kegelvormig lichaam gelijk is aan den inhoud van het grondvlak vermenigvuldigd met een derde gedeelte van de hoogte.

De inhoud van het grondvlak kan slechts (volgens het geleerde in het 1^e deel) bepaald worden, wanneer dit grondvlak een cirkel, en dus de kegel cirkelvormig is. Zij in dat geval de straal van het grondvlak R , dan is zijn behoud πR^2 ; de inhoud des kegels wordt dus

$$I. = \frac{1}{3} \pi H R^2 \dots\dots\dots (1)$$

waarin H voorstelt de hoogte, dat is de lengte der loodlijn uit den top des kegels op het grondvlak neergelaten. Is de cirkelvormige kegel recht (§ 15 n^o. 136), dan is de hoogte tevens de lengte der as.

211. Het gebogen oppervlak van den kegel wordt bepaald door den vlakken inhoud te berekenen van de figuur, die door de ontwikkeling van het kegelvlak ontstaat. Deze berekening is slechts mogelijk bij

den rechten cirkelvormigen kegel (Fig. 40); hier toch ontstaat door die ontwikkeling een cirkelsector, waarvan de straal is de beschrijvende lijn of schuine zijde, en de boog de lengte van den cirkel, die het grondvlak vormt. Daar de inhoud van den cirkelsector wordt verkregen door het halve product te nemen van boog en straal, zoo is het oppervlak van den gewonen kegel gelijk aan het halve product van de schuine zijde en den omtrek van het grondvlak. De omtrek van het grondvlak $2\pi R$ en de lengte der schuine zijde S zijnde, ontstaat de formule

$$O = \frac{1}{2} S \times 2\pi R = \pi S R. \dots \dots \dots (2)$$

212. Brengen wij (fig. 40) ter halver hoogte van den kegel een vlak $A'B'$ evenwijdig aan het grondvlak, dan is de doorsnede een cirkel, waarvan de straal $A'M'$ de helft is van den straal van het grondvlak. Hieruit volgt, dat formule (2) ook aldus kan geschreven worden

$$O = S \times 2\pi \cdot A'M' \dots \dots (3)$$

leerende, dat het oppervlak des kegels ook gelijk is aan de schuine zijde vermenigvuldigd met den omtrek des cirkels die ter halver hoogte evenwijdig aan het grondvlak wordt getrokken.

Trekken wij nu nog de lijn $A'N$ loodrecht op de schuine zijde AT tot zij de as in N snijdt, dan is $\triangle A'NM'$ gelijkvormig aan $\triangle TAM$, omdat de zijden van den een loodrecht staan op die van den ander. Hieruit volgt:

$$A'N : TA = A'M' : TM,$$

of

$$A'N \times H = S \times A'M';$$

dit overgebracht in formule (3) geeft:

$$O = H \times 2\pi A'N \dots \dots \dots (4)$$

dat wil zeggen: het oppervlak des kegels is ook gelijk aan de hoogte vermenigvuldigd met den omtrek eens cirkels, waarvan de straal is de lijn, die in het midden der schuine zijde loodrecht op haar wordt getrokken, tot zij de as snijdt.

213. Op elk afgeknot kegelvormig lichaam kan de formule toegepast worden, die den inhoud der afgeknotte pyramide uitdrukt in grond- en bovenvlak benevens de hoogte, zijnde (§ 20, n°. 194):

$$I = \frac{1}{3} h (G + B + \sqrt{GB}).$$

Zij R de straal van het grondvlak, r die van het bovenvlak, dan wordt voor den afgeknotten cirkelvormigen kegel

$$G = \pi R^2, \quad B = \pi r^2;$$

derhalve vindt men voor zijn inhoud

$$I = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr) \dots \dots \dots (5)$$

Men merke op, dat in deze formule de wortelvorm niet meer voorkomt. Bij den rechten cirkelvormigen kegel is de hoogte tevens de as van het omwentelingslichaam.

214. Om het oppervlak van den afgeknotten omwentelingskegel te bepalen, beschouwen wij hem als het verschil van den geheelen kegel en het bovenste stuk.

Volgens formule (4) van § 15, n^o. 137 vindt men uit de bepalende grootheden des afgeknotten kegels voor de beschrijvende lijn van den geheelen kegel en die van het bovenste stuk

$$S = s \frac{R}{R-r}, \quad s' = s \frac{r}{R-r}.$$

Nu is het oppervlak des geheelen kegels en dat van het bovenste stuk volgens formule (2)

$$O = \pi S R = \pi s \frac{R^2}{R-r},$$

$$o' = \pi s' r = \pi s \frac{r^2}{R-r};$$

gevende door aftrekking voor het oppervlak des afgeknotten kegels

$$o = \pi s (R+r) = \frac{1}{2} s (2\pi R + 2\pi r) \dots \dots \dots (6)$$

welke formule aldus in woorden wordt uitgedrukt: het oppervlak van den afgeknotten omwentelingskegel is gelijk aan de schuine zijde, vermenigvuldigd met de halve som der omtrekken van grond en bovenvlak.

215. Brengen wij (fig. 67) ter halver hoogte tusschen grond- en bovenvlak door den afgeknotten kegel een vlak, gevende een cirkelvormige doorsnede met den straal $A'M'$. Daar in het trapezium $AMPC$ de lijn

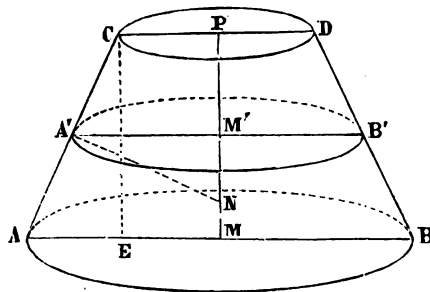


Fig. 67.

A'M' midden tusschen de evenwijdige zijden is getrokken, heeft men de betrekking:

$$A'M' = \frac{1}{2} (AM + CP) = \frac{1}{2} (R + r),$$

dus ook

$$2\pi A'M' = \frac{1}{2} (2\pi R + 2\pi r).$$

Hierdoor wordt formule (6)

$$o = s \times 2\pi A'M' \dots\dots\dots (7)$$

leerende, dat het oppervlak des afgeknotten kegels ook gelijk is aan de lengte der schuine zijde vermenigvuldigd met den omtrek van den cirkel, die midden tusschen grond- en bovenvlak wordt getrokken.

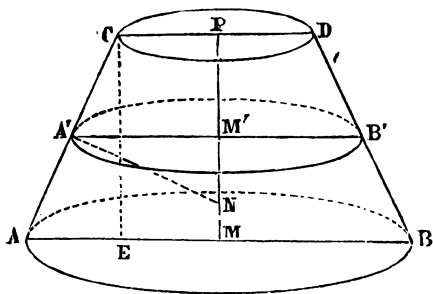


Fig. 67.

216. Trekken wij in A' de lijn A'N loodrecht op de schuine zijde tot zij de as in N snijdt, en ook nog de lijn CE loodrecht op het grondvlak, dan zijn de driehoeken A'NM' en CAE gelijkvormig, omdat de zijden van den een

loodrecht staan op die van den ander. Hieruit volgt de evenredigheid

$$A'N : CA = A'M' : CE,$$

of

$$A'N \times h = s \times A'M'$$

Brengt men dit over in formule (7), dan wordt

$$o = h \times 2\pi A'N \dots\dots\dots (8)$$

zoodat het oppervlak van den afgeknotten omwentelingskegel ook gelijk is aan de hoogte, vermenigvuldigd met den omtrek van den cirkel, wiens straal is de lijn in het midden der schuine zijde loodrecht op haar getrokken, tot zij de as snijdt.

Uit de volkomen overeenstemming der formules (3) en (4) met (7) en (8) blijkt, dat de oppervlakken van geheele en afgeknotten omwentelingskegels op dezelfde wijze kunnen worden uitgedrukt.

217. In § 20, n°. 196 is het vraagstuk opgelost om in eene afgeknotten pyramide het vlak te bepalen, dat het lichaam in twee gelijke deelen verdeelt. Dit kan onmiddellijk op den afgeknotten cirkelvormi-

gen kegel worden overgebracht; noemt men toch z den straal van de gevraagde cirkelvormige doorsnede, dan gaat de formule (5) van § 20 over in

$$z^3 = \frac{1}{2} (R^3 + r^3),$$

door welke meer eenvoudig formule de bepalende lijn van het gevraagde vlak uit de stralen van grond- en bovenvlak wordt berekend.

Evenzoo is eene nuttige toepassing van de in deze paragraaf verkregen uitkomsten de oplossing van het vraagstuk, om het vlak te bepalen, dat het gebogen oppervlak van den afgeknotten omwentelingskegel in twee gelijke deelen verdeelt en tevens de verhouding te zoeken tusschen den inhoud der stukken waarin de afgeknotte kegel door dit vlak wordt verdeeld.

§ 23.

Inhoud en oppervlak van den cylinder.

218. In § 13 n^o. 122 is geleerd, dat een cylindervormig lichaam kan beschouwd worden als een prisma, waarvan het grondvlak is eene gesloten kromme lijn in plaats van een veelhoek, zoodat alle eigenschappen van het prisma, die onafhankelijk zijn van het aantal zijvlakken ook van toepassing zijn op den cylinder. Daar verder in § 19 n^o. 187 is gevonden, dat de inhoud van elk prisma wordt verkregen door het product te nemen van grondvlak en hoogte, en deze eigenschap aan de genoemde voorwaarde voldoet, volgt dat de inhoud van een cylindervormig lichaam gelijk is aan den vlakken inhoud van het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte. De hoogte, hetzij hierbij herinnerd, is de afstand van grond- en bovenvlak.

219. Is de cylinder recht, dan kan voor de hoogte de lengte der beschrijvende lijn genomen worden. De inhoud van het grondvlak kan slechts bepaald worden, wanneer de cylinder cirkelvormig is. Zij R de straal van het grondvlak, dan is zijn inhoud πR^2 en dus de inhoud van den cylinder

$$I = \pi H R^2. \dots\dots\dots (1)$$

220. Het gebogen oppervlak van den cylinder kan bepaald worden, wanneer het na ontwikkeling eene rechte lijnige figuur geeft, en dit geval doet zich slechts voor (§ 15, n^o. 144) bij den omwentelingscylinder. Bij ontwikkeling van het oppervlak (Fig. 42) verkrijgt men een rechthoek, die tot basis heeft den omtrek van den cirkel AM

zijnde $2\pi R$, en tot hoogte de beschrijvende lijn AA' . Daar de inhoud van een rechthoek gelijk is aan het product van basis en hoogte, vindt men voor het gebogen oppervlak van den cylinder

$$O = 2\pi H R. \dots\dots\dots (2)$$

• Uit de vergelijkingen (1) en (2) volgt

$$I = \frac{1}{2} R \times O,$$

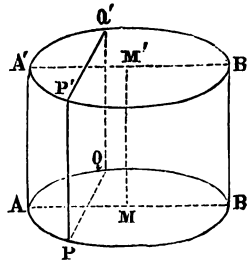


Fig. 42.

zoodat men den inhoud van den omwentelingscylinder verkrijgt, door het gebogen oppervlak met den halven straal van het grondvlak te vermenigvuldigen. Construeert men derhalve op den rechthoek, die het ontwikkeld cylindervlak voorstelt, een balk tot hoogte hebbende den halven straal, dan is zijn inhoud gelijk aan dien van den cylinder.

221. In § 21 n°. 199 is de inhoud van het prisma onder eene andere gedaante voorgesteld, en aangetoond dat hij gemeten wordt door het product van de opstaande ribbe en den inhoud der doorsnede, wier vlak loodrecht staat op die ribbe. Deze eigenschap evenzoo onafhankelijk zijnde van het aantal zijden des grondvlak is ook van toepassing op den cylinder en leert, dat van elk cylindervormig lichaam de inhoud gelijk is aan de lengte der beschrijvende lijn vermenigvuldigd met den inhoud der doorsnede, wier vlak loodrecht staat op de beschrijvende lijn.

Door vergelijking van deze uitkomst met de eerstgenoemde komt men tot de eigenschap, dat bij elken cylinder de inhoud van het grondvlak staat tot die van de loodrechte doorsnede als de beschrijvende lijn tot de hoogte van den cylinder.

222. Wordt de omwentelingscylinder afgeknot door een plat vlak CD (Fig. 68), dat niet evenwijdig is aan het grondvlak, en brengt men door het punt N waar de as dit vlak snijdt een vlak $A'B'$ evenwijdig aan het grondvlak, dat het vlak CD volgens de lijn PQ door-

snijdt, dan zijn wegens de volkomen symmetrie de deelen van het lichaam $PQA'C$ en $PQB'D$ gelijk van inhoud en van oppervlak. Hieruit volgt, dat de inhoud en ook het gebogen oppervlak van den afgeknotten cylinder AD gelijk is aan den inhoud en het gebogen oppervlak van den rechten cylinder AB' . Van een afgeknotten omwentelingscylinder is derhalve de inhoud gelijk aan den inhoud van het grondvlak vermenigvuldigd met de lengte der as; en het gebogen oppervlak gelijk aan den omtrek van het grondvlak vermenigvuldigd met de lengte der as.

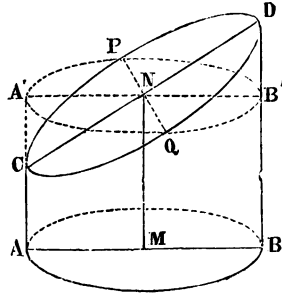


Fig. 68.

Dezelfde eigenschap geldt voor den dubbel afgeknotten omwentelingscylinder, wanneer men voor het grondvlak neemt de cirkelvormige doorsnede, en voor de lengte der as het gedeelte dezer lijn, dat tusschen grond- en bovenvlak is begrepen.

§ 24.

Inhoud en oppervlak van rechthoekige omwentelingsfiguren.

223. In § 14 n^o. 128 is gebleken, dat door de wenteling eener rechte lijn om eene andere lijn als as, die met haar in een vlak is gelegen, een kegelvlak of een cylindervlak ontstaat. Hieruit volgt, dat een lichaam, dat ontstaat door de wenteling eener vlakke rechthoekige figuur om eene lijn, die in hetzelfde vlak is gelegen, steeds kan verdeeld worden in kegels en cylinders, waarvan de inhoud en het oppervlak gevonden worden door middel van de uitkomsten, die in de beide voorgaande paragrafen zijn verkregen.

Zij (Fig. 69) ABC een driehoek, wentelende om de lijn PQ die willekeurig buiten den driehoek maar in zijn vlak is gelegen. De hoekpunten beschrijven cirkels, waarvan de middelpunten de voetpunten zijn der loodlijnen die op de as worden neergelaten.

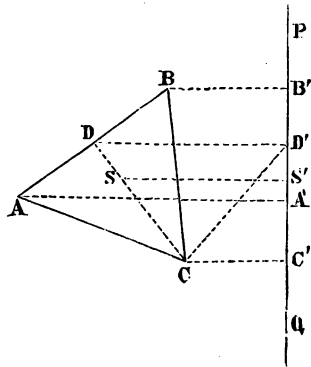


Fig. 69.

Het geheele oppervlak, dat door den driehoek bij zijne wenteling wordt beschreven bestaat uit de som van drie afgeknotte kegelvlakken; past men voor de berekening op elk van deze formule (6) van n^o, 214 toe, en noemt men ter vereenvoudiging het oppervlak door de lijn AB beschreven $O(AB)$ enz.; dan wordt

$$O(AB) = \pi AB(AA' + BB')$$

$$O(AC) = \pi AC(AA' + CC')$$

$$O(BC) = \pi BC(BB' + CC')$$

opg.

$$O(\triangle ABC) = \pi \{ AA'(AB + AC) + BB'(AB + BC) + CC'(AC + BC) \}. \quad (3)$$

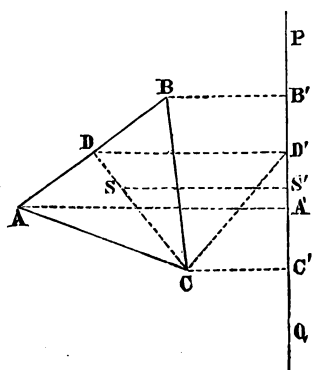


Fig. 69.

door welke formule het oppervlak uit de zijden van den driehoek en de afstanden der hoekpunten tot de as kan berekend worden.

224. Ter bepaling van den inhoud van het lichaam, dat door de wenteling van den driehoek ontstaat, beschouwen wij het als een samenstel van de afgeknotte kegels, die door de wenteling der zijden worden voortgebracht. Noemen wij weder den inhoud van het eerste lichaam $I(\triangle ABC)$, en van de andere $I(AB)$ enz., dan is in fig. 69

$$I(\triangle ABC) = I(AB) + I(AC) - I(BC).$$

De inhoud dezer afgeknottepyramiden wordt volgens formule (5) van n^o. 213:

$$I(AB) = \frac{1}{3} \pi A'B'(AA'^2 + BB'^2 + AA' \cdot BB')$$

$$I(AC) = \frac{1}{3} \pi A'C'(AA'^2 + CC'^2 + AA' \cdot CC')$$

$$I(BC) = \frac{1}{3} \pi (A'B' + A'C')(BB'^2 + CC'^2 + BB' \cdot CC')$$

opg. en afgetr.

$$\begin{aligned} I(\triangle ABC) &= \frac{1}{3} \pi [A'B' \{ (AA'^2 - CC'^2) + BB'(AA' - CC') \} \\ &\quad + A'C' \{ (AA'^2 - BB'^2) + CC'(AA' - BB') \}] \\ &= \frac{1}{3} \pi [A'B'(AA' + BB' + CC')(AA' - CC') \\ &\quad + A'C'(AA' + BB' + CC')(AA' - BB')] \\ &= \frac{1}{3} \pi (AA' + BB' + CC')[A'B'(AA' - CC') + A'C'(AA' - BB')] \end{aligned}$$

Nu volgt uit de figuur voor den vlakken inhoud des driehoeks

$$\triangle ABC = I \text{ trap. } AB' + I \text{ trap. } AC' - I \text{ trap. } CB'$$

Volgens het geleerde in de vlakke meetkunde (I § 24 n^o. 222) is echter:

$$\text{I trap. } A B' = \frac{1}{2} A' B' (A A' + B B')$$

$$\text{I trap. } A C' = \frac{1}{2} A' C' (A A' + C C')$$

$$\text{I trap. } C B' = \frac{1}{2} (A' B' + A' C') (B B' + C C')$$

opg. en afgetr.

$$\Delta A B C = \frac{1}{3} [A' B' (A A' - C C') + A' C' (A A' - B B')].$$

Brengt men dit in de voorgaande uitkomst over, dan wordt:

$$\begin{aligned} \text{I}(\Delta A B C) &= 2 \Delta A B C \times \frac{1}{3} \pi (A A' + B B' + C C') \\ &= \Delta A B C \times \frac{1}{3} (2 \pi A A' + 2 \pi B B' + 2 \pi C C'). \quad (1) \end{aligned}$$

waaruit volgt: de inhoud van het ringvormig lichaam ontstaande door de wenteling van den driehoek, is gelijk aan den vlakken inhoud des driehoeks vermenigvuldigd met een derde van de som der cirkelomtrekken, die door de hoekpunten worden beschreven.

Het is gemakkelijk na te gaan, dat deze eigenschap blijft gelden, welken stand de driehoek ten opzichte der as heeft, ook wanneer eene der zijden evenwijdig aan de as loopt, waardoor een der afgeknotte kegelvlakken in een cylindervlak overgaat.

224. Schrijven wij verg. (2) in den vorm:

$$\text{I}(\Delta A B C) = \Delta A B C \times 2 \pi \times \frac{1}{3} (A A' + B B' + C C'), \dots (3)$$

dan blijkt, dat de gezochte inhoud verkregen wordt, door den vlakken inhoud des driehoeks te vermenigvuldigen met den omtrek des cirkels beschreven door een punt, waarvan de afstand tot de as een derde is van de som der afstanden van de drie hoekpunten tot de as; de plaats van dit punt wordt op de volgende wijze bepaald.

Zij D het midden van AB, en DD' loodrecht op de as, dan is in het trapezium AA'B'B (I § 24, n°. 222)

$$D D' = \frac{1}{2} (A A' + B B'),$$

Zij verder het punt S zoodanig op CD genomen, dat DS = $\frac{1}{3}$ CD, en SS' loodrecht getrokken op de as, dan vindt men door middel van de lijn CD',

$$S S' = \frac{1}{3} D D' + \frac{1}{3} C C',$$

derhalve

$$S S' = \frac{1}{3} (A A' + B B' + C C').$$

Hieruit blijkt, dat S het gezochte punt is, overeenkomende (volgens I § 12, n°. 83) met het snijpunt van de lijnen, die de hoekpunten met het midden der overstaande zijden vereenigen. Dit punt wordt ook het zwaartepunt des driehoeks genoemd, zoodat de verkregen uitkomsten in dezen eenvoudigen vorm worden uitgedrukt:

De inhoud van het lichaam, dat ontstaat door de wenteling van den driehoek, is gelijk aan den vlakken inhoud des driehoeks vermenigvuldigd met den omtrek des cirkels, die door zijn zwaartepunt wordt beschreven.

225. Laten wij thans als bijzonder geval een der hoekpunten C des driehoeks met de as samenvallen, dan wordt in de formules (2) en (3) $CC' = 0$, gevende:

$$I(\triangle ABC) = \triangle ABC \times 2\pi \times \frac{1}{3} (AA' + BB').$$

Zij (Fig. 70) CC' de loodlijn uit dit hoekpunt op de overstaande zijde des driehoeks neergelaten, dan is:

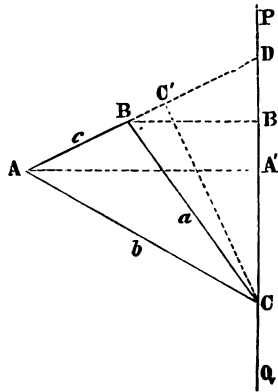


Fig. 70.

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \times CC',$$

Brengt men dit in de laatste uitdrukking over, dan wordt:

$$I(\triangle ABC) = \frac{1}{3} \pi \cdot AB \times CC' (AA' + BB') \dots (4)$$

Nu is (n^o. 223)

$$O(AB) = \pi \cdot AB (AA' + BB'),$$

derhalve

$$I(\triangle ABC) = \frac{1}{3} CC' \times O(AB)$$

waaruit volgt: wentelt de driehoek om eene lijn in zijn vlak door een der hoekpunten getrokken, dan is de inhoud van het omwentelingslichaam gelijk aan het oppervlak, door de vrije zijde beschreven, vermenigvuldigd met een derde der loodlijn, die uit het overstaande hoekpunt op haar wordt neergelaten.

Deze uitkomst blijft gelden, wanneer de vrije zijde evenwijdig loopt aan de omwentelingsas (Fig. 71).

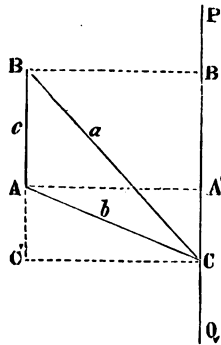


Fig. 71.

226. Valt (Fig. 72) nog een tweede hoekpunt B in de as dan wordt in verg. (4) ook $BB' = 0$, gevende:

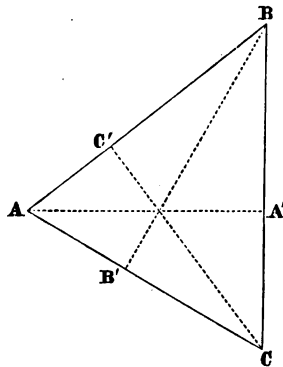


Fig. 72.

$$I(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \pi AB \times CC' \times AA' \dots \dots (6).$$

Zij BB' de loodlijn uit B op AC neergelaten, dan is

$$O(AB) = \pi AB \times AA', \quad O(AC) = \pi AC \times BB';$$

derhalve, omdat ook $AB \times CC' = AC \times BB' = 2 \triangle ABC$,

$$\begin{aligned} I(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} CC' \times O(AB) \\ &= \frac{1}{2} BB' \times O(AC) \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

waarin deze uitkomst ligt opgesloten: wentelt een driehoek om

een zijner zijden, dan is de inhoud van het omwentelingslichaam gelijk aan het oppervlak door een der zijden beschreven vermenigvuldigd met een derde der loodlijn, die uit het overstaande hoekpunt op die zijde wordt neergelaten.

227. Stelt men in verg. (6)

$$AB \times CC' = 2 \Delta ABC$$

dan wordt:

$$I(\Delta ABC) = \frac{1}{3} \Delta ABC \times 2\pi AA' \dots\dots\dots (8)$$

zoodat de inhoud van het omwentelingslichaam ook gelijk is aan een

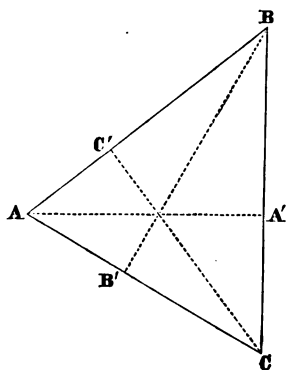


Fig. 72.

derde van den inhoud des driehoeks vermenigvuldigd met den cirkelomtrek, die door het vrije hoekpunt wordt beschreven.

In (8) kan men weer stellen:

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} AA' \times BC,$$

waaruit volgt

$$I(\Delta ABC) = \frac{1}{3} BC \times \pi AA'^2 \dots\dots\dots (9)$$

De inhoud van het omwentelingslichaam is dus ook gelijk aan den inhoud van den cirkel, die door het vrije hoekpunt wordt beschreven, vermenigvuldigd met een derde van de lengte der zijde, om welke de wenteling plaats heeft.

228. Deze laatste uitkomst kan men ook onmiddellijk verkrijgen door dit omwentelingslichaam te beschouwen als de som van de kegels, die ontstaan door de wenteling der rechthoekige driehoeken ABA' en ACA' om de rechthoekszijden BA' en $A'C$; is de driehoek stomphoekig in een der hoekpunten aan de as, dan moet men het verschil dezer kegels nemen, doch dit heeft geen invloed op de verg. (9) en hare beteekenis.

Wanneer men begint met op deze laatste wijze de vergelijking (9) af te leiden, dan kan men hiervan opklimmen tot de voorgaande uitdrukkingen (8), (7) en (6), vervolgens overgaan tot het geval van n°. 225, figuur 70, door zulk een driehoek als het verschil van twee driehoeken die om dezelfde zijde wentelen te beschouwen, hieruit weder de vergelijkingen (5) en (4) afleiden, om ten slotte ook het algemeen geval van n°. 224 te behandelen, waarbij men evenzoo de algemeene uitdrukking (1) met de daaraan verbonden beteekenis verkrijgt. Deze laatste uitdrukking geldt derhalve voor al de gevallen, waarin een driehoek wentelt om eene lijn, die in zijn vlak is gelegen.

229. Door gebruik te maken van eene enkele eenvoudige eigenschap uit de mechanica ¹⁾ kunnen wij aan de algemeene in n°. 224 gevonden eigenschap verdere uitbreiding geven.

Zij namelijk $ABC\dots$ (Fig. 73) een willekeurige vlakke veelhoek, die wentelt om eene in zijn vlak gelegen lijn PQ . Wanneer men den veelhoek op de gewone wijze verdeelt in driehoeken, dan is de bedoelde mechanische eigenschap deze: de som der producten, die men verkrijgt door den inhoud van elken driehoek te vermenigvuldigen met den afstand van zijn zwaartepunt tot eene willekeurige lijn, is gelijk aan den inhoud van den veelhoek vermenigvuldigd met den afstand van zijn zwaartepunt tot diezelfde lijn. Is nu S het zwaartepunt van den driehoek ABC , S_1 van den driehoek ADC enz. Z het zwaartepunt van den geheelen veelhoek, dan is volgens het bovenstaande:

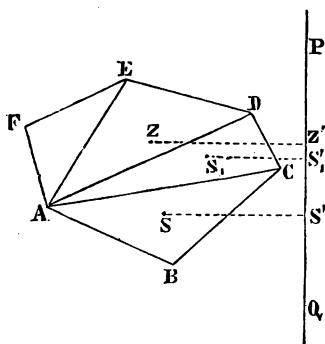


Fig. 73.

¹⁾ Wie niet genegen mocht zijn van deze berekening op het gebied der mechanica gebruik te maken, kan gevoeglijk het gedeelte tusschen de strepen begrepen (n°. 229—231) overslaan, zonder aan het verband schade te doen.

$$\begin{aligned} I(\triangle ABC) &= \triangle ABC \times 2\pi SS' \\ I(\triangle ACD) &= \triangle ACD \times 2\pi S_1 S_1' \\ &\text{enz.} \qquad \qquad \qquad \text{enz.} \end{aligned}$$

$$I(\text{veelh. } ABC \dots) = 2\pi (\triangle ABC \times SS' + \triangle ACD \times S_1 S_1' + \text{enz.}) \quad \text{opg.}$$

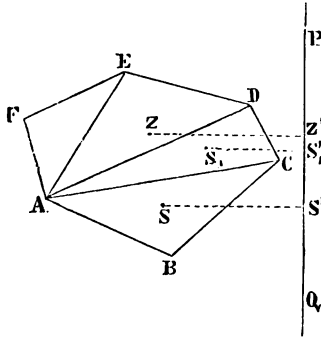


Fig. 73.

Maar volgens de genoemde eigenschap

$$\triangle ABC \times SS' + \triangle ACD \times S_1 S_1' + \text{enz.} = \text{veelh. } ABC \dots \times ZZ'$$

zijnde, wordt

$$I(\text{veelh. } ABC \dots) = \text{veelh. } ABC \dots \times ZZ'.$$

Hieruit blijkt, dat de inhoud van elk omwentelingslichaam, dat ontstaat door de wenteling van een veelhoek, wordt verkregen door den inhoud der vlakke figuur te vermenigvuldigen met den omtrek des cirkels, die door haar zwaartepunt wordt beschreven.

Deze eigenschap, onafhankelijk zijnde van het aantal en den stand der zijden, blijft van toepassing wanneer de veelhoek overgaat in eene gesloten kromme lijn; zoodat zij geldt voor elk omwentelingslichaam. In deze beteekenis draagt zij den naam van *regel van GULDIN*.

230. Tot dezen regel behoort echter nog eene andere eigenschap, die betrekking heeft op het omwentelingsoppervlak, en hier voor de volledigheid vermelding verdient.

Wanneer men uit het midden van al de zijden eens veelhoeks loodlijnen laat vallen op eene rechte lijn als as, dan leert de mechanica, dat de som der producten, die men verkrijgt, door elke zijde

met de loodlijn van zijn middelpunt te vermenigvuldigen, gelijk is aan den omtrek des veelhoeks vermenigvuldigd met den afstand van het zwaartepunt van dien omtrek tot de as.

Bij de wenteling van den veelhoek $ABC\dots$ (Fig. 74) om de as be-

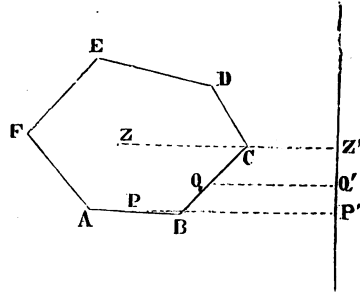


Fig. 74.

schrijven zijne zijden cylindervlakken, geheele of afgeknotte kegelvlakken. Zij P het midden van AB , Q van BC enz. dan is in alle gevallen (§ 22, n^o. 215 en verg. (7)):

$$O(AB) = AB \times 2\pi PP'$$

$$O(BC) = BC \times 2\pi QQ'$$

enz. enz.

opg.

$$O(ABC\dots) = 2\pi(AB \times PP' + BC \times QQ' + \dots)$$

$$= \text{omtrek. } ABC\dots \times 2\pi ZZ',$$

waarbij Z het zwaartepunt van den omtrek $ABC\dots$ voorstelt.

Deze eigenschap, blijkbaar weer geheel onafhankelijk zijnde van den aard des veelhoeks en zijn aantal zijden, wordt aldus uitgedrukt:

Wanneer eene figuur wentelt om eene lijn in zijn vlak, dan is het oppervlak van het omwentelingslichaam gelijk aan den omtrek der figuur vermenigvuldigd met den omtrek des cirkels, die door zijn zwaartepunt wordt beschreven.

Hiermede is de regel van GULDIN, die zulk een eenvoudig middel geeft om inhouden en oppervlakken van omwentelingslichamen te berekenen, in zijn geheel aangetoond.

231. Heeft eene figuur een middelpunt, dan is dit tevens het zwaartepunt van haar inhoud en ook van haar omtrek. Wanneer zulk eene figuur wentelt, dan verkrijgt men terstond den inhoud van het omwentelingslichaam door haar vlakken inhoud, en het omwen-

telingsoppervlak door haar omtrek, met den omtrek des cirkels door het middelpunt beschreven te vermenigvuldigen. Op deze eenvoudige wijze berekent men o. a. den inhoud en het oppervlak van den gewonen ring (§ 14, n°. 130) uit den straal des wentelenden cirkels en den afstand van zijn middelpunt tot de as.

232. Zij $PABCD$ (Fig. 75) eene willekeurige regelmatige figuur (I. § 20, n°. 168), die gewenteld wordt om de middellijn PQ van den

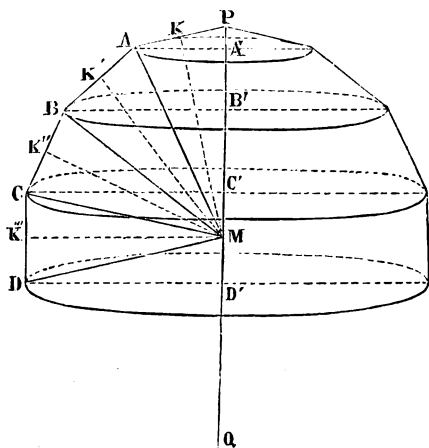


Fig. 75.

omgeschreven cirkel, behoorende tot een der uiteinden P , dan zullen wij het oppervlak en den inhoud van dit omwentelingslichaam berekenen.

De eerste zijde PA beschrijft een kegelvlak, de volgende zijden beschrijven afgeknotte kegelvlakken; mocht eene zijde evenwijdig loopen aan de as, dan beschrijft zij een cylindervlak. De loodlijnen $KM, K'M$ enz. die op het midden der zijden worden opgericht snijden allen (I. § 20) de as in het mid-

delpunt M , en zijn gelijk aan den straal des ingeschreven cirkels. Hierdoor kan met voordeel gebruik worden gemaakt van de wijze waarop in n°. 216 van § 22 het oppervlak des afgeknotten kegels is bepaald. Zij namelijk de straal van den ingeschreven cirkel r , en trekt men uit al de hoekpunten loodlijnen $AA', BB',$ enz. op de as PQ , dan vindt men volgens formule (8) van n°. 216, die zoowel voor het oppervlak van den afgeknotten als van den geheelen kegel en cylinder geldt:

$$O(PA) = PA' \times 2\pi r$$

$$O(AB) = A'B' \times 2\pi r$$

$$O(BC) = B'C' \times 2\pi r$$

opg.

$$O(PABCD) = PD' \times 2\pi r \dots \dots \dots (11)$$

waarin PD' de geheele hoogte voorstelt.

233 Verdeelen wij verder de wentelende figuur in driehoeken, door

al de hoekpunten met het middelpunt te vereenigen, dan is volgens het geleerde in n°. 225 en 226

$$I(\triangle PMA) = O(PA) \times \frac{1}{3} r$$

$$I(\triangle AMB) = O(AB) \times \frac{1}{3} r$$

$$I(\triangle BMC) = O(BC) \times \frac{1}{3} r$$

enz.

enz.

opg.

$$I(\text{fig. } PABCDM) = O(PABCD) \times \frac{1}{3} r \dots \dots (12)$$

De gevonden vergelijkingen (11) en (12) leeren:

Wanneer eene regelmatige vlakke figuur wentelt om de middellijn van eene harer uiteinden, dan is het oppervlak van dit omwentelingslichaam gelijk aan de hoogte vermenigvuldigd met den omtrek des ingeschreven cirkels; en de inhoud gelijk aan het oppervlak vermenigvuldigd met een derde van den straal des ingeschreven cirkels.

234. Brengt men de waarde voor O uit (11) in (12) over, dan wordt

$$I(\text{fig. } PABCDM) = \frac{2}{3} PD' \times \pi r^2 \dots \dots (13)$$

waaruit volgt, dat de genoemde inhoud ook verkregen wordt door den inhoud des ingeschreven cirkels te vermenigvuldigen met twee derden van de hoogte.

De vergelijkingen (11)—(13) zijn onafhankelijk van het aantal zijden der wentelende figuur en bevatten slechts den straal des ingeschreven cirkels en de hoogte.

235. Door de verkregen uitkomsten kan men gemakkelijk de inhouden en oppervlakken berekenen van de omwentelingslichamen, die ontstaan door de wenteling van geheelen of gedeelten van regelmatige veelhoeken om eene middellijn. Noemt men R den straal van den omgeschreven cirkel, dan is voor een geheelen veelhoek van een even aantal zijden:

$$PD' = 2R,$$

en derhalve volgens (11) en (13)

$$\left. \begin{aligned} O &= 4\pi r R \\ I &= \frac{4}{3}\pi r^2 R \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

zoodat men voor deze berekening slechts de stralen der om- en ingeschreven cirkels behoeft te kennen.

236. Wanneer eene wentelende figuur geen geheele maar slechts een gedeeltelijke omwenteling volbrengt, dan ontstaat een tweevlakkige sector van het omwentelingslichaam, waarbij de tweevlakkige hoek wordt gevormd door den eersten en laatsten stand van het vlak der figuur. De standhoek van dezen tweevlakkigen hoek bepaalt de

grootte van den tweevlakkigen sector, zoodat in hetzelfde omwentelingslichaam met gelijke tweevlakkige hoeken gelijke tweevlakkige sectoren overeenstemmen. Hieruit volgt, dat de inhouden en gebogen oppervlakken van tweevlakkige sectoren, gesneden uit hetzelfde omwentelingslichaam, evenredig zijn aan de standhoeken der tweevlakkige hoeken; en ook dat de inhoud en het oppervlak van een tweevlakkigen sector staat tot den inhoud en het oppervlak van het omwentelingslichaam, waaruit hij gesneden is, als zijn standhoek staat tot den standhoek eener geheele wenteling, dat is vier rechte hoeken.

§ 25.

Inhoud en oppervlak van den bol en zijne deelen.

237. De eigenschappen uitgedrukt in de vergelijkingen (11) en (12) der voorgaande paragraaf onafhankelijk zijnde van het aantal zijden der regelmatige figuur, dat tusschen hare uiteinden is begrepen, blijven bestaan, wanneer men dat aantal zijden meer en meer laat toenemen, totdat de regelmatige figuur overgaat in een cirkelboog. Deze cirkelboog beschrijft bij zijne wenteling het oppervlak van een bolvormig segment (§ 16, n°. 153); de straal van den ingeschreven cirkel wordt de straal des bols R , zijnde ook de straal van de groote cirkels des bols; de hoogte van de figuur wordt de hoogte H van het segment en zoo vindt men door middel van verg. (14)

$$O. \text{ bolv. segment} = H \times 2\pi R \dots\dots\dots (1)$$

dat is:

het gebogen oppervlak van een bolvormig segment is gelijk aan zijne hoogte vermenigvuldigd met den omtrek van den grooten cirkel des bols.

238. Het gedeelte PDM (Fig. 76) van den wentelenden regelmatigen veelhoek gaat door het toenemen van het aantal zijden over in een cirkelsector, die door zijne wenteling een kegelvormigen bolvormigen sector (§ 16, n°. 154) beschrijft. Zijn bolvormig oppervlak is het oppervlak van bovengenoemd segment en zoo vindt men door toepassing van verg. (12)

$$I. \text{ kegelv. bolv. sector} = O. \text{ segment} \times \frac{1}{3} R \dots\dots\dots (2)$$

zijnde in woorden:

de inhoud van een kegelvormigen bolvormigen sector

is gelijk aan zijn bolvormig oppervlak vermenigvuldigd met een derde van den straal des bols.

239. Laten wij nu zoowel van het bolvormig segment als van den sector de hoogte veranderen tot zij gelijk wordt aan den straal P M (Fig. 76) van den bol, dan gaan zij beide over in den halven bol P A A'. De vergelijkingen (1) en (2) geven dan

$$\text{O. halven bol} = 2 \pi R^2,$$

$$\text{I. halven bol} = O \times \frac{1}{3} R;$$

derhalve

$$\text{O. bol} = 4 \pi R^2 \dots \dots \dots (3)$$

$$\text{I. bol} = \text{O. bol} \times \frac{1}{3} R \dots \dots \dots (4)$$

waaruit men deze voorname eigenschappen leert kennen:

het oppervlak van een bol is gelijk aan viermaal den inhoud van een grooten cirkel; de inhoud van den bol is gelijk aan zijn oppervlak vermenigvuldigd met een derde van den straal.

240. Door de waarde van O uit verg. (3) in (4) over te brengen volgt

$$\text{I. bol} = \frac{4}{3} \pi R^3 \dots \dots \dots (5)$$

welke formule ook onmiddellijk uit verg. (14) der voorgaande paragraaf kan afgeleid worden. Wanneer men de middellijn des bols D noemt, derhalve $D = 2 R$ stelt, dan wordt

$$\text{I. bol.} = \frac{1}{6} \pi D^3 \dots \dots \dots (6)$$

Door de beide laatste formulën kan men gemakkelijk den inhoud des bols uit de lengte van zijn straal of middellijn berekenen.

241. Trekt men in het cirkelsegment P D D' de koorde P D, dan is volgens eene eigenschap des cirkels (I § 14, n°. 109):

$$P D^2 = P N \times P Q = H \times 2 R;$$

dit overbrengende in verg. (1) volgt

$$\text{O. bolv. segment} = \pi \cdot P D^2,$$

waaruit blijkt, dat het oppervlak van een bolvormig segment gelijk is aan den inhoud van den cirkel, die de koorde van den wentelenden cirkelboog tot straal heeft. In overeenstemming hiermede blijkt uit (3)

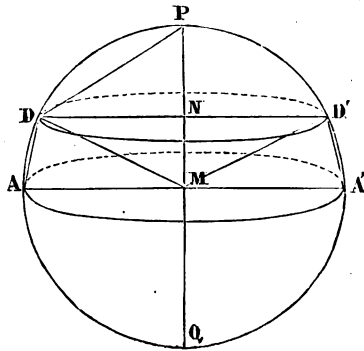


Fig. 76.

dat het oppervlak van den bol gelijk is aan den inhoud des cirkels, die zijn middellijn tot straal heeft; en ook dat het gebogen oppervlak van een halven bol tweemaal zoo groot is als het grondvlak.

242. In de vergelijkingen (1) en (2) zijn het gebogen oppervlak van het bolvormig segment en de inhoud van den kegelvormigen sector berekend; van zelve komt men hierdoor tot het onderzoek naar den inhoud van het eerste en het oppervlak van het tweede lichaam.

Het oppervlak van den sector bestaat uit de gebogen oppervlakken van een segment en van een omwentelingskegel, stelt men den straal $DN = r$, dan is

$$\text{O. segment} = 2\pi H \cdot R$$

$$\text{O. kegel} = \pi r R$$

$$\text{O. kegelv. sector} = 2\pi R \left(H + \frac{1}{2} r \right), \text{ opg.}$$

welke formule geschikt is voor de berekening, maar geene verdere bijzonderheden aanbiedt.

243. Om den inhoud van het bolvormig segment te bepalen, trekken wij den inhoud van den kegel $DM D'$ af van den inhoud des sectors $DM D'P$. Nu is

$$\text{I. kegel } DM D' = \frac{1}{3} MN \times \pi \cdot DN^2;$$

maar

$$MN = MP - NP = R - H,$$

en

$$DN^2 = NP \times NQ = H(2R - H), \dots \dots \dots (7)$$

derhalve

$$\text{I. kegel } DM D' = \frac{1}{3} \pi H (2R^2 + H^2 - 3RH).$$

Verder is volgens (1) en (2),

$$\text{I. kegelv. sector } DM D'P = \frac{2}{3} \pi H R^2,$$

waaruit volgt

$$\text{I. bolv. segment} = \text{I. sector} - \text{I. kegel} = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H) \cdot (8)$$

door welke formule de inhoud van het bolv. segment uit zijne hoogte en den straal des bols kan berekend worden.

244. Om het oppervlak van de bolvormige schijf (nº. 153) te berekenen beschouwen wij haar als het verschil van twee segmenten. Zij (Fig. 76) $PA A'$ het eene en PDD' het andere segment, dan is, volgens (1)

$$\text{O. segment P A A'} = \text{P M} \times 2 \pi R$$

$$\text{O. segment P D D'} = \text{P N} \times 2 \pi R$$

$$\text{O. schijf A D'} = \text{N M} \times 2 \pi R, \quad \text{afg.}$$

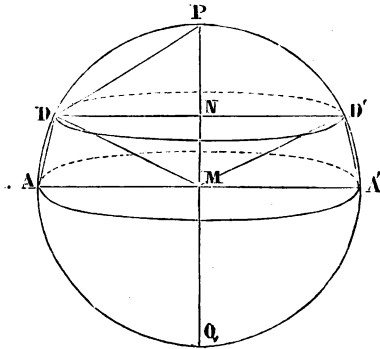


Fig. 76.

waaruit wij leeren, dat het gebogen oppervlak eener bolvormige schijf, even als dat van een segment, gelijk is aan hare hoogte vermenigvuldigd met den omtrek van een grooten cirkel.

In denzelfden bol hangt derhalve het gebogen oppervlak eener schijf slechts af van hare hoogte, dat is van den afstand harer evenwijdige vlakken, en niet van den stand dezer vlakken met betrekking tot het middelpunt des bols. Deelt men derhalve eene middellijn des bols in eenige gelijke deelen en brengt door de deelpunten vlakken loodrecht op die middellijn, dan zullen de stukken, waarin de bol op die wijze wordt verdeeld, gelijke gebogen oppervlakken bezitten.

245. Om den inhoud der schijf te berekenen, beschouwen wij haar weder als het verschil van twee segmenten en noemen de stralen van haar grond- en bovenvlak r en r' , hare hoogte h ; de hoogte van het grootste segment H en van het kleinste H' , dan is in de eerste plaats

$$H - H' = h.$$

Verder is volgens verg. (8):

$$\text{I. grootste segment} = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H)$$

$$\text{I. kleinste segment} = \frac{1}{3} \pi H'^2 (3R - H')$$

$$\begin{aligned} \text{I. bolv. schijf} &= \frac{1}{3} \pi [3R(H^2 - H'^2) - (H^3 - H'^3)] \\ &= \pi h [R(H + H') - \frac{1}{3}(H^2 + H'^2 + HH')]. \end{aligned} \quad \text{afg.}$$

Uit verg. (7) volgt:

$$r^2 = H (2R - H),$$

evenzoo

$$r'^2 = H' (2R - H'),$$

gevende

$$r^2 + r'^2 = 2R (H + H') - (H^2 + H'^2),$$

of

$$R (H + H') = \frac{1}{2} (r^2 + r'^2) + \frac{1}{2} (H^2 + H'^2).$$

Door substitutie hiervan wordt na eenvoudige herleiding:

$$\begin{aligned} \text{I. schijf} &= \pi h \left[\frac{1}{2} (r^2 + r'^2) + \frac{1}{6} (H^2 + H'^2 - 2H H') \right] \\ &= \frac{1}{6} \pi h (3r^2 + 3r'^2 + h^2) \\ &= \frac{1}{2} h \cdot \pi r^2 + \frac{1}{2} h \cdot \pi r'^2 + \frac{1}{6} \pi h^3. \quad \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

246. Door deze formule wordt de inhoud der schijf uitgedrukt in hare bepalende grootheden. Lettende op de beteekenis van elken term afzonderlijk kan men de formule op deze wijze voorstellen. Zij (Fig. 77) $A A' D D'$ de schijf, den cirkel $A A'$ tot grondvlak, den cirkel $D D'$ tot bovenvlak hebbende, dan stelt de eerste term van de uitdrukking (9) den inhoud voor van den rechten cylinder $A B A' B'$ die

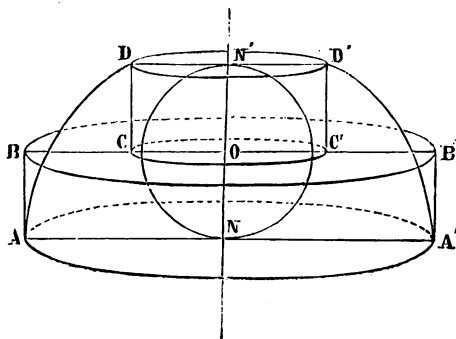


Fig. 77.

op het grondvlak der schijf staat en hare halve hoogte tot hoogte heeft; de tweede term is de inhoud van den rechten cylinder $C D C' D'$, die op het bovenvlak der schijf staat en dezelfde hoogte als de voorgaande bezit; de derde term stelt (volgens (6)) den inhoud voor van den bol $O N N'$, die de hoogte der schijf tot middellijn heeft. De som dezer drie lichamen geeft dus juist den inhoud der schijf.

247. Daar een segment ook kan beschouwd worden als eene schijf,

waarvan het bovenvlak nul is, zoo wordt de verg. (9) van toepassing op het segment, door den straal van het bovenvlak gelijk nul te stellen. Hierdoor verkrijgt men

$$\text{I. bolv. segm.} = \frac{1}{2} h \cdot \pi r^2 + \frac{1}{6} \pi h^3 \dots \dots \dots (10)$$

leerende, dat de inhoud van het bolvormig segment ook gelijk is aan de som van twee lichamen, nl. een bol, die zijne hoogte tot middel-lijn heeft en een cylinder, die op zijn grondvlak staat en zijne halve hoogte tot hoogte heeft. Het is niet moeilijk de vergelijkingen (8) en (10), die beide den inhoud van het segment maar in verschillende grootheden uitdrukken, uit elkander af te leiden.

248 Wanneer ter halver hoogte van eene bolvormige schijf een vlak wordt gebracht, dan is de doorsnede een cirkel, wiens straal r'' op de volgende wijze berekend wordt:

$$\begin{aligned} r''^2 &= R^2 - \left\{ R - \frac{1}{2} (H + H') \right\}^2 \\ &= R (H + H') - \frac{1}{4} (H + H')^2 \\ &= \frac{1}{2} (r^2 + r'^2) + \frac{1}{4} (H - H')^2 \\ &= \frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{2} r'^2 + \frac{1}{4} h^2. \end{aligned}$$

In verband met formule (9) geeft dit

$$\text{I. schijf} = \frac{1}{6} h (\pi r^2 + \pi r'^2 + 4 \pi r''^2);$$

zoodat de inhoud eener schijf ook gelijk is aan een zesde van de hoogte vermenigvuldigd met de som van grondvlak, bovenvlak en viermaal het middenvlak. Hieruit blijkt, dat de inhoud der schijf door dezelfde formule wordt voorgesteld als die van het prismoïde (zie § 21, n°. 203).

249. Neemt men uit de schijf (fig. 76) den afgeknotten kegel weg, waarvan het oppervlak ontstaat door de wenteling der koorde A D, dan blijft een ringvormig lichaam over, dat beschreven wordt door de wenteling van een cirkelsegment om eene lijn, die door zijn mid-delpunt wordt getrokken. De inhoud van dit omwentelingslichaam vindt men op de volgende wijze:

$$\text{I. schijf} \quad A D' = \frac{1}{6} \pi h (3 r^2 + 3 r'^2 + h^2)$$

$$\text{I. afgekn. kegel} \quad A D' = \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + r r')$$

afg.

$$\text{I. (segment A D)} = \frac{1}{6} \pi h \{ (r - r')^2 + h^2 \},$$

of, omdat in het rechthoekig trapezium A M N D de schuine zijde wordt berekend door de formule,

$$A D^2 = h^2 = (r - r')^2 + h^2,$$

wordt

$$\text{I. (segment A D)} = \frac{1}{6} h \cdot \pi h^2.$$

De inhoud van het genoemde ringvormig lichaam is derhalve gelijk aan den inhoud van den cirkel, die de koorde tot straal heeft, vermenigvuldigd met een zesde van de projectie dezer koorde op de as.

Loopt de koorde evenwijdig aan de as, dan is $h = k$, derhalve

$$I. (\text{segment } AD) = \frac{1}{6} \pi k^3,$$

zoodat in deze onderstelling de inhoud gelijk wordt aan dien van een bol, welke de koorde tot middellijn heeft.

250. Het oppervlak en de inhoud van een tweevlakkigen bolvormigen sector worden gemakkelijk bepaald door middel van de eigenschappen, die in n^o. 236 zijn afgeleid. Zooals bij alle omwentelingslichamen is ook bij den bol het oppervlak en de inhoud van een tweevlakkigen sector evenredig aan den standhoek (S), waaruit deze beide evenredigheden voortvloeien:

$$O. \text{ tweevl. sector: } O. \text{ bol} = S: 360^\circ \dots\dots\dots (11)$$

$$I. \text{ tweevl. sector: } I. \text{ bol} = S: 360^\circ \dots\dots\dots (12)$$

en dus ook

$$O. \text{ tweevl. sector: } O. \text{ bol} = I. \text{ tweevl. sector: } I. \text{ bol};$$

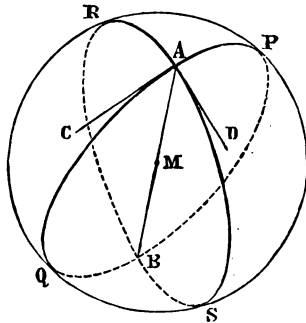


Fig. 47.

maar

$$I. \text{ bol} = O. \text{ bol} \times \frac{1}{3} R,$$

derhalve

$$I. \text{ tweevl. sector} = O. \text{ tweevl. sector} \times \frac{1}{3} R,$$

zoodat de inhoud van den tweevlakkigen bolvormigen sector wordt verkregen door het gebogen oppervlak met een derde van den straal des bols te vermenigvuldigen.

251. Stelt men in (11) volgens verg. (3)

$$O. bol = 4\pi R^2,$$

dan wordt

$$O. tweevl. sector = \frac{S}{360^\circ} \times 4\pi R^2, \dots \dots \dots (14)$$

en volgens (13)

$$I. tweevl. sector = \frac{S}{360^\circ} \times \frac{4}{3}\pi R^3, \dots \dots \dots (15)$$

door welke beide formules het oppervlak en de inhoud van den tweevlakkigen sector worden berekend uit den standhoek en den straal des bols. In § 16, n°. 155 is geleerd dat de standhoek van den tweevlakkigen bolvormigen sector A Q B S gelijk is aan den hoek A (Fig. 47), die door de groote cirkels in hun snijpunt wordt gevormd.

252. Wanneer men door eene middellijn van den bol eenige vlakken brengt, die achtereenvolgend gelijke hoeken met elkander maken, dan wordt het oppervlak van den bol in even zoo vele gelijke deelen verdeelt. Brengt men vervolgens loodrecht op diezelfde middellijn eenige vlakken op gelijken afstand van elkander, dan verdeelen ook deze het oppervlak in gelijke deelen (n°. 244), zoo dat dit stelsel meridiaanvlakken en parallelcirkels het oppervlak verdeelen in rechthoekige figuren, die alle gelijk oppervlak bezitten.

§ 26.

Oppervlak van den bolvormigen driehoek en veelhoek.

253. Wij komen nu tot de bepaling van het oppervlak van den bolvormigen driehoek en den lichamelijken inhoud van den drievlakkigen bolvormigen sector.

In § 17, n°. 160 is reeds opgemerkt, dat een bolvormige driehoek A B C (Fig. 48) met zijne drie aangelegene driehoeken A B C', A B' C, A' B C juist het halve oppervlak van den bol uitmaken. Want elk der vier genoemde driehoeken heeft zijn gelijken bij tegenoverstand, en de acht te zamen vormen het oppervlak van den bol. De driehoek A B C vormt met elk zijner aangelegene driehoeken een tweevlakkigen sector waarvan de hoek is een der hoeken A, B, C van den bolvormigen driehoek, en waarvan het oppervlak volgens verg. (14) der voorgaande paragraaf kan bepaald worden. Zoo vindt men, het oppervlak des bols O noemende en den tweevlakkigen sector aanduidende door de letters van de uiteinden zijner ribbe.

$$\triangle ABC + \triangle ABC' = O \text{ tweevl. sector } CC' = \frac{C}{360^\circ} \times O$$

$$\triangle ABC + \triangle AB'C = O \text{ tweevl. sector } BB' = \frac{B}{360^\circ} \times O$$

$$\triangle ABC + \triangle A'BC = O \text{ tweevl. sector } AA' = \frac{A}{360^\circ} \times O$$

$$3 \triangle ABC + \triangle ABC' + \triangle AB'C + \triangle A'BC = \frac{A+B+C}{360^\circ} \times O. \quad \text{opg.}$$

Nu is:

$$\triangle ABC + \triangle ABC' + \triangle AB'C + \triangle A'BC = \frac{1}{2} O,$$

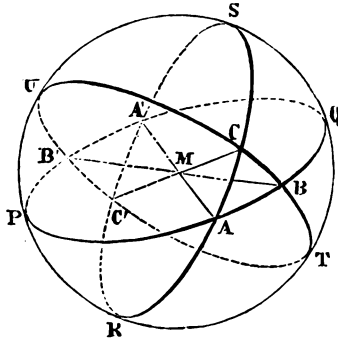


Fig. 48.

derhalve

$$2 \triangle ABC + \frac{1}{2} O = \frac{A+B+C}{360^\circ} \times O,$$

of:

$$2 \triangle ABC = \frac{A+B+C-180^\circ}{360^\circ} \times O,$$

en

$$\triangle ABC = \frac{A+B+C-180^\circ}{720^\circ} \times O; \dots\dots (16)$$

door deze formule kan het oppervlak des bolvormigen driehoeks uit de grootte zijner hoeken en het oppervlak van den bol berekend worden.

254. Daar (§ 17, n^o. 161) de overmaat van de som der hoeken

boven 180° het spherisch exces (E) van den bolvormigen driehoek is, zoo kan de laatste formule ook aldus geschreven worden

$$\triangle ABC = \frac{E}{90^\circ} \times \frac{1}{3} O \dots \dots \dots (17)$$

Schrijft men deze vergelijking in den vorm van eene evenredigheid, dan wordt

$$\triangle ABC : \frac{1}{3} O = E : 90^\circ,$$

dat is:

het oppervlak van een bolvormigen driehoek staat tot een achtste gedeelte van het oppervlak des bols als het spherisch exces van den driehoek staat tot een rechten hoek.

255. Op deze wijze blijkt, hoe op een bepaald bolvormig oppervlak het oppervlak eens driehoeks slechts afhangt van zijn spherisch exces. Het achtste gedeelte van het bolvormig oppervlak of octant is de bijzondere driehoek, welke drie rechte hoeken en drie rechte zijden heeft, en waarvan dus het spherisch exces gelijk is aan een rechte hoek. Dit in het oog houdende kan men de voorgaande evenredigheid ook aldus in woorden uitdrukken:

op denzelfden bol is het oppervlak van een driehoek evenredig aan zijn spherisch exces.

256. Stelt men voor O hare waarde uitgedrukt in den straal des bols, en drukt de hoeken uit door de lengte der overeenkomstige cirkelbogen voor den straal $= 1$, zoodat $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, dan wordt

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{E}{\frac{1}{2}\pi} \times \frac{1}{2}\pi R^2 \\ &= E \times R^2, \end{aligned}$$

en stelt men hierbij den straal van den bol gelijk aan de eenheid:

$$\triangle ABC = E, \dots \dots \dots (18)$$

zoodat in deze onderstellingen het oppervlak des driehoeks door hetzelfde getal wordt voorgesteld als zijn spherisch exces.

257. Verwisselt men in de voorgaande berekening het oppervlak van den bol met zijn inhoud, dan moet men ook voor het oppervlak des bolvormigen driehoeks den lichamelijken van den overeenkomstigen drievlakkigen sector nemen; verder blijft de berekening onveranderd. Hieruit volgt de evenredigheid

$$O. \text{ bolv. driehoek} : I. \text{ drievl. sector} = O. \text{ bol} : I. \text{ bol},$$

of

$$I. \text{ drievl. sector} = O. \text{ bolv. driehoek} \times \frac{1}{3} R,$$

en hierdoor kan men gemakkelijk den inhoud des drievlakkigen sectors uit zijn bolvormig oppervlak berekenen.

258. Het verdient opmerking, dat alle inhouden van bolvormige sectoren gevonden worden door hun bolvormig oppervlak te vermenigvuldigen met een derde van den straal des bols. Deze eigenschap is nog voor eenige uitbreiding vatbaar. Trekt men toch op het bolvormig oppervlak eene willekeurige gesloten figuur en beschouwt die als de richtlijn van een kegelvlak, welks top in het middelpunt van den bol ligt, dan snijdt dit vlak uit den bol een gedeelte dat men in het algemeen een sector kan noemen; nu is de inhoud van zulk een sector altijd gelijk aan het bolvormig oppervlak vermenigvuldigd met een derde gedeelte van den straal des bols. Want de sector kan beschouwd worden als een samenstel van zeer kleine kegels, die alle het middelpunt tot top hebben en tot grondvlak een zeer klein gedeelte van het bolvormig oppervlak; waaruit volgt dat hunne hoogte is de straal van den bol. Ieder kegeltje heeft tot inhoud zijn klein

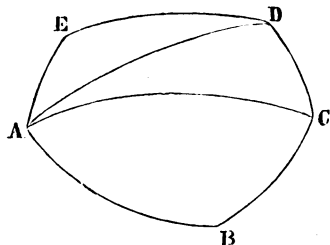


Fig. 78.

bolvormig grondvlak vermenigvuldigd met een derde van den straal; dus is ook de inhoud van den geheelen sector gelijk aan zijn bolvormig vlak vermenigvuldigd met een derde van den straal, zoo als is gezegd.

259. Nemen wij nu een bolvormigen n -hoek $A B C D E$ (Fig. 78) en verdeelen hem in $n - 2$ driehoeken door de bolvormige diagonalen uit een der hoekpunten A te trekken.

Om het oppervlak van den veelhoek

te vinden berekenen wij de oppervlakken der driehoeken en tellen die op, als volgt:

$$\triangle A B C = \frac{\angle C A B + \angle B + \angle A C B - 180^\circ}{90^\circ} \times \frac{1}{3} O$$

$$\triangle A C D = \frac{\angle C A D + \angle A C D + \angle C D A - 180^\circ}{90^\circ} \times \frac{1}{3} O$$

enz.

enz.

opg.

$$O. \text{ bolv. } n\text{-hoek} = \frac{\text{som der hoeken} - (n - 2) \cdot 180^\circ}{90^\circ} \times \frac{1}{3} O.$$

Nu is (§ 17, n^o. 167) in den bolvormigen veelhoek de overmaat van de som der hoeken boven de som der hoeken van den gelijknamigen veelhoek zijn spherisch exces, derhalve:

$$\text{Som der hoeken} - (n - 2) \cdot 180^\circ = E.$$

Hierdoor wordt

$$O. \text{ bolv. veelhoek} = \frac{E}{R} \times \frac{1}{8} O.$$

zoodat het oppervlak van den bolvormigen veelhoek op dezelfde wijze wordt berekend als dat van den driehoek. Is de straal van den bol de eenheid en zijn de hoeken in lengte uitgedrukt, dan verkrijgt men als voren de eenvoudige formule

$$O. \text{ bolv. veelhoek} = E;$$

terwijl in verband met de eigenschap van n°. 258 thans zoo algemeen mogelijk kan gesteld worden:

op denzelfden bol is het oppervlak van een bolvormigen drie- of veelhoek evenredig aan zijn spherisch excès.

De inhoud van den drie- of veelvlakkigen sector wordt verkregen door het gebogen oppervlak met een derde van den straal des bols te vermenigvuldigen.

Hierin liggen alle in deze paragraaf verkregen uitkomsten opgesloten.

259. Vroeger (§ 21, n°. 207) is aangetoond, dat de inhouden van gelijkvormige veelvlakkige lichamen zich verhouden als de derde machten der gelijkstandige lijnen. Deze eigenschap kan na het geleerde in de laatste paragrafen op de volgende wijze over alle gelijkvormige lichamen hoe ook begrensd uitgestrekt worden. Uitgaande van de grondstellingen:

1°. alle lichamelijke inhouden worden uitgedrukt door een term of de som van meer termen, die van den derden graad zijn, wanneer de lijnen als van den eersten graad worden aangenomen;

2°. alle oppervlakken worden uitgedrukt door een term of de som van meer termen, die van den tweeden graad zijn in dezelfde onderstelling;

3°. in gelijkvormige lichamen zijn alle gelijkstandige lijnen evenredig;

komt men tot deze besluiten:

1°. de inhouden van gelijkvormige lichamen hoe ook begrensd zijn evenredig aan de derde machten der gelijkstandige lijnen;

2°. de oppervlakken van gelijkvormige lichamen en figuren in de ruimte zijn evenredig aan de tweede machten der gelijkstandige lijnen;

3^o. van gelijkvormige lichamen zijn de tweede machten der inhouden evenredig aan de derde machten der oppervlakken.

260. Voornamelijk toepassingen dezer eigenschappen zijn onder andere de volgende bijzondere gevallen:

de inhouden van bollen zijn evenredig aan de derde machten, en hunne oppervlakken aan de tweede machten van hunne stralen of middellijnen;

de inhouden van bollen zijn evenredig aan de vierkantswortels uit de derde machten van hunne oppervlakken;

de inhouden van gelijkvormige cylinders of kegels zijn evenredig aan de derde machten, en hunne oppervlakken aan de tweede machten van de hoogten en van de stralen der grondvlakken.

AANHANGSEL.

OVER DE REGELMATIGE LICHAMEN.

261. In § 12 n°. 111 is aangetoond dat er slechts vijf regelmatige lichamen zijn, en tevens aangewezen hoe zij ontstaan en welke eigenschappen zij bezitten. Wij wenschen nu nog door berekening het verband optesporen, dat tusschen de voorname elementen van elk lichaam bestaat. Daartoe zullen wij gebruik maken van de rechtlijnige en bolvormige driehoeksmeting; en dit is de reden waarom die berekening in een aanhangsel is opgenomen, daar voor het overige de gewone meetkunde onafhankelijk is van de driehoeksmeting. Ook is het wel mogelijk zonder deze de berekeningen aangaande de regelmatige lichamen te volbrengen, doch dan vervalt men in een ingewikkeld samenstel van formules, dat geheel vermeden kan worden door gebruik te maken van de eenvoudigste regelen der driehoeksmeting.

262. In § 17 n°. 172 is reeds aangetoond, dat om en in elk regelmatig lichaam een bol kan beschreven worden, zoodanig dat al de hoekpunten van het lichaam in het oppervlak gelegen zijn. Laat men uit het middelpunt van dien omgeschreven bol loodlijnen neer op de zijvlakken van het lichaam dan hebben zij alle dezelfde lengte, zoodat een bolvormig oppervlak met die loodlijn als straal beschreven al de zijvlakken aanraakt.

263. Verdeelen wij verder het lichaam in pyramiden, die alle het middelpunt van den bol tot top hebben en een zijvlak tot grondvlak, dan zijn deze pyramiden regelmatig, en onderling gelijk en gelijkvormig. De inhoud van zulk eene pyramide is gelijk aan het grondvlak vermenigvuldigd met een derde van den straal des ingeschreven bols, zoodat de inhoud van het regelmatige lichaam gevonden wordt door zijn geheel oppervlak te vermenigvuldigen met een derde van genoemden straal.

264. Zij de ribbe van het regelmatig lichaam $= a$, en stellen wij verder:

het aantal vlakken of ribben in elk hoekpunt samenkomende $= m$,

het aantal ribben van elk zijvlak $= n$,

den straal van den in elk zijvlak beschreven cirkel $= r$,

den straal van den omgeschreven bol $= R$,

den straal van den ingeschreven bol $= r$,

den standhoek van de zijvlakken op elke ribbe $= S$,

dan worden de betrekkingen tusschen deze grootheden op de volgende wijze gevonden.

Zij AB (Fig. 79) eene ribbe van het regelmatig lichaam, terwijl

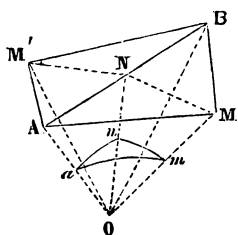


Fig. 79.

M en M' de middelpunten voorstellen van

de zijvlakken, die volgens de ribben AB

samenkomen. Brengen wij door M en M'

een vlak OMM' loodrecht op AB , dat

deze lijn in N snijdt; verder door AB een

vlak AOB loodrecht op het eerstgenoemde,

dan zal op de doorsnede dezer beide vlak-

ken het middelpunt O van de om- en inge-

schreven bol zijn gelegen. Verder is OM

de straal van den ingeschreven bol, OA

die van den omgeschreven bol; $MN = M'N$

de straal r der zijvlakken, $\angle MNM'$ de standhoek der zijvlakken, die door het vlak AOB midden door wordt gedeeld.

AM en NM beide loodrecht staande op OM is $\angle AMN$ de standhoek der vlakken AOB en NOB . Nu is

$$\angle AMB = \frac{2\pi}{n},$$

derhalve

$$\angle AMN = \frac{\pi}{n},$$

en daar

$$AN = \frac{1}{2} a,$$

zoo is in den rechthoekigen driehoek ANM ,

$$MN = r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n}, \dots \dots \dots (1)$$

$$MA = \frac{1}{2} a \operatorname{cosec} \frac{\pi}{n}.$$

265. Beschouwen wij nu den drielakkigen hoek $OANM$ en

beschrijven daarin tot gemak voor de berekening met een straal $= 1$ een bolvormigen driehoek anm , dan is in dezen driehoek:

$$\angle n = \frac{\pi}{2},$$

omdat de vlakken AON en MON loodrecht op elkander staan;

verder
$$\angle m = \angle AMN = \frac{\pi}{n};$$

en
$$\begin{aligned} \angle a &= \text{standhoek der vlakken } MAO, NAO \\ &= \frac{1}{2} \text{ standhoek der vlakken } MAO, M'AO \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{m} = \frac{\pi}{m}, \end{aligned}$$

omdat om het hoekpunt A zooveel middelpunten M zijn gelegen als er ribben in dit hoekpunt samenkomen. Derhalve zijn in den recht-hoekigen bolvormigen driehoek anm gegeven de beide scheeve hoeken, waaruit de zijden moeten berekend worden.

266. Dit geschiedt door de formules 1):

$$\cos am = \cos AOM = \cot a \cot m = \cot \frac{\pi}{m} \cot \frac{\pi}{n},$$

$$\cos an = \cos AON = \frac{\cos m}{\sin a} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{m}},$$

$$\cos mn = \cos MON = \frac{\cos a}{\sin m} = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}}.$$

Nu is

$$\angle MNO = \frac{1}{2} \angle MNM' = \frac{1}{2} S = \frac{\pi}{2} - \angle MON;$$

derhalve

$$\sin \frac{1}{2} S = \cos mn = \frac{\cos \frac{\pi}{m}}{\sin \frac{\pi}{n}} \dots \dots \dots (2)$$

Verder is in $\triangle NOM$

$$OM = MN \tan MNO,$$

dat is volgens (1)

$$r = \frac{1}{2} a \cot \frac{\pi}{n} \tan \frac{1}{2} S. \dots \dots \dots (3)$$

1) Zie o. a. LOBATO'S leerboek der driehoeksmeting 4^e druk § XV, IV^e Geval.

Eindelijk is in $\triangle AOM$:

$$OA = OM \sec AOM,$$

gevende

$$R = \frac{r}{\cos u m} = r \tan \frac{\pi}{m} \tan \frac{\pi}{n}. \quad (4)$$

of in verband met (3)

$$R = \frac{1}{2} a \tan \frac{\pi}{m} \tan \frac{1}{2} S. \quad (5)$$

Door de formules (1) — (5) worden de grootheden r , S , R , r berekend uit de bekende grootheden a , m , n .

267. Om vervolgens den inhoud van een regelmatig lichaam uit te drukken in de lengte der ribben, berekent men eerst het oppervlak als volgt. Het aantal zijvlakken z van een regelmatig lichaam uitgedrukt in m en n is (volgens verg. (4) § 12 n^o. 109)

$$z = \frac{4m}{2n + 2m - nm} = \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}};$$

de inhoud van één zijvlak is:

$$v = \frac{1}{2} n a \times r = \frac{1}{4} n a^2 \cot \frac{\pi}{n};$$

het geheele oppervlak is dus

$$O = z v = \frac{a^2 \cot \frac{\pi}{n}}{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1}, \dots \dots \dots (6)$$

en hieruit vindt men voor den inhoud des lichaams

$$I = \frac{1}{3} O r = \frac{\frac{1}{12} a^3 \cot^2 \frac{\pi}{n} \tan \frac{1}{2} S}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}}, \dots \dots \dots (7)$$

zoodat nu alle grootheden, die bij een regelmatig lichaam in aanmerking komen, zijn berekend.

268. Substitueert men achtereenvolgens voor m en n de overeenkomstige waarden volgens het tafeltje in § 12 n^o. 115, dan verkrijgt men al de elementen der vijf regelmatige lichamen.

Voor het gemakkelijk overzicht laten wij hier een tafeltje volgen van de waarde van al deze grootheden uitgedrukt in de lengte der ribbe, berekend volgens de formules (1) — (7).

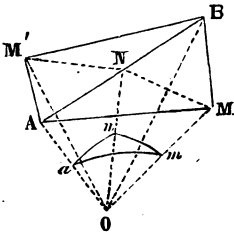


Fig. 79.

	n	m	r	R	r	O	I	S
Vierflak...	3	3	$\frac{1}{2} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{6}$	$\frac{1}{12} a \sqrt{6}$	$a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$	$70^\circ 31' 44''$
Zesflak...	4	3	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{2} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a$	$6 a^2$	a^3	90°
Achtflak...	3	4	$\frac{1}{2} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{2}$	$\frac{1}{6} a \sqrt{6}$	$2 a^2 \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a^2 \sqrt{2}$	$109^\circ 28' 16''$
Twaalfvlak.	5	3	$\frac{1}{4} a \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sqrt{5}}$	$\frac{1}{2} a (\sqrt{3} + \sqrt{15})$	$\frac{1}{10} a \sqrt{250 + 110\sqrt{5}}$	$3 a^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$	$\frac{1}{4} a^3 (15 + 7\sqrt{5})$	$116^\circ 33' 54''$
Twintigvlak.	3	5	$\frac{1}{6} a \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} a \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{12} a (3\sqrt{3} + \sqrt{15})$	$5 a^2 \sqrt{3}$	$\frac{5}{12} a^3 (3 + \sqrt{5})$	$138^\circ 11' 23''$

269. Uit form. (4) blijkt, dat de verhouding $\frac{R}{r}$ niet verandert, wanneer m en n onderling verwisseld worden. Derhalve is voor elke twee verwante regelmatige lichamen (§ 12 n°. 109) de genoemde verhouding dezelfde, zoodat, wanneer zij in eenzelfde bol zijn beschreven, zij ook een gemeenschappelijken ingeschreven bol bezitten. Dit wordt bevestigd door de waarden uit het voorgaand tafeltje.

270. Is de straal eens bols gegeven en wil men de ribbe van het ingeschreven regelmatig lichaam vinden, dan moet a in R worden uitgedrukt. Dit geeft:

$$\text{ribbe viervlak} = \frac{4}{\sqrt{6}} R = \frac{2}{3} R \sqrt{6},$$

$$\text{ribbe zesvlak} = \frac{2}{\sqrt{3}} R = \frac{2}{3} R \sqrt{3},$$

$$\text{ribbe achtvlak} = \frac{2}{\sqrt{2}} R = R \sqrt{2},$$

$$\text{ribbe twaalfvlak} = \frac{4}{\sqrt{3} + \sqrt{15}} R = \frac{1}{3} R (\sqrt{15} - \sqrt{3}),$$

$$\text{ribbe twintigvlak} = \frac{4}{\sqrt{10} + 2\sqrt{5}} R = R \sqrt{2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}}.$$

271. Het is niet moeilijk deze lengten te construeeren.

Zij namelijk (Fig. 80) AM de straal des bols, ADB een groote cirkel; verdeelt men dan de middellijn AB door de punten C' en E' in drie gelijke deelen, zet in de deelpunten de loodlijnen $C'C$ en $E'E$ en ook in M de loodlijn MD op AB , dan is:

$$AC = \sqrt{2R \cdot \frac{1}{3}R} = \frac{2}{3} R \sqrt{6} = \text{ribbe viervlak},$$

$$AD = \sqrt{2R \cdot R} = R \sqrt{2} = \text{ribbe achtvlak},$$

$$AE = \sqrt{2R \cdot \frac{2}{3}R} = \frac{2}{3} R \sqrt{3} = \text{ribbe zesvlak}.$$

Verdeelt men verder AE in F in uiterste en middelste reden, dan is het grootste stuk (I § 19 n°. 158):

$$AF = \frac{1}{2} AE (\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{3} R (\sqrt{15} - \sqrt{3}) = \text{ribbe twaalfvlak}.$$

Neemt men eindelijk AI loodrecht op en gelijk aan AB , trekt de lijn MI , die den cirkel in G snijdt, dan vindt men gemakkelijk:

$$AG = R\sqrt{2 - \frac{2}{3}\sqrt{5}} = \text{ribbe twintigvlak.}$$

Evenzoo kan men de ribben der regelmatige lichamen uitdrukken in den straal des ingeschreven bols en daarna deze lijnen construeeren; hetgeen ter oefening aan den lezer blijft overgelaten.

272. Door middel van het tafeltje van n^o. 268 kan men nog het volgende ook uit een geschiedkundig oogpunt merkwaardige vraagstuk oplossen: in een bol, die de eenheid tot straal heeft, is een regelmatig viervlak beschreven, daarin een bol, daarin een regelmatig zesvlak, dan weer een bol, daarin een regelmatig achthvlak, en zoo vervolgens met al de regelmatige lichamen; nu wordt gevraagd de lengte van de stralen der vijf ingeschreven bollen en van de ribben der regelmatige lichamen.

Men zal vinden:

Straal bol	$= 1$
Ribbe viervlak	$= \frac{1}{3}\sqrt{6}$
Straal bol	$= \frac{1}{3}$
Ribbe zesvlak	$= \frac{2}{3}\sqrt{3}$
Straal bol	$= \frac{1}{9}\sqrt{3}$
Ribbe achthvlak	$= \frac{1}{9}\sqrt{6}$
Straal bol	$= \frac{1}{9}$
Ribbe twaalfvlak	$= \frac{1}{17}(\sqrt{15} - \sqrt{3})$
Straal bol	$= \frac{1}{135}\sqrt{(75 + 30\sqrt{5})}$
Ribbe twintigvlak	$= \frac{1}{135}(5\sqrt{3} + \sqrt{15})$
Straal bol	$= \frac{1}{135}(5 + 2\sqrt{5})$

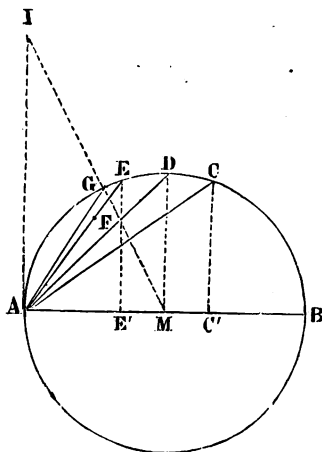


Fig. 80.

