



Over dit boek

Dit is een digitale kopie van een boek dat al generaties lang op bibliotheekplanken heeft gestaan, maar nu zorgvuldig is gescand door Google. Dat doen we omdat we alle boeken ter wereld online beschikbaar willen maken.

Dit boek is zo oud dat het auteursrecht erop is verlopen, zodat het boek nu deel uitmaakt van het publieke domein. Een boek dat tot het publieke domein behoort, is een boek dat nooit onder het auteursrecht is gevallen, of waarvan de wettelijke auteursrechttermijn is verlopen. Het kan per land verschillen of een boek tot het publieke domein behoort. Boeken in het publieke domein zijn een stem uit het verleden. Ze vormen een bron van geschiedenis, cultuur en kennis die anders moeilijk te verkrijgen zou zijn.

Aantekeningen, opmerkingen en andere kanttekeningen die in het origineel stonden, worden weergegeven in dit bestand, als herinnering aan de lange reis die het boek heeft gemaakt van uitgever naar bibliotheek, en uiteindelijk naar u.

Richtlijnen voor gebruik

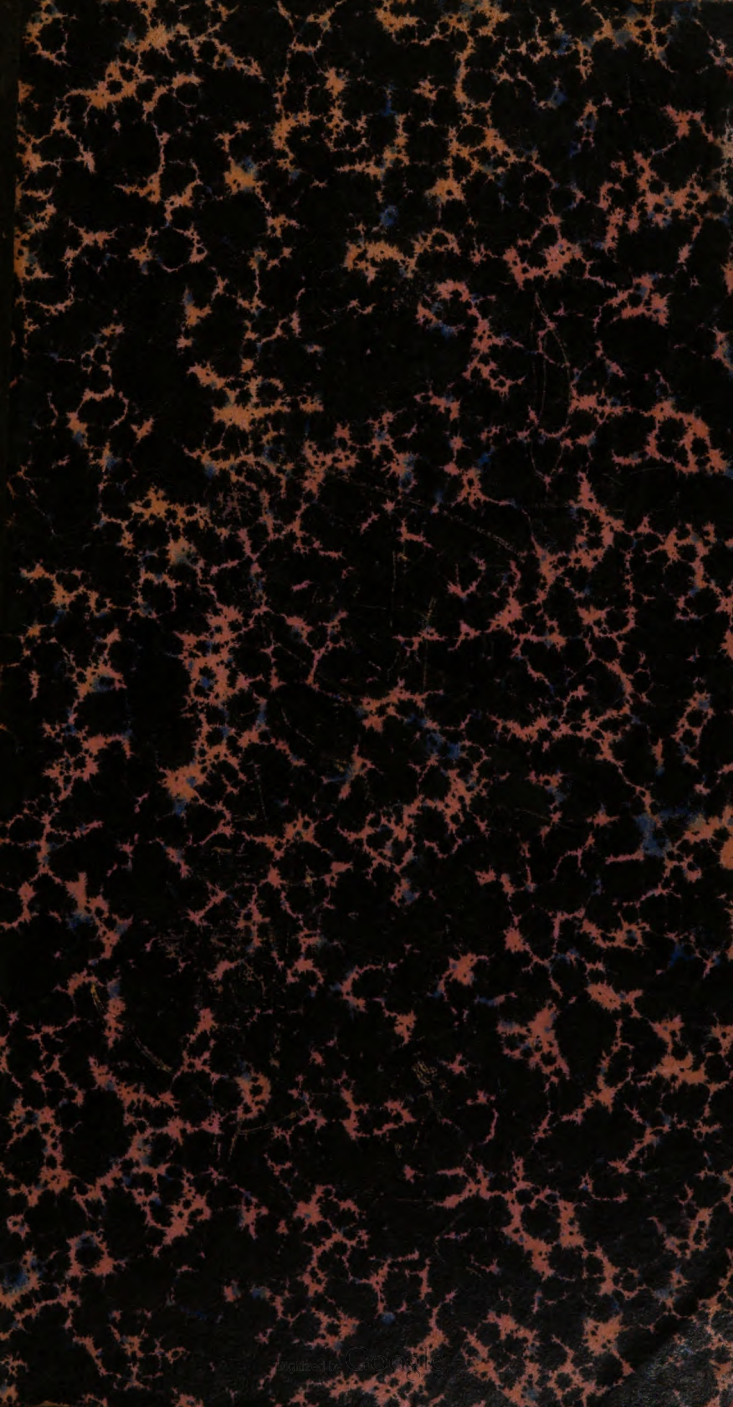
Google werkt samen met bibliotheken om materiaal uit het publieke domein te digitaliseren, zodat het voor iedereen beschikbaar wordt. Boeken uit het publieke domein behoren toe aan het publiek; wij bewaren ze alleen. Dit is echter een kostbaar proces. Om deze dienst te kunnen blijven leveren, hebben we maatregelen genomen om misbruik door commerciële partijen te voorkomen, zoals het plaatsen van technische beperkingen op automatisch zoeken.

Verder vragen we u het volgende:

- + *Gebruik de bestanden alleen voor niet-commerciële doeleinden* We hebben Zoeken naar boeken met Google ontworpen voor gebruik door individuen. We vragen u deze bestanden alleen te gebruiken voor persoonlijke en niet-commerciële doeleinden.
- + *Voer geen geautomatiseerde zoekopdrachten uit* Stuur geen geautomatiseerde zoekopdrachten naar het systeem van Google. Als u onderzoek doet naar computervertalingen, optische tekenherkenning of andere wetenschapsgebieden waarbij u toegang nodig heeft tot grote hoeveelheden tekst, kunt u contact met ons opnemen. We raden u aan hiervoor materiaal uit het publieke domein te gebruiken, en kunnen u misschien hiermee van dienst zijn.
- + *Laat de eigendomsverklaring staan* Het “watermerk” van Google dat u onder aan elk bestand ziet, dient om mensen informatie over het project te geven, en ze te helpen extra materiaal te vinden met Zoeken naar boeken met Google. Verwijder dit watermerk niet.
- + *Houd u aan de wet* Wat u ook doet, houd er rekening mee dat u er zelf verantwoordelijk voor bent dat alles wat u doet legaal is. U kunt er niet van uitgaan dat wanneer een werk beschikbaar lijkt te zijn voor het publieke domein in de Verenigde Staten, het ook publiek domein is voor gebruikers in andere landen. Of er nog auteursrecht op een boek rust, verschilt per land. We kunnen u niet vertellen wat u in uw geval met een bepaald boek mag doen. Neem niet zomaar aan dat u een boek overal ter wereld op allerlei manieren kunt gebruiken, wanneer het eenmaal in Zoeken naar boeken met Google staat. De wettelijke aansprakelijkheid voor auteursrechten is behoorlijk streng.

Informatie over Zoeken naar boeken met Google

Het doel van Google is om alle informatie wereldwijd toegankelijk en bruikbaar te maken. Zoeken naar boeken met Google helpt lezers boeken uit allerlei landen te ontdekken, en helpt auteurs en uitgevers om een nieuw leespubliek te bereiken. U kunt de volledige tekst van dit boek doorzoeken op het web via <http://books.google.com>



7

BIBL. SEM. PHIL. S. J.
PROV. NEERL.

120507390

Bibliotheek
R.U. Limburg

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK RU LIMBURG

0371 4852

BESCHRIJVENDE MEETKUNST.

WISKUNDIGE LEERCURSUS

TEN GEBRUIKE DER

KONINKLIJKE MILITAIRE AKADEMIE.

G R O N D E N

DER

BESCHRIJVENDE MEETKUNST,

VOOR DE

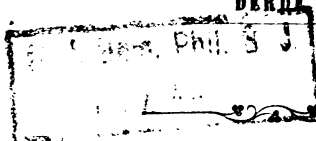
KADETTEN VAN ALLE WAPENEN.

DOOR

J. BADON GHJBEN,

Oud-Hoogleraar aan genoemde Akademie.

DERDE DRUK.



W
R $\bar{x}$
1.

TE BREDA,

TER DRUKKERIJ VAN BROESE & COMP.,

VOOR REKENING VAN DE

KONINKLIJKE MILITAIRE AKADEMIE.

1 8 6 9.

x

21143



[Handwritten signature]

INHOUD

VAN HET EERSTE GEDEELTE.

Inleiding.

	Bladz.
§ 1. Alleen vlakke figuren kunnen eigenlijk platte teekeningen zijn	1.
§ 2. Figuren in de ruimte door platte teekeningen aan te duiden, en daaruit door constructiën de bijzonderheden dier figuren af te leiden, is het doel van de <i>Beschrijvende Meetkunst</i> ,	2.
§ 3. Het vlak van teekening is hierbij uit minstens twee platte vlakken zamengesteld, die op één geslagen eene <i>constructiefiguur</i> daarstellen	2.
§ 4. Het bepalen van punten, lijnen en vlakken, door eene constructiefiguur, maakt de <i>Leerwijze der projectiën</i> uit	3.

Leerwijze der projectiën.

§ 5. Wat men door het <i>projecteren</i> , de <i>projectie</i> en de <i>projecterende lijn van een punt</i> verstaat; alsmede wat men een <i>projectievlak</i> noemt	4.
§ 6. Een punt wordt door zijne projectie op één vlak niet bepaald; men neemt dus twee projectievlakken aan ..	4.
§ 7. Deze zijn een <i>horizontaal</i> en een <i>verticaal vlak</i> , wier doorsnede de <i>as van projectie</i> is. Onderscheiding van <i>horizontale</i> en <i>verticale projectiën</i> , van <i>horizontaal-</i> en <i>verticaal-projecterende lijnen</i>	5.
<i>Noot.</i> Over het min juiste dezer benamingen	5.

*

§ 8.	De beide projectiën bepalen een punt volkomen ...	6.
§ 9.	De loodlijnen, uit de beide projectiën van een punt op de as neergelaten, hebben een gemeenschappelijk voetpunt, en zijn gelijk aan de afstanden van het punt tot de projectievlakken.....	6.
§ 10.	Willekeurig gekozen punten in de projectievlakken zijn geenszins de beide projectiën van een punt ..	6.
§ 11.	Punten, in de projectievlakken gelegen, hebben ééne projectie in de as. Overigens vallen de projectiën aan deze of gene zijde van de as, naargelang de punten aan deze of gene zijde der projectievlakken liggen.....	6.
§ 12.	Hoe, na het projecteren van punten, eene <i>constructiefiguur</i> ontstaat.....	7.
§ 13.	In eene constructiefiguur liggen de beide projectiën van een punt altijd in ééne loodlijn op de as. Wat de afstand dier projectiën tot de as aanwijst.	8.
§ 14.	In eene constructiefiguur moet men de horizontale en verticale projectiën door een kenmerk onderscheiden. Men gebruikt daartoe enkele en dubbele accenten.....	8.
§ 15.	In die figuur kunnen de beide projectiën van een punt elkander bedekken.....	9.
§ 16.	Hoe men een punt in de ruimte opnoemt, welks projectiën in de constructiefiguur door letters zijn aangewezen.....	10.
§ 17.	Hoe de projectiën van een punt zich in de constructiefiguur voordoen, voor elk der bijzondere standen die het punt hebben kan.....	10.
§ 18.	Wat men door de <i>projectie en het projecterend vlak van eene rechte of kromme lijn</i> verstaat. De projectie is de doorsnede van het projecterend vlak met het projectievlak.....	10.
§ 19.	De projectie eener kromme lijn is in het algemeen wederom eene kromme lijn, maar kan in een bijzonder geval eene rechte lijn wezen.....	11.
§ 20.	De projectie van eene vlakke kromme lijn, ook die van eene vlakke figuur, is gelijk en gelijkvormig met	

	de figuur zelf, als haar vlak evenwijdig met het projectievlak is	11.
§ 21.	De projectie eener regte lijn is in het algemeen wederom eene regte lijn, maar kan in een bijzonder geval een enkel punt zijn	12.
§ 22.	Om de projectie eener regte lijn te verkrijgen, heeft men slechts twee van hare punten te projecteren. Of slechts één punt, als haar snijpunt met het projectievlak bekend is	12.
§ 23.	Eene lijn van bepaalde lengte is bij schuinen stand langer dan hare projectie; bij evenwijdigen stand is zij er gelijk aan. Het verlengde der projectie, is de projectie van het verlengde der lijn	12.
§ 24.	Eene lijn, die in het projectievlak ligt, is zelf hare projectie	13.
§ 25.	Eene regte of kromme lijn wordt door hare projectie op één vlak niet bepaald, tenzij die projectie een enkel punt mogt wezen.	13.
§ 26.	Dus bepaalt men haar door <i>eene horizontale en eene verticale projectie</i> ; zij heeft dan <i>een horizontaal-projecterend en een verticaal-projecterend vlak</i>	13.
Noot.	Over het min juiste dezer benamingen	14.
§ 27.	Deze beide projectiën bepalen eene lijn volkomen, één bijzonder geval uitgezonderd. Zijn de beide projectiën regte lijnen, dan is de lijn in de ruimte het ook	14.
§ 28.	Zoo eene lijn in het eene projectievlak ligt, valt hare projectie op het andere in de as.	14.
§ 29.	Eene lijn wordt door hare horizontale en verticale projectiën niet bepaald, als zij ligt in een vlak dat loodregt op de as staat.	14.
§ 30.	Hoe de beide projectiën eener regte lijn vallen, als zij loodregt op een der projectievlakken is.	15.
§ 31.	Hoe zij vallen als de regte lijn evenwijdig met een of met beide de projectievlakken loopt.	15.
§ 32.	Welken invloed het op de projectiën eener regte lijn heeft, als die lijn een der projectievlakken, of ook de as, snijdt	16.

- § 33. Welke rechte of kromme lijnen men, in de beide projectievlakken, als projectiën van eene rechte of kromme lijn in de ruimte, mag aannemen..... 16.
- § 34. In eene constructiefiguur onderscheidt men ook de beide projectiën van lijnen door accenten. Hoe men eene lijn in de ruimte opnoemt, wier projectiën in de constructiefiguur door letters zijn aangewezen.... 18.
- § 35. Hoe zich de projectiën eener rechte lijn in de constructiefiguur voordoen, voor de verschillende bijzondere standen, die de lijn hebben kan..... 19.
- § 36. In de constructiefiguur kunnen twee willekeurige rechte lijnen, mits niet loodrecht op de as, altijd de beide projectiën eener lijn zijn, mits de lijn en hare projectiën onbepaald verlengd gedacht worden..... 20.
- § 37. Wat men door de projectiën van een veelhoek, — van een veelvlakkelig ligchaam, — verstaat. Hoe het echter noodig blijft platte en gebogen vlakken door de projectievlakken voor te stellen, hetgeen vooreerst slechts ten aanzien van platte vlakken zal verklaard worden..... 21.
- Noot.* Door de woorden vlak en lijn zal in 't vervolg stilzwijgend een plat vlak, eene rechte lijn verstaan worden..... 21.
- § 38. Het kan geen nut of beteekenis hebben, een vlak, even als eene lijn, door middel van al zijne punten te projecteren..... 21.
- § 39. Men bepaalt een vlak door zijne doorsneden met de projectievlakken; deze heeten *de doorgangen van het vlak*, en worden in *horizontale en verticale doorgang* onderscheiden..... 22.
- Noot.* Over deze benamingen..... 22.
- § 40. De beide doorgangen van een vlak, dat niet evenwijdig met de as is, snijden de as in hetzelfde punt.
- § 41. Een vlak, dat evenwijdig met een der projectievlakken is, heeft éénen doorgang evenwijdig met de as, terwijl de andere doorgang ontbreekt 23.
- § 42. Andere vlakken, die evenwijdig met de as zijn, hebben hunne beide doorgangen evenwijdig met de as..... 23.

§ 43. Een vlak, dat loodregt op één, of op beide de projectievlakken is, heeft ook éenen of beide doorgangen loodregt op de as.....	24.
§ 44. Van een vlak, dat door de as gaat, is de as zelf gelijktijdig de horizontale en verticale doorgang, en het vlak is dan niet bepaald	24.
§ 45. Welke lijnen men in de projectievlakken als doorgangen van een vlak kan aannemen	24.
§ 46. In eene constructiefiguur moeten weder de beide doorgangen van een vlak door een kenmerk onderscheiden worden; dit geschiedt nogmaals door accenten, die wij bij den voet der letters zullen plaatsen. Hoe men een vlak in de ruimte opnoemt, welks doorgangen door letters in de constructiefiguur zijn aangewezen.....	24.
§ 47. Hoe zich de doorgangen van een vlak in de constructiefiguur voordoen, voor de verschillende standen, die een vlak hebben kan.....	25.
§ 48. Hoezeer meestal in de figuur slechts de deelen der doorgangen geteekend worden, die aan ééne zijde van de as liggen, moet men zich die doorgangen als door de as heen verlengd voorstellen. De beide doorgangen kunnen elkander dan bedekken	26.
§ 49. Wat voortaan door het gegeven zijn, en door het vinden, van een punt, van eene lijn, van een vlak, zal verstaan worden	27.
§ 50. De waterpasse stand van een der projectievlakken is geen vereischte. Hoe men diensvolgens het horizontale en verticale vlak met elkander verwisselen kan.	27.
§ 51. Men neemt dikwijls nog <i>een derde projectievlak</i> aan; een punt, eene lijn, een vlak hebben dan daarop <i>eene derde projectie, een derden doorgang</i>	27.
§ 52. Uit de horizontale en verticale projectiën van een punt of doorgangen van een vlak, kan de derde projectie of doorgang gevonden worden.....	28.
§ 53. Hoe men, na een derde projectievlak aangenomen te hebben, uit de drie projectievlakken eene constructiefiguur samenstelt	28.

§ 54. Hoe men in de constructiefiguur een derde projectievlak aanneemt, en daarop de derde projectie, of den derden doorgang, van een punt of van een vlak bepaalt	29.
§ 55. Opheldering van dit bepalen, voor verschillende standen van het punt of van het vlak.....	30.
§ 56. Hoe de derde projectie van eene rechte lijn gevonden wordt	31.
§ 57. Hoe de derde doorgang gevonden wordt van een vlak, dat door de as gaat en door een gegeven punt bepaald is.....	32.
§ 58. Het derde projectievlak bepaalt eene lijn of een vlak, in de vroeger aangewezen gevallen van uitzondering.	32.
§ 59. Men heeft eene vrije keuze in de plaats, wáár men het derde projectievlak wil aannemen.....	32.
§ 60. Na de verklaarde leerwijze der projectiën kunnen de voornaamste werkstukken over de rechte lijn en het platte vlak volgen. Hierbij zullen nog enkele stellingen voor te dragen zijn. In welken zin daarin het woord <i>gelijknamig</i> zal gebezigd worden.....	33.
<i>Noot.</i> De stellingen uit de gewone Meetkunst worden bij den lezer bekend ondersteld.....	33.

Oplossing van werkstukken, met betrekking tot de rechte lijn en het platte vlak.

§ 61. <i>Werkstukken.</i> 1°. De verticale projectie van een punt te vinden, als de horizontale projectie en de hoogte of diepte gegeven zijn. 2°. De horizontale projectie van een punt te vinden, als de verticale, en de afstand vóór of achter het verticale vlak, gegeven zijn. 3°. De beide projectiën van een punt te vinden, als zijne afstanden tot de projectievlakken bekend zijn..	33.
§ 62. <i>Stelling.</i> Wanneer een punt in eene lijn ligt, ligt de projectie van het punt in de gelijknamige projectie van de lijn.....	34.
§ 63. <i>Werkstuk.</i> Door twee gegebene punten, eene onbepaaldelijk verlengde rechte lijn te trekken.....	34.

Bladz.

§ 64. <i>Werkstuk.</i> In eene gegevene lijn, een willekeurig punt aan te nemen.....	34.
§ 65. <i>Werkstuk.</i> In eene gegevene lijn een punt te vinden, dat op eene gegevene hoogte boven het horizontale vlak ligt.....	35.
§ 66. <i>Werkstuk.</i> In eene gegevene lijn een punt te vinden, dat op gelijke afstanden van het horizontale en verticale vlak ligt.....	36.
§ 67. <i>Werkstuk.</i> De beide projecterende vlakken eener gegevene lijn te construeren.....	37.
§ 68. <i>Werkstuk.</i> De ontmoetingspunten van eene gegevene lijn met het horizontale en verticale vlak te construeren.	37.
§ 69. <i>Werkstuk.</i> Den afstand van twee gegeven punten te construeren	39.
Dit geschiedt op drie manieren, in de onderstelling, dat de beide punten boven het horizontale vlak liggen.	39.
Ook op drie manieren, in de onderstelling, dat de punten aan weerszijden van het horizontale vlak gelegen zijn.	41.
§ 70. <i>Werkstuk.</i> Het horizontaal-projecterend vlak eener gegevene lijn, om zijn horizontalen doorgang, op het horizontale vlak neer te slaan, en daarna weder op te rigten.....	43.
§ 71. <i>Werkstuk.</i> Den hoek te vinden, waaronder eene gegevene lijn het horizontale vlak snijdt	44.
§ 72. <i>Werkstuk.</i> Eene gegevene lijn van bepaalde lengte in eene gegevene reden te verdeelen.....	45.
§ 73. <i>Werkstuk.</i> In eene gegevene lijn een punt te vinden, dat van een gegeven punt in die lijn, op een gegeven afstand verwijderd is.....	46.
§ 74. <i>Werkstuk.</i> De verticale projectie eener lijn te vinden, als, behalve den hoek dien zij met het horizontale vlak maakt, hare horizontale projectie, en daarin haar snijpunt met het horizontale vlak, gegeven is .	46.
§ 75. <i>Stelling.</i> Wanneer twee lijnen elkander in de ruimte snijden, zullen hare gelijknamige projectiën of elkander snijden of in elkander vallen.....	47.
Kenmerk, waaraan men ziet of twee lijnen elkander snijden of niet.....	47.

§ 76. <i>Stelling.</i> Wanneer twee lijnen in de ruimte evenwijdig zijn, zullen hare gelijknamige projectiën (mits geene enkele punten zijnde) of evenwijdig loopen, of langs elkander vallen	48.
Kenmerk voor de evenwijdigheid van twee lijnen ..	48.
§ 77. Kenmerk, waaraan men ziet of twee lijnen elkander kruissen.....	49.
§ 78. <i>Werkstuk.</i> Den hoek te construeren, waaronder twee gegevene lijnen elkander snijden.....	49.
Eenvoudige constructie van dit werkstuk, met toepassing op de vraag: om den hoek van twee gegevene lijnen middendoor te deelen.....	50.
§ 79. <i>Werkstuk.</i> Door een gegeven punt, eene lijn evenwijdig met eene gegevene lijn te trekken	50.
§ 80. <i>Stelling.</i> Wanneer twee vlakken evenwijdig zijn, zullen ook hunne gelijknamige doorgangen evenwijdig loopen.....	51.
Kenmerk voor de evenwijdigheid van twee vlakken..	51.
§ 81. <i>Werkstuk.</i> De gemeene doorsnede van twee gegevene vlakken te construeren.....	51.
De oplossing geschiedt in vier verschillende onderstellingen	52.
§ 82. <i>Werkstuk.</i> Een vlak gegeven zijnde, begeert men eene lijn te vinden, die hetzij in dat vlak ligt, hetzij er evenwijdig mede loopt.....	54.
§ 83. <i>Werkstuk.</i> Het snijpunt van eene gegevene lijn met een gegeven vlak te vinden.....	54.
<i>Noot.</i> De verwijzing, naar het omwisselen der projectievlakken, zal verder aan den lezer worden overgelaten.	56.
§ 84. <i>Werkstuk.</i> Het snijpunt van drie gegevene vlakken te vinden.....	56.
De oplossing wordt op twee manieren aangewezen...	56.
§ 85. <i>Werkstuk.</i> De verticale projectie te vinden van een punt, dat in een gegeven vlak ligt, indien de horizontale projectie van dat punt aangenomen is.....	57.
Uit de oplossing blijkt: Hoe men in een gegeven vlak een punt aanneemt; hoe men onderzoekt of een punt in een vlak ligt; hoe men den tweeden door-	

gang van een vlak vindt, als de andere doorgang, benevens een punt van het vlak, gegeven is.....	58.
§ 86. <i>Werkstuk.</i> Door een gegeven punt een vlak te brengen, dat evenwijdig is met een gegeven vlak.....	58.
§ 87. <i>Werkstuk.</i> Den standhoek te construeren van een gegeven vlak met het horizontale.	60.
§ 88. Andere constructie voor dit werkstuk....	61.
§ 89. <i>Werkstuk.</i> Den verticalen doorgang van een vlak te construeren, indien zijn horizontale doorgang en zijn standhoek met het horizontale vlak gegeven zijn.....	61.
§ 90. <i>Werkstuk.</i> Een gegeven vlak om zijn horizontalen doorgang op het horizontale vlak neer te slaan, en weder op te rigten....	62.
§ 91. De oplossing van dit werkstuk is eenvoudiger, als het vlak loodregt op het verticale staat	64.
§ 92. Die meerdere eenvoudigheid kan ook in andere gevallen verkregen worden.....	65.
§ 93. Door het neerslaan leert men de ware gedaante van geprojecteerde vlakke figuren kennen.....	66.
§ 94. Over het neerslaan van lijnen in de vlakken gelegen.	67.
§ 95. <i>Werkstuk.</i> Den afstand van twee evenwijdige vlakken te construeren.....	67.
§ 96. <i>Werkstuk.</i> Een vlak gegeven zijnde, een daarmede evenwijdig vlak op een gegeven afstand te vinden..	68.
§ 97. <i>Werkstuk.</i> Door twee elckander snijdende lijnen een vlak te brengen	68.
Door dit werkstuk kan ook de vraag opgelost worden: om den hoek van twee lijnen te vinden.....	69.
§ 98. <i>Werkstuk.</i> Door twee evenwijdige lijnen een vlak te brengen.	69.
Toepassing op de vraag: om den afstand van twee evenwijdige lijnen te vinden.....	70.
§ 99. <i>Werkstuk.</i> Door eene gegevene lijn en een gegeven punt een vlak te brengen.	70.
Toepassing op de vraag: om uit een gegeven punt eene lijn te trekken, die eene gegevene lijn onder een gegeven hoek snijdt.....	70.

§ 100. <i>Werkstuk</i> Door drie gegebene punten een vlak te brengen.....	71.
§ 101. <i>Werkstuk</i> . Door eene gegebene lijn een vlak te brengen, dat evenwijdig is met eene andere gegebene lijn, die de eerste kruist.....	72.
§ 102. <i>Stelling</i> . Wanneer eene lijn en een vlak loodregt op elkander staan, zullen ook de projectiën der lijn loodregt op de gelijknamige doorgangen van het vlak zijn.....	72.
Kenmerk voor den onderling loodregten stand van eene lijn en een vlak.....	73.
§ 103. <i>Werkstuk</i> . Door een gegeven punt een vlak te brengen, dat loodregt op eene gegebene lijn is.....	73.
§ 104. Eenvoudiger constructie voor dit werkstuk.....	74.
§ 105. Het leert tevens: op eene gegebene lijn, in een punt van die lijn, een loodregt vlak te stellen.....	75.
§ 106. <i>Werkstuk</i> . Den afstand van een gegeven punt tot eene gegebene lijn te vinden.....	75.
§ 107. <i>Werkstuk</i> . Uit een gegeven punt van een gegeven vlak, eene loodlijn op dat vlak op te rigten.....	76.
§ 108. <i>Werkstuk</i> . Uit een gegeven punt buiten een gegeven vlak, eene loodlijn op dat vlak neer te laten, en de lengte van die loodlijn te vinden.....	76.
§ 109. Eenvoudiger constructie voor dit werkstuk.....	77.
§ 110. <i>Werkstuk</i> . De nieuwe projectiën van een gegeven punt te vinden, indien een gegeven vlak als nieuw horizontaal vlak wordt aangenomen.....	78.
§ 111. Hoe de nieuwe projectiën van eene lijn, van een veelhoek of van een veelvlakkelig ligchaam gevonden worden. Alsmede de nieuwe doorgangen van een vlak.....	80.
§ 112. <i>Werkstuk</i> . Den standhoek van twee gegeven vlakken te construeren.....	81.
§ 113. <i>Werkstuk</i> . Den hoek van twee gegeven vlakken middendoor te deelen.....	83.
§ 114. <i>Werkstuk</i> . Door eene gegebene lijn in een gegeven vlak, een ander vlak te brengen, dat met het gegebene een' gegeven hoek maakt.....	84.

	Bladz.
§ 115. <i>Werkstuk</i> Door eene gegebene lijn een vlak te brengen, dat met het horizontale vlak een' gegeven hoek maakt.....	84.
§ 116. <i>Werkstuk.</i> Door eene gegebene lijn, buiten een gegeven vlak, een ander vlak te brengen, dat met het gegebene een' gegeven hoek maakt.....	86.
§ 117. <i>Werkstuk.</i> Den horizontalen doorgang van een vlak te vinden, als zijn verticale doorgang, en zijn standhoek met het horizontale vlak, gegeven zijn.....	86.
§ 118. <i>Werkstuk.</i> Den kortsten afstand van twee elkaander kruissende lijnen te construeren.....	87.
§ 119. Eenvoudige constructie van dit werkstuk, voor een bijzonder geval. Met toepassing op de vraag: om in eene gegebene lijn het punt te vinden, dat het digtst bij de as is.....	88.
§ 120. Hoe men het algemeene werkstuk tot het beschouwde bijzondere geval terugbrengt. Voorbeeld van het aan nemen en aanwenden van nieuwe projectievlakken..	89.

Oplossing van werkstukken met betrekking tot den drielakkigen hoek.

§ 121. De beschrijvende Meetkunst leert de onbekende zijden en hoeken van een oolvormigen driehoek uit de bekende construeren. Hierbij komen zes gevallen voor.....	90.
§ 122. Deze constructiën worden door middel van de overeenkomstige drielakkige hoeken verrigt. Door den supplementairen drielakkigen hoek, worden de zes voorkomende gevallen tot drie beperkt.....	90.
§ 123. <i>Werkstuk.</i> De standhoeken van een drielakkigen hoek te construeren, indien zijne vlakke hoeken gegeven zijn.....	91.
Deze constructie heeft <i>den ontwikkelden drielakkigen hoek</i> tot grondslag.	91.
§ 124. Hoe men zich bij dit werkstuk gedragen kan, als de gegevens niet allen scherp zijn. Nut hierbij van <i>een auxiliairen drielakkigen hoek</i> te trekken.....	93.

§ 125. Beschouwing van het bijzondere geval dat onder de gegevens een scherpe, een rechte en een stompe hoek is	95.
§ 126. <i>Werkstuk.</i> De vlakke hoeken eens drievlakkigen hoeks gegeven zijnde, begeert men den hoek te construeren, dien eene ribbe met het overstaande zijvlak maakt	95.
§ 127. <i>Werkstuk.</i> Een hoek tot den horizon te herleiden.	96.
<i>Noot.</i> Over de beteekenis van dit werkstuk	96.
§ 128. Aanwijzing hoe de constructie geschieden kan, indien de beenen van den hoek anders gerigt zijn, dan aanvankelijk ondersteld werd	97.
§ 129. <i>Werkstuk.</i> Van een drievlakkigen hoek, twee vlakke hoeken met den ingesloten standhoek gegeven zijnde, begeert men den derden vlakken hoek te construeren	98.
§ 130. Opmerking voor het geval, dat de gegevene vlakke hoeken in het voorgaande werkstuk, beide of een van beide stomp mogten zijn	99.
§ 131. <i>Werkstuk.</i> Van een drievlakkigen hoek, twee vlakke hoeken met den standhoek over een hunner gegeven zijnde, begeert men den derden vlakken hoek te construeren	99.
§ 132. <i>Werkstukken.</i> 1°. De vlakke hoeken van een drievlakkigen hoek te construeren, indien zijne standhoeken gegeven zijn. 2°. Van een drievlakkigen hoek, twee standhoeken met den tusschenliggenden vlakken hoek gegeven zijnde, begeert men den derden standhoek en de overige vlakke hoeken te construeren. 3°. Van een drievlakkigen hoek, twee standhoeken met een zijvlak over een hunner gegeven zijnde, begeert men den derden standhoek en de overige zijvlakken te construeren	102.
§ 133. <i>Werkstuk.</i> Een drievlakkigen hoek te ontwikkelen, indien een zijvlak met de aangrenzende standhoeken gegeven zijn	102.

*Het projecteren van veelolakkige lichamen, en
het ontwikkelen hunner oppervlakken.*

- § 134. In de projectiën van een ligchaam kunnen sommige ribben onzichtbaar zijn. Wat men *ontwikkelbare* oppervlakken noemt. Die der veelvlakkige lichamen zijn ontwikkelbaar. Wat men dan door *het ontwikkelen van het oppervlak des ligchaams* verstaat..... 104.
- § 135. De projectiën en ontwikkelde oppervlakken moeten wederkeerig uit elkander kunnen gevonden worden. De weg, tot het projecteren te volgen, hangt van de gegevens en van den stand des ligchaams af... 105.
- § 136. *Werkstuk.* Een veelhoek, die op het horizontale vlak ligt, wordt om een zijner diagonalen gewenteld, tot dat zijn vlak een' gegeven hoek met het horizontale vlak maakt. Men begeert de projectiën van dien veelhoek, in zijn nieuwen stand, te vinden..... 105.
- § 137. *Werkstuk.* Eene op het horizontale vlak gelegene kromlijnige figuur beweegt zich, om eene in dat vlak getrokken lijn, zoolang opwaarts, tot dat haar vlak een' gegeven hoek met het horizontale vlak maakt. Men begeert, in dien nieuwen stand, hare projectiën te vinden..... 106.
- § 138. Opmerkingen nopens de projectiën van koorden, in de kromme lijn van het voorgaande werkstuk getrokken..... 107.
- § 139. Hoe men, als de kromme lijn van het voorgaande werkstuk een cirkel is, hare projectiën kan bepalen. 108.
- § 140. *Werkstuk.* De projectiën te construeren van een cirkel, wiens middelpunt, as en straal gegeven zijn.. 109.
- § 141. *Stelling.* Wanneer eene geslotene vlakke figuur op een ander vlak geprojecteerd wordt, is de inhoud der projectie gelijk aan den inhoud der figuur zelf vermenigvuldigd met den Cosinus van den hoek, dien haar vlak met het projectievlak maakt..... 110.
- § 142. *Stelling.* Wanneer eene geslotene vlakke figuur op drie onderling regthoekige vlakken geprojecteerd

- wordt, is de tweede magt van den inhoud der figuur gelijk aan de som van de tweede magten van de inhouden der drie projectiën..... 111.
- § 143. Deze stelling, op *eene regthoekige driehoekige piramide* toegepast, leert eene eigenschap kennen, die met het *Theorema van PYTHAGORAS* overeenkomt.... 111.
- § 144. *Werkstuk*. Eene driehoekige piramide te projecteren, indien hare zes ribben gegeven zijn..... 112.
- § 145. *Werkstuk*. Eene gegevene piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, wordt schuin afgeknot door een snijdend vlak, loodrecht op het verticale genomen. Men begeert de projectie en de ware gedaante der doorsnede te construeren; gelijk mede het opstand oppervlak van de geheele en van de afgeknotte piramide te ontwikkelen..... 113.
- § 146. *Werkstuk*. Eenen cubus in verschillende standen te projecteren..... 114.
- § 147. De projectie van een cubus, op een vlak dat loodrecht op zijn diagonaal staat, vertoont een regelmatigen zeshoek. Hoe men hier de lengte van de ribbe en van hare projectie, uit elkander, door constructie en door berekening, kan vinden 115.
- § 148. *Werkstuk*. Eene afgeknotte driehoekige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, en waarvan de horizontale projectie en de hoogte gegeven zijn, wordt om eene ribbe van het grondvlak omgewenteld, zoodat het aan die ribbe sluitende opstaande zijvlak op het horizontale vlak komt te liggen. Men wil hare horizontale projectie in dien nieuwen stand vinden 116.

Over den bol, en oplossing van daartoe behorende werkstukken.

- § 149. Hoe men een' bol in eene constructiefiguur voorstelt, en wat men diensvolgens *de projectiën van den bol* noemt..... 117.
- Noot*. Over het min juiste dezer benaming..... 118.

Bladz.

- § 150. *Werkstuk.* De doorsnede van een bol met een plat vlak te construeren 119.
- § 151. Wijziging van het voorgaande werkstuk, voor bijzondere standen van het snijvende vlak 120.
- § 152. *Werkstuk.* De snijpunten van eene lijn met het oppervlak eens bols te vinden 121.
- § 153. *Werkstuk.* Indien de horizontale projectie van een punt van het oppervlak eens bols gegeven is, begeert men de verticale projectie van dat punt te vinden. 122.
- § 154. *Werkstuk.* De doorsnede van twee bollen te construeren 123.
- § 155. Door het voorgaande werkstuk leert men ook, uit een gegeven punt als middelpunt een' bol te beschrijven, die een' gegeven bol raakt 124.
- § 156. *Werkstuk.* De doorsnede van drie bollen te construeren 125.
- § 157. *Werkstuk.* Den bol te construeren, wiens oppervlak door vier gegevene punten gaat 126.
- § 158. Geval waarin de oplossing van het voorgaande werkstuk zeer eenvoudig is 126.
- § 159. Wat men door een *omhullingskegel* of *omhullingscilinder* van een bol verstaat; wat daarbij de *aanrakingscirkel* is. Over de gemeenschappelijke omhullingskegels of cilinders van twee bollen 127.
- § 160. *Werkstuk.* Uit een punt buiten een bol, eene raaklijn aan den bol te trekken 129.
Uit dit werkstuk volgt ook, hoe men den aanrakingscirkel van een omhullingskegel, met gegeven top, construeren kan 130.
- § 161. *Werkstuk.* De projectiën van twee bollen gegeven zijnde, begeert men de toppen hunner gemeenschappelijke omhullingskegels te vinden 130.
- § 162. *Werkstuk.* Door een gegeven punt van het oppervlak eens bols, een rakend vlak aan dien bol te brengen 131.
- § 163. *Werkstuk.* Van een vlak, dat eenen bol raakt, de horizontale doorgang gegeven zijnde, wil men den verticalen vinden 131.

§ 164. Uit het voorgaande werkstuk leert men terstond: door eene lijn in het horizontale vlak, een vlak te brengen, dat een' gegeven bol volgens een kleinen cirkel van gegevene grootte snijdt	132.
§ 165. <i>Werkstuk.</i> Door eene gegevene lijn een vlak te bren- gen, dat een' gegeven bol raakt.....	132.
§ 166. Verschillende andere wijzen, waarop het voorgaande werkstuk kan opgelost worden. Eenvoudige con- structie van MONGE.....	134.
§ 167. <i>Werkstuk.</i> Een en bol te bepalen, die twee gegevene vlakken raakt, en zijn middelpunt in de as van projectie heeft.....	135.
§ 168. <i>Werkstuk.</i> Door een gegeven punt een vlak te bren- gen, dat twee gegeven bollen raakt.....	135.
§ 169. <i>Werkstuk.</i> Een vlak te construeren, dat drie gege- ven bollen raakt..... Als een bijzonder geval hiervan, wordt het vlak geconstrueerd, rustende op drie bollen, die op het horizontale vlak liggen.....	136. 137.
§ 170. Opmerkingen over de afscheiding van de zichtbare en onzichtbare gedeelten der projectiën van cirkels, die zich op het oppervlak eens bols bevinden.....	138.

WERKSTUKKEN TOT OEFENING.

1 tot 22. Over de regte lijn en het platte vlak.....	140.
23 en 24. Over den drievlakkigen hoek.....	142.
25 tot 30. Over het projecteren en ontwikkelen.....	142.
31 tot 48. Over den bol.....	143.

INHOUD

VAN HET TWEEDE GEDEELTE.

*Over de kromme lijnen, hare raaklijnen, normalen
en normale vlakken.*

Bladz.

- § 171. Onderscheiding der *kromme lijnen van enkele en dubbele kromming*. Die van dubbele kromming hebben altijd kromlijnige projectiën..... 145.
- § 172. Onder welk beding men kromme of regte lijnen als projectiën eener kromme lijn in de ruimte kan aannemen. Noodige voorzorg om bij geslotene kromme lijnen dubbelzinnigheid te vermijden..... 145.
- § 173. De bepaling eener kromme lijn geeft aanleiding tot het vinden harer projectiën, of ook tot constructiën, waarbij men hare projectiën niet noodig heeft. Zij wordt echter slechts als gegeven beschouwd, zoo hare projectiën gegeven zijn..... 146.
- § 174. *Werkstuk*. In eene gegebene kromme lijn, een willekeurig punt aan te nemen..... 147.
- § 175. *Werkstuk*. 'Te onderzoeken of eene gegebene kromme lijn al dan niet eene vlakke kromme lijn is..... 147.
- § 176. *Werkstuk*. De verticale projectie eener vlakke kromme lijn te construeren, indien hare horizontale projectie en de doorgangen van haar vlak gegeven zijn..... 148.
- § 177. *Werkstuk*. De snijpunten van eene gegebene kromme lijn met de projectievlakken te vinden..... 148.
- § 178. *Werkstuk*. Het snijpunt van eene gegebene kromme lijn met een gegeven vlak te vinden..... 149.
- § 179. In welk geval de beide voorgaande werkstukken niet beperkt zijn tot het deel der kromme lijn, dat in de constructiefiguur afgeteekend staat..... 150.
- § 180. *Werkstuk*. De projectiën van een cirkelhoog en de doorgangen van een vlak zóó gegeven zijnde, dat het vlak niet door dien boog, maar wel door den voltooiden omtrek gesneden wordt, begeert men deze snijpunten te construeren..... 150.

**

- § 181. Wat in het algemeen door eene *raaklijn* aan eene kromme lijn verstaan wordt. Elk punt eener kromme lijn heeft zijne bijzondere raaklijn, die in het *raakpunt* een *element* met de kromme gemeen heeft. 151.
- § 182. *Stelling*. Wanneer eene regte lijn en eene kromme lijn elkander raken, raken ook in het algemeen hare gelijknamige projectiën elkander; en het raakpunt dezer projectiën is dan tevens de projectie van het raakpunt in de ruimte. 151.
- § 183. *Werkstuk*. Door een gegeven punt eener gegebene kromme lijn, eene raaklijn te trekken. 152.
- § 184. Het trekken van raaklijnen aan kromlijuige projectiën, wordt als postulaat aangenomen. In welk geval dit onnoodig is, en het construeren van deze raaklijnen dienen kan, om naauwkeurige projectiën der kromme lijn te bekomen. 153.
- § 185. Wat men door den hoek verstaat, waaronder eene kromme lijn eene andere kromme, eene regte lijn of een plat vlak snijdt. In welk geval eene regte lijn of een plat vlak loodregt op eene kromme lijn staat. Kenmerken of er snijding plaats heeft. 154.
- § 186. Het trekken van raaklijnen kan dienen om te bepalen of eene kromme lijn al dan niet vlak is. 154.
- § 187. Wat men bij eene kromme lijn door het *tangentiaal vlak* van eenig punt verstaat. Dit vlak komt alleen bij kromme lijnen van dubbele kromming te pas. Het gaat door twee op elkander volgende raaklijnen. 154.
- § 188. Wat men bij eene kromme lijn door het *normale vlak*, door de *normalen* en door de *hoofdnormaal* van eenig punt der kromme verstaat. 155.
- § 189. *Werkstuk*. Het *tangentiale vlak*, het *normale vlak*, en de *hoofdnormaal* te construeren, behoorende tot een gegeven punt eener gegebene kromme lijn van dubbele kromming. 155.
- § 190. Wat men door de *raking van twee kromme lijnen* verstaat; hare onderscheiding in eene *eenvoudige en volkomene raking*. 157.

Bladz.

- § 191. Wat men door *eene gewone schroeflijn* en door *eene loxodromische lijn* verstaat. Nadere verklaring van de schroeflijn; haar *as*, *straal*, *beginpunt*, *hellingshoek*, *schroefgang*, *hoogte van den schroefgang*..... 157.
- § 192. *Werkstuk*. De projectiën eener gewone schroeflijn te construeren..... 159.
- § 193. *Werkstuk*. De verticale projectie, de raaklijn, en het tangentielle vlak van eenig punt eener schroeflijn te construeren; zonder vooraf de verticale projectie der kromme te bepalen 160.

Over de wording en constructie der gebogene oppervlakken.

- § 194. De beschrijvende meetkunst houdt zich slechts bezig met gebogen oppervlakken, waarvan de wording bekend is 162.
- § 195. Andere gebogene vlakken kan men, op projectievlakken, slechts bij benadering voorstellen..... 162.
- § 196. Een gebogen vlak, van bepaalde wording, is de meetkundige plaats van opvolgende standen eener *beschrijvende lijn*, wier beweging door *rigtlijnen*, *rigtvlakken*, enz. bepaald is. Het kan uit *bladen* bestaan. Welke gebogen vlakken een en hetzelfde *geslacht* uitmaken. Zij kunnen gelijktijdig tot verschillende geslachten behooren..... 163.
- § 197. De voorstelling van gebogen vlakken, door middel van projectievlakken, bestaat in het projecteren van verschillende standen der beschrijvende lijn. Onder deze standen zijn dikwijls sommige, als grenslijnen, bijzonder geschikt tot de voorstelling van het oppervlak. 164.

De kegelvlakken.

- § 198. Wat een *kegelvlak* is, en hoe het ontstaat. Het heeft *eenen top*, *eene rigtlijn*, en bestaat uit *twee bladen*. Wat in het algemeen een *kegel* en zijn *grondvlak* is. De *regte cirkelvormige kegel* is de eenvoudigste. Er is ook de *scheeve cirkelvormige kegel*..... 165.

	Bladz.
§ 199. Andere wordingswijze van het kegelvlak	166.
§ 200. <i>Werkstuk</i> . Wanneer een kegelvlak bepaald is door zijn top, en door eene rigtlijn in de ruimte, begeert men voor dat kegelvlak de nieuwe rigtlijn, die in het horizontale vlak gelegen is, te construeren..	166.
§ 201. <i>Werkstuk</i> . Een kegelvlak, waarvan de rigtlijn eene in het horizontale vlak liggende geslotene kromme is, op de projectievlakken voor te stellen.....	167.
§ 202. <i>Werkstuk</i> . Een kegel te projecteren, als het grondvlak, de hoogte, en de projectie van den top op het grondvlak, gegeven zijn.....	167.
§ 203. <i>Werkstuk</i> . De verticale projectie van enig punt eens gegeven kegelvlak te construeren, indien de horizontale projectie van dat punt gegeven is.....	168.
§ 204. Wat in het algemeen een omhullingskegel en zijne aanrakingskromme is	169.

De cilindervlakken.

§ 205. Wat een cilindervlak is, en hoe het ontstaat. Het heeft eene rigtlijn. Wat in het algemeen een cilinder en zijn grond- en bovenvlak is. Onderscheiding der cilinders in <i>regte</i> en <i>scheeve</i> . De <i>regte cirkelvormige cilinder</i> is de eenvoudigste. Er is ook de <i>scheeve cirkelvormige cilinder</i>	170.
§ 206. Andere wordingswijze van het cilindervlak.....	171.
§ 207. <i>Werkstuk</i> . Wanneer een cilindervlak bepaald is door de rigting der beschrijvende lijnen, en door eene rigtlijn in de ruimte, begeert men voor dat cilindervlak de nieuwe rigtlijn, die in het horizontale vlak ligt, te construeren.....	171.
§ 208. <i>Werkstuk</i> . Een cilindervlak, waarvan de rigtlijn eene in het horizontale vlak liggende geslotene kromme is, op de projectievlakken voor te stellen.....	172.
§ 209. <i>Werkstuk</i> . Een cilinder te projecteren, indien het grondvlak, de hoogte, en de rigting der beschrijvende lijnen, gegeven zijn.....	173.

Bladz.

- § 210. *Werkstuk.* De verticale projectie van eenig punt eens cilindervlaks te construeren, indien de horizontale projectie van dat punt gegeven is..... 173.
- § 211. Wat in het algemeen een *omhullingscilinder*, en zijne *aanrakingskromme* is..... 174.

De omwentelingsvlakken.

- § 212. Wat een *omwentelingsvlak* is, en hoe het ontstaat. Het heeft eene *omwentelings-as*, *parallelcirkels* en *meridianen*. Elk paar meridianen ligt in een *meridiaanvlak*; welk paar men *hoofdmeridianen* noemt. Wat men door een *omwentelingsligchaam* en zijne *beschrijvende figuur* verstaat. In welk geval zulk een ligchaam *ringvormig* is..... 174.
- § 213. Andere wordingswijze van een omwentelingsvlak. De omwentelings-as wordt doorgaans loodregt op het horizontale vlak genomen..... 176.
- § 214. *Werkstuk.* Een omwentelingsvlak, waarvan de meridiaan in gedaante en in stand ten opzichte van de omwentelings-as gegeven is, op de projectievlakken voor te stellen..... 177.
- Wanneer een omwentelingsvlak eene *keel* heeft 177.
- § 215. *Werkstuk.* Een omwentelingsligchaam te projecteren. 178.
- § 216. *Werkstuk.* Een omwentelingsvlak door zijne verticale as en door de projectiën zijner hoofdmeridianen gegeven zijnde, begeert men de projectiën van een anderen meridiaan te construeren..... 178.
- § 217. *Werkstuk.* De doorgangen van zulk een omwentelingsvlak te construeren..... 179.
- § 218. *Werkstuk.* De verticale projectie te vinden van eenig punt, gelegen op een omwentelingsvlak, dat op de gewone wijze is voorgesteld, indien de horizontale projectie van dat punt gegeven is..... 180.
- § 219. *Werkstuk.* De verticale projectiën te construeren der hoofdmeridianen van het omwentelingsvlak, voortgebracht door eene gegevene beschrijvende lijn, die niet met de verticaal staande omwentelings-as in een en hetzelfde platte vlak ligt..... 181.

	Bladz.
§ 220. Is in het voorgaand werkstuk de beschrijvende lijn regt, dan vormen de hoofdmeridianen eene hyperbool...	182.
§ 221. <i>Werkstuk.</i> Den gewonen cirkelvormigen ring te projecteren, en punten op zijn oppervlak aan te wijzen.	182.

De ringvormige oppervlakken.

§ 222. Wat men in het algemeen door ringvormige oppervlakken verstaat. Zij zijn slechts in bijzondere gevallen omwentelingsvlakken.....	183.
§ 223. Er kunnen talrijke geslachten van ringvormige oppervlakken zijn, die ieder eene menigte van verscheidenheden kunnen opleveren. In welk geval men dergelijke oppervlakken <i>buisvormig</i> noemt.....	184.

De algemeene ontwikkelbare oppervlakken.

§ 224. Wat men door <i>regelrechte oppervlakken</i> verstaat. In welk geval zij <i>ontwikkelbaar</i> zijn. Zij worden in twee hoofdklassen, <i>de ontwikkelbare</i> en <i>de scheeve</i> oppervlakken onderscheiden.....	185.
§ 225. Wat men door <i>een algemeen ontwikkelbaar oppervlak</i> verstaat, en hoe het voortgebragt wordt. Zulk een oppervlak heeft eene <i>keerlijn</i>	186.
§ 226. Deze keerlijn is altijd van dubbele kromming....	187.
§ 227. De algemeene ontwikkelbare oppervlakken, worden door hunne keerlijnen volkomen bepaald. Een hunner is <i>het ontwikkelbare schroefvlak</i> , dat eene schroeflijn tot keerlijn heeft.....	187.
§ 228. <i>Werkstuk.</i> Een algemeen ontwikkelbaar oppervlak door de projectiën der keerlijn gegeven zijnde, wil men de verticale projectie vinden van een punt des oppervlaks, dat eene gegevene horizontale projectie heeft.....	187.
§ 229. <i>Werkstuk.</i> Den horizontalen doorgang van een algemeen ontwikkelbaar oppervlak te construeren...	188.

De scheeve oppervlakken.

- § 230. Wat men door *scheeve oppervlakken* verstaat. Wat bij zulk een oppervlak *de intrekingslijn* is..... 188.
- § 231. Wat de meest gewone voorwaarden zijn, waaraan men eene regte beschrijvende lijn laat voldoen. *Drie* zulke onafhankelijke en niet strijdige voorwaarden zijn noodig en voldoende; er kunnen echter dubbele en drievoudige voorwaarden zijn..... 189.
- § 232. Bewijs dat drie voorwaarden noodig en voldoende zijn om de beweging eener regte lijn te bepalen... 190.
- § 233. Eene regte lijn, die langs drie kromme rigtlijnen glijdt, kan in bijzondere gevallen een ontwikkelbaar oppervlak voortbrengen, maar beschrijft anders altijd een scheef oppervlak..... 191.
- § 234. Eene regte lijn, die langs twee kromme rigtlijnen glijdt, en evenwijdig met een rigtvlak blijft, kan in bijzondere gevallen een cilindervlak voortbrengen, maar anders beschrijft zij een scheef oppervlak, dat men *eene cilindroïde* noemt. In welk geval dit oppervlak de bijzondere namen van *conoïde* en *regte conoïde* verkrijgt..... 191.
- § 235. Opgave van de meest voorkomende scheeve oppervlakken..... 192.
- § 236. *Werkstuk.* Het oppervlak te construeren, beschreven door eene regte lijn, die evenwijdig met het verticale vlak blijft, en langs twee gegeven regte lijnen glijdt..... 193.
- § 237. *Werkstuk.* Alsmede het oppervlak, beschreven door eene regte lijn, glijdende langs drie regte lijnen, waarvan er eene loodregt op het horizontale vlak staat..... 194.
- § 238. *Werkstuk.* Eene kegelvormige wig van WALLIS te projecteren. De verticale projectie wordt voor drie verschillende standen der wig aangewezen..... 195.
- § 239. *Werkstuk.* Eene schroef met vierkanten draad te projecteren..... 197.
- § 240. *Werkstuk.* Alsmede eene met driekanten draad..... 198.

Bladz.

*Over de doorsnijding der gebogene oppervlakken.**De doorsnijding van gebogene met platte vlakken.*

- § 241. Aanwijzing van twee verschillende wegen, tot het construeren van de gemeene doorsneden van gebogene vlakken met platte..... 199.
- § 242. *Werkstuk.* De gemeene doorsnede te construeren van een kegelvlak met een plat vlak. Afscheidingen tusschen zichtbare en onzichtbare gedeelten. Het projecteren van een afgeknotten kegel..... 200.
- § 243. *Werkstuk.* Insgelijks van een plat vlak met een gewonen cirkelvormigen kegel. Hoogste en laagste stand der snijdende hulpvlakken. Bepaling van de assen der elliptische projectie..... 202.
- § 244. *Werkstuk.* Insgelijks van een cilindervlak met een plat vlak. Gevallen dat de beschrijvende lijnen verticaal zijn; of dat een vlak loodregt op het verticale een gewonen cilinder snijdt..... 203.
- § 245. *Werkstuk.* Insgelijks van een omwentelingsvlak met een plat vlak. Hoogste en laagste stand der snijdende hulpvlakken. Afscheiding van zichtbare en onzichtbare deelen..... 204.
- § 246. *Werkstuk.* Insgelijks van een scheef oppervlak met een plat vlak. Ware gedaante der doorsnede.... 206.

De doorsnijding van gebogene vlakken onderling.

- § 247. Wat in het algemeen de hulpmiddelen zijn, tot het construeren der gemeene doorsnede van twee gebogen vlakken. Welke snijdende hulpvlakken hiertoe de voorkeur verdienen..... 207.
- § 248. *Werkstuk.* De gemeene doorsnede van twee kegelvlakken te construeren. Kenmerk in hoeverre de projectiën der doorsnede zichtbaar zijn..... 208.
- § 249. Kenmerken: dat twee kegels elkander niet snijden; dat de eene kegel den anderen doorboort en dus de doorsnede uit eenen *ingang en uitgang* bestaat; of dat

	Bladz.
de kegeloppervlakken ééne zamenhangende kromme gemeen hebben. Hoe te handelen als de toppen der beide kegels even hoog liggen.....	210.
§ 250. <i>Werkstuk.</i> De gemeene doorsnede van twee cilinder- vlakken te construeren.....	211.
§ 251. Hoe in dit werkstuk te handelen als de beschrij- vende lijnen evenwijdig met het horizontale vlak zijn. Opheldering door constructie der doorsnede van twee horizontale cirkelvormige cilinders.....	212.
§ 252. <i>Werkstuk.</i> De gemeene doorsnede te construeren van een kegelvlak met een cilindervlak.....	213.
§ 253. <i>Werkstuk.</i> Insgelijks van een gewonen cirkelvormigen kegel met een bol. Zigtbare en onzigtbare deelen. Hoogste en laagste standen der snijdende hulpvlak- ken. Er kan of ééne zamenhangende kromme of een ingang en uitgang zijn.....	214.
§ 254. <i>Werkstuk.</i> De gemeene doorsnede te construeren van een bol, met een scheeven kegel van willekeurig grondvlak. Beoordeeling of de doorsnede uit ééne, dan wel uit twee geslotene krommen bestaat; en of in het laatste geval de kegel den bol doorboort, dan wel den bol in drie stukken snijdt.....	215.
§ 255. <i>Werkstuk.</i> De gemeene doorsnede van een bol met een willekeurigen scheeven cilinder te construeren. In- en uitgang. Zigtbare en onzigtbare deelen. Grens-standen der snijdende vlakken.....	218.
§ 256. <i>Werkstuk.</i> De doorsnede te vinden van twee om- wentelingsvlakken, als de assen elkaâr snijden....	220.
§ 257. Over het bepalen dezer doorsnede als de assen even- wijdig zijn of elkander kruissen.....	221.

De ontwikkeling der oppervlakken.

§ 258. Wat door deze ontwikkeling verstaan wordt. Zij kan, slechts bij benadering plaats hebben.....	222.
§ 259. <i>Werkstuk.</i> Het ronde oppervlak te ontwikkelen van een willekeurigen kegel.....	223.

	Bladz.
§ 260. <i>Werkstuk.</i> Insgelijks van een schuin afgeknotten gewonen kegel.....	224.
§ 261. <i>Werkstuk.</i> Insgelijks van een willekeurigen cilinder.	225.
§ 262. <i>Werkstuk.</i> Insgelijks van een afgeknotten gewonen cilinder	226.
§ 263. <i>Werkstuk.</i> Een algemeen ontwikkelbaar oppervlak te ontwikkelen.....	227.
§ 264. De ontwikkeling eens oppervlaks leert kromme of rechte lijnen vinden, die aan zekere voorwaarden voldoen. Over een ontwikkelbaar oppervlak den kortsten weg tusschen twee punten te vinden.....	228.

Over de rakende vlakken aan de gebogene oppervlakken.

§ 265. <i>Een rakend vlak</i> is het verlengde van een element van het gebogen vlak. Het raakt een ontwikkelbaar oppervlak volgens eene rechte lijn, eenig ander oppervlak in een enkel punt. Uitzonderingen voor bijzondere rakende vlakken. Wat men bij een gebogen vlak <i>eene normaal, een normaal vlak en eene normaalsnede</i> noemt.....	228.
§ 266. Een rakend vlak wordt door de raaklijnen aan twee doorsneden bepaald. Bij de regelrechte oppervlakken ligt de beschrijvende lijn van het raakpunt, in het rakende vlak, en zij is eene lijn van aanraking of van doorsnijding, naargelang het oppervlak ontwikkelbaar of scheef is	230.
§ 267. Voor een gegeven raakpunt, verkrijgt het rakende vlak een bepaalden stand; is er geen raakpunt gegeven, dan kan men het rakende vlak aan verschillende voorwaarden laten voldoen.....	231.
§ 268. In welk geval <i>twee gebogen vlakken elkander raken</i> , hetzij in een <i>raakpunt</i> hetzij volgens <i>eene lijn van aanraking</i> . Tot deze raking behoort die der omhullings-kegels en cilinders.....	232.
§ 269. <i>Werkstuk.</i> Aan een gegeven kegel- of cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat door een gegeven punt van het gebogen vlak gaat.....	232.

- § 270. *Werkstuk.* Als voren een rakend vlak, dat door een gegeven punt buiten het gebogen vlak gaat. Gevallen dat er geen of dat er meer vlakken aan de vraag voldoen. Hoe te handelen als het gegeven punt even hoog als de top van het kegelvlak ligt. 233.
- § 271. *Werkstuk.* Als voren een rakend vlak dat evenwijdig met eene gegevene lijn is. 234.
- § 272. Opmerking omtrent de drie laatste werkstukken. Er kan niet begeerd worden aan een kegel- of cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat door eene gegevene lijn gaat. 235.
- § 273 *Werkstuk.* Aan twee kegelvlakken met gemeenschappelijke top, of aan twee cilindervlakken met evenwijdige beschrijvende lijnen, een gemeenschappelijk rakend vlak te brengen. 235.
- § 274. Zulk een rakend vlak aan twee willekeurige kegelen cilindervlakken kan niet begeerd worden. 236.
- § 275. *Werkstuk.* Door een gegeven punt van een omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen. 236.
- § 276. Bij een omwentelingsvlak is elk rakend vlak loodrecht op het meridiaanvlak van het raakpunt. 237.
- § 277. *Werkstuk.* Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, dat loodrecht op een gegeven meridiaanvlak is, en door een gegeven punt buiten het gebogen vlak gaat. In welk geval er geen of meer rakende vlakken mogelijk zijn. 238.
- § 278 Hoe uit een punt buiten een omwentelingsvlak eene raaklijn aan het gebogen vlak getrokken wordt, zoodat het raakpunt op een gegeven meridiaan ligt. 239.
- § 279. *Werkstuk.* Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, dat loodrecht op een gegeven meridiaanvlak en evenwijdig met eene gegevene lijn is. 239.
- § 280. Hoe men aan een omwentelingsvlak eene raaklijn evenwijdig met eene gegevene lijn trekt, zoodat het raakpunt op een gegeven meridiaan ligt. 240.
- § 281. *Werkstuk.* De kromme lijn te construeren, volgens welke het oppervlak van een omwentelingsligchaam

	geraakt wordt, door een omhullingskegel, wiens top buiten dat ligchaam gegeven is	240.
§ 282.	Constructie van den horizontalen doorgang des kegels, die eenen bol omhult	242.
§ 283.	<i>Werkstuk.</i> De kromme lijn te construeren, volgens welke het oppervlak van een omwentelingsligchaam geraakt wordt, door een omhullingscilinder, waarvan de rigting der beschrijvende lijnen gegeven is ..	243.
§ 284.	Constructie van den horizontalen doorgang des cilinders, die eenen bol omhult	243.
§ 285.	<i>Werkstuk.</i> Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat een gegeven omwentelingsvlak raakt	244.
§ 286.	<i>Werkstuk.</i> Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, evenwijdig met een gegeven vlak	245.
§ 287.	<i>Werkstuk.</i> Een vlak te construeren, dat gelijktijdig eenen kegel en eenen bol raakt	246.
§ 288.	<i>Werkstuk.</i> Desgelijks eenen cilinder en eenen bol ...	246.

Over de perspectief.

§ 289.	Bepalingen over hetgeen men door het <i>in perspectief brengen</i> van een voorwerp verstaat. Wat hierbij door <i>het glas, het grondvlak, de grondlijn, het oog, het oogpunt, eene ooglijn</i> en <i>een oogvlak</i> verstaan wordt. Wat de zoogenoemde <i>luchtperspectief</i> is ...	247.
§ 290.	Wat de <i>schijnbare omtrek</i> van een voorwerp is, en de perspectief van dien omtrek. Ook onzichtbare lijnen worden in perspectief gebragt	248.
§ 291.	Welke onderstellingen nog andere dan de eigenlijke perspectieven opleveren	248.
§ 292.	Bijzonderheden omtrent de plaatsing van het voorwerp en het oog bij de eigenlijke perspectieven ...	249.
§ 293.	Wat men omtrent <i>de hoogte van het oog</i> in acht moet nemen. In welk geval men <i>eene vogelvlugtperspectief</i> verkrijgt	249.
§ 294.	Hoe men <i>de distantie</i> , volgens hetgeen de onderzinking over het zien leert, regelen moet	250.

§ 295. Bij de aanwijzingen over het in perspectief brengen, zullen slechts meetkundige figuren als voorwerp gebezigd worden. De stand van oog en voorwerp wordt daarbij als willekeurig gegeven beschouwd...	251.
§ 296. Afleiding van een aantal eenvoudige gevolgen uit de gegevene bepalingen; en opheldering daarvan door eene figuur.....	251.
§ 297. Waarom men bij het perspectieven het glas tot verticaal projectievlak aanneemt; hoe dan tevens de grondlijn de as van projectie wordt.....	253.
§ 298. Het in perspectief brengen van een punt en van een voorwerp, dat door zijne projectiën gegeven is, op het verticale projectievlak als glas.....	254.
§ 299. Waarom in het werkdadige de voorgaande leerwijze niet gevolgd wordt.....	255.
§ 300. <i>Stelling</i> , bepalende op het glas een punt, waarnaar de perspectief eener rechte lijn gerigt is.....	255.
§ 301. De perspectieven van evenwijdige lijnen hebben op het glas een <i>vergaarpunt</i> . In welk geval dit vergaarpunt ontbreekt.....	256.
§ 302. Lijnen, die loodregt op het glas staan, loopen in perspectief naar het oogpunt als vergaarpunt.....	256.
§ 303. De perspectieven van horizontale evenwijdige lijnen, hebben haar vergaarpunt in eene lijn, die <i>de horizon</i> heet. Van welke punten de perspectieven boven of beneden den horizon komen.....	256.
§ 304. Wat men door <i>de distantiepunten</i> verstaat. Van welke perspectieven zij de vergaarpunten zijn.....	257.
§ 305. Hoe men een punt, door middel van een der distantiepunten, in perspectief brengt.....	257.
§ 306. Hoe men eerst de perspectief van de horizontale projectie, en daarna <i>de perspectievische hoogte</i> van een punt bepaalt.....	258.
§ 307. De constructiën der beide voorgaande §§, hoewel aan bezwaren onderhevig, banen den weg tot de gebruikelijke leerwijzen.....	259.
§ 308. Hoe men een punt door zijne <i>diepte</i> , <i>breedte</i> en <i>hoogte</i> bepaalt. Wat diensvolgens <i>de assen der diepte</i> , <i>breedte</i> en <i>hoogte</i> zijn.....	259.

§ 309. Hoe men een punt in perspectief brengt, door het construeren zijner <i>perspectievische diepte</i> , <i>breedte en hoogte</i> . Wat door <i>perspectievische wijking</i> te verstaan is.....	259.
§ 310. Wijzigingen dezer constructie, ook voor 't geval dat het distantiepunt te ver buiten de teekening zou vallen. Gebruik van willekeurige punten in den horizon, tot het vinden van perspectievische hoogten	260.
§ 311. Hoe men, uit de werkelijke diepte, breedte en hoogte van een punt, de perspectievische berekenen kan. In welk geval dit van bijzonder nut is.....	261.
§ 312. Wat men <i>de wijkende schaal</i> noemt. Hoe men voor elk hare punten <i>schalen van perspectievische breedten en hoogten</i> , en zoodoende een <i>perspectievisch net</i> verkrijgt. Gebruik van dit net.....	262.
§ 313. Hoe men bij de voorgaande leerwijzen, zonder bezwaar het gebruik van projectiën behouden kan...	263.
§ 314. Toepassing op het in perspectief brengen van een regthoekig parallelipedum.....	264.
§ 315. Constructie van een horizontalen hoek, wiens perspectief gegeven is.....	266.
§ 316. Hulpmiddelen hieruit voortvloeiende, tot het in perspectief brengen van hoeken; en tot het oprigten en neerlaten van loodlijnen.....	267.
§ 317. Toepassing op het in perspectief brengen eener regelmatigte vijfhoekige piramide.....	267.
§ 318. Het perspectieven van kromlijnige figuren, en van lichamen met gebogen oppervlakken.....	268.
§ 319. Constructie van de perspectief van een cirkel, die in het horizontale grondvlak ligt.....	269.
§ 320. En van een hooger gelegen horizontalen cirkel....	270.
§ 321. De perspectief van een gewonen cilinder te vinden	271.
§ 322. Insgelijks van een gewonen kegel.....	271.
§ 323. Over de perspectief van een bol.....	272.
§ 324. Een omwentelingsligchaam in perspectief te brengen.	273.
§ 325. Wat <i>de isometrische perspectief</i> is.....	273.
§ 326. Verklaring van eenige daarbij te pas komende kunsttermen.....	275.

Bladz.

§ 327. Hoe men de isometrische perspectief van een veelvlakkig ligchaam kan construeren. Toepassing op een regelmatig zeshoekig prisma.....	275.
§ 328. Bij deze perspectief komen geene vergaarpunten voor, maar hebben alle evenwijdige lijnen ook evenwijdige perspectieven.....	276.
§ 329. Over de isometrische perspectief van kromme lijnen; bepaaldelijk van den cirkel.....	276.
§ 330. En van een cilinder of kegel.....	278.
§ 331. Nut der isometrische perspectief.....	278.

Over de schaduwen.

§ 332. Wat men door <i>schaduwen</i> verstaat. <i>Zijschaduw of eigene schaduw, schaduwlijn, slogschaduw</i>	279.
§ 333. Wat <i>schaduwkegels</i> en <i>schaduwcilinders</i> zijn. Onderscheiding der schaduwen van <i>kaarslicht</i> en <i>zonlicht</i> . ..	279.
§ 334. Bij meetkundige teekeningen komt slechts zonlicht in aanmerking. Rigting voor dat licht te kiezen... ..	280.
§ 335. Schaduwen van rechte en kromme lijnen; hare eigenschappen.....	281.
§ 336. Schaduwen van veelvlakkige lichamen.....	282.
§ 337. De schaduwen worden slechts door hare projectiën aangewezen.....	283.
§ 338. <i>Werkstuk</i> . De schaduw te construeren van eene rechte lijn op de projectievlakken.....	283.
§ 339. <i>Werkstuk</i> . Insgelijks van een regthoekig parallelopipedum.....	284.
§ 340. <i>Werkstuk</i> . Insgelijks van zulk een ligchaam met een daarop geplaatsten cilinder.....	285.
§ 341. <i>Werkstuk</i> . Insgelijks van eene veelhoekige piramide, mede op een hellend vlak.....	286.
§ 342. <i>Werkstuk</i> . De schaduwen te bepalen van een prisma, door een parallelopipedum overdekt.....	287.
§ 343. <i>Werkstuk</i> . Insgelijks van een overdekten hollen halven cilinder.....	288.
§ 344. <i>Werkstuk</i> . Insgelijks van een cilinder en daarop staanden kegel, waarachter een parallelopipedum ligt. ..	289.

	Bladz.
§ 345. <i>Werkstuk.</i> Insgelijks van een bol, die op het horizontale vlak ligt	290
§ 346. <i>Werkstuk.</i> De schaduw te construeren, door een concentrisch uitgehouden halven bol, op het horizontale vlak en in zijne nitholling geworpen	292
§ 347. <i>Werkstuk.</i> De schaduw te construeren, door den omtrek eener nis in hare binnenoppervlakte geworpen.	293
§ 348. Schaduwen kunnen met de voorwerpen, waartoe zij behooren, in perspectief gebragt worden.....	297
§ 349. Algemeen begrip der <i>Gnomonica</i>	297
§ 350. Constructie van een horizontalen zonnwijzer	298

WERKSTUKKEN TOT OEFENING.

49 tot 52. Over kromme lijnen.....	300
53 tot 62. Over gebogene vlakken en hunne snijding...	306
63 tot 66. Over de toepassing dier snijding.....	301
67 en 68. Over de ontwikkeling van oppervlakken.....	302
69 tot 71. Over rakende vlakken.....	302
72 tot 80. Over de perspectief en de schaduwen.....	302

GRONDEN

DER

BESCHRIJVENDE MEETKUNST.

INLEIDING.

§ 1. Onder de figuren, die in de Meetkunst voorkomen, kunnen alleen de *vlakke figuren* platte teekeningen zijn, wier deelen allen hunne ware gedaante en grootte hebben. In dit geval is het vlak der figuur tevens het vlak der teekening.

Figuren in de ruimte kunnen ook wel op platte vlakken afgebeeld worden, zoodanig dat die afbeeldingen of teekeningen, *perspectievische figuren* genoemd, de naauwkeurigste overeenkomst hebben met de figuren zelve, zooals die zich in een bepaalden stand aan het oog des beschouwers vertoonen; maar in zulk eene perspectievische teekening hebben de deelen der figuur noch hunne ware grootte, noch hunne ware gedaante; lijnen, die in de ruimte even lang zijn, verkrijgen in de teekening meestal ongelijke afmetingen; hoeken, die wezenlijk regt zijn, vertoonen zich in de teekening niet zelden als scherpe of stompe hoeken; enzv. Bovendien kan, tot het maken van zulke afbeeldingen, een willekeurig vlak als vlak der teekening gebezigd worden, en de afbeelding is geheel afhankelijk van den stand, dien men aan dit vlak met betrekking tot het oog des beschouwers en met betrekking tot het af te beelden voorwerp gegeven heeft. Uit dit alles volgt dan, dat de perspectievische afbeelding van eene figuur in de ruimte niet geschikt is, om van die figuur een zoo bepaald en klaar begrip te geven, dat

men haar, volgens de afbeelding, *en reliëf* zou kunnen vervaardigen. En zulk een begrip toch heeft men voorzeker noodig, eer men zal kunnen zeggen die figuur in de ruimte volkomen te kennen.

§ 2. Om dus, door middel van platte teekeningen, de figuren in de ruimte even naauwkeurig als vlakke figuren te kunnen aanduiden, zijn er andere hulpmiddelen te baat genomen, eene onmiskenbare overeenkomst hebbende met de handelwijze, die reeds van ouds bij de bouwkunstenaars in gebruik was, om gebouwen door *platte gronden*, *opstanden* en *doorsneden* voor te stellen. De ontwikkeling dier hulpmiddelen wees tevens een geschikten weg aan, om in platte teekeningen, ook ten aanzien van figuren in de ruimte, even naauwkeurig als ten aanzien van vlakke figuren, constructiën te kunnen uitvoeren. En hierdoor ontstond de tak der wiskunde, die, in het begin der vorige eeuw, onder den naam van *Beschrijvende Meetkunst*, het eerst door MONGE in het leven werd geroepen.

De beschrijvende Meetkunst leert alzoo: hoe men figuren in de ruimte, door middel eener platte tekening, volkomen naauwkeurig kan voorstellen; hoe men omgekeerd, uit zulke eene voorstelling, de ware grootte en de ware gedaante van de figuren en van hare deelen kan terugvinden; en hoe men eindelijk, door het uitvoeren van constructiën in deze platte tekening, al de bijzonderheden kan opsporen, die men ten aanzien van de voorgestelde figuur zou begeeren te kennen.

Onder de toepassingen, die men van deze constructiën maken kan, zijn er een paar, die wegens hare algemeenheid en vindingrijkheid bijzonder merkwaardig zijn; namelijk: de juiste vervaardiging van perspectievische afbeeldingen, en de naauwkeurige bepaling van licht en schaduw in verschillende teekeningen. Deze onderwerpen behooren dus mede tot het gebied der beschrijvende Meetkunst.

Overigens is deze tak der wiskunde bij uitnemendheid geschikt, om, ten aanzien van de figuren in de ruimte, de beoefening der analytische Meetkunst gemakkelijk te maken; zoo zelfs, dat bij die beoefening doorgaans eene voorafgaande kennis der beschrijvende Meetkunst moet ondersteld worden.

§ 3. Het vlak der platte tekening, waarvan men zich in de beschrijvende Meetkunst bedient, is oorspronkelijk geen enkel plat vlak. Het bestaat minstens uit twee platte vlakken, doorgaans onderling

regthoekig genomen, die men om hunne gemeene doorsnede op elkander heeft neergeslagen; dat wil zeggen, die men om hunne gemeene doorsnede zoodanig heeft laten omwentelen, dat zij elkan- der bedekken.

In dien toestand maken zij werkelijk slechts één plat vlak, na- melijk het vlak der teekening uit; maar zoo er in die vlakken, in hun oorspronkelijken toestand, punten aangewezen of lijnen getrok- ken waren, moeten die punten en lijnen, ook na het opeenslaan der vlakken, toch altijd tot datgene van de beide vlakken blijven behooren, waarin zij zich oorspronkelijk bevonden; en wel opdat men de opeengeslagene vlakken, met de daarin voorkomende punten en lijnen, weder in hunnen oorspronkelijken toestand zou kunnen terugbrengen. Een alzoo verkregen vlak van teekening wordt eene *constructie-figuur* genoemd.

Stelt men zich twee platte en onbuigbare bladen doorschijnend papier voor, waarop zekere punten of lijnen aangewezen zijn; verbeeldt men zich vervolgens dat deze bladen door elkander heen- gestoken en om hunne doorsnede op elkander gewenteld zijn, dan zal men al spoedig een juist denkbeeld van het wezen eener con- structie-figuur verkrijgen.

Zooals later blijken zal zijn somtijds, tot het bekomen eener geschikte constructie-figuur, twee onderling regthoekige vlakken on- toereikend. Men neemt dan nog een derde vlak aan, dat doorgaans wederom regthoekig op elk der beide eersten gesteld en om zijue doorsnede met het reeds verkregen vlak van teekening op dat vlak neergeslagen wordt. Ook bezigt men niet zelden nog andere vlakken, hetgeen wij echter eerst later duidelijk zullen kunnen maken.

§ 4. Alzoo tot bepaling van eenige figuur altijd punten, lijnen of vlakken vereischt worden, zullen wij in de eerste plaats dienen aan te toonen hoe men de betrekkelijke ligging van punten, lijnen en vlakken in de ruimte, volkomen naauwkeurig door middel van eene constructie-figuur kan bepalen. De wijze, waarop dit geschiedt, wordt gewoonlijk de *Leerwijze der projectiën* genoemd.

Om die leerwijze duidelijk te kunnen verklaren, zullen wij meer- malen de platte vlakken, uit wier opeenslaan de constructie-figuur ontstaan is, in hunnen oorspronkelijken toestand moeten afbeelden, en daartoe kunnen wij slechts perspectievische figuren bezigen. Ook tot latere verklaringen zullen wij nu en dan zulke figuren

dienen te gebruiken. Men zal daarbij dan echter altijd in het oog moeten houden, dat het gebruik van perspectievische figuren niet tot het wezen der beschrijvende Meetkunst behoort. De beschrijvende Meetkunst gebruikt slechts constructie-figuren, zelfs dan wanneer men haar toepast tot de juiste vervaardiging van perspectievische afbeeldingen. Wij zullen dan ook vrij spaarzaam met perspectievische figuren zijn, en ze meestal slechts dáár gebruiken, waar dit noodig schijnt om aan het voorstellings-vermogen te gemoet te komen, of waar het dienstig kan zijn om de eene of andere verklaring in kortere bewoordingen te brengen.

LEERWIJZE DER PROJECTIËN.

§ 5. Een punt A, buiten een plat vlak PQ (Fig. 1), op dat vlak te *projecteren*, wil niets anders zeggen, dan het voetpunt A' aan te wijzen van de loodlijn, die uit het punt A op het vlak PQ kan worden neergelaten. Dit voetpunt A' wordt dan *de projectie*, en de loodlijn AA' *de projecterende lijn*, van het punt A op het vlak PQ, genoemd.

Is PQ een plat vlak, dat men heeft aangenomen met het doel om daarop verschillende punten A, B, C, enz. te projecteren, dan verkrijgt dit vlak den naam van *projectievlak*.

Een punt E, dat in het projectievlak ligt, kan daarop eigenlijk niet geprojecteerd worden; maar zulk een punt kan beschouwd worden als zelf zijne projectie te zijn.

§ 6. *Een punt in de ruimte wordt door zijne projectie op één vlak niet bepaald.* Want kent men van zulk een punt slechts de projectie B' op het vlak PQ, zoo weet men niets meer, dan dat het punt gelegen is ergens in de onbepaaldelijk verlengde lijn RS, die het projectievlak PQ in B' regthoekig snijdt.

Ter bepaling van een punt in de ruimte door middel van projectiën, moet men dus ten minste twee projectievlakken aannemen.

§ 7. Men neemt tot projectievlakken doorgaans twee onderling regthoekige platte vlakken aan, waarvan er één waterpas onder-

steld wordt; dit laatste wordt dan *het horizontale-*, het andere *het verticale vlak van projectie* genoemd, terwijl hunne gemeene doorsnede *de as van projectie* heet. Waar het geene dubbelzinnigheid geven kan, noemt men deze vlakken en hunne gemeene doorsnede, kortweg: *het horizontale vlak, het verticale vlak, de as*.

Men zal gemakkelijk eene eenvoudige voorstelling van de projectievlakken verkrijgen, door ze zich als den vloer en den zijwand van een gewoon vertrek te verbeelden.

De projectiën en de projecterende lijnen van eenig punt worden, naargelang zij op het horizontale of verticale vlak genomen zijn, onderscheiden door de benamingen *horizontale* en *verticale projectie*, *horizontaal-* en *verticaal-projecterende lijn* (*).

Laat b.v. OLL_1 (Fig. 2) het horizontale, OMM_1 het verticale vlak, en OX de as verbeelden; indien dan, uit de punten A, B, C en D , de loodlijnen AA', BB', CC' en DD' op het horizontale vlak OLL_1 worden neergelaten, zijn deze loodlijnen de horizontaal-projecterende lijnen, en hare voetpunten A', B', C' en D' de horizontale projectiën, van de punten A, B, C en D . Evenzoo zijn de loodlijnen AA'', BB'', CC'' en DD'' , op het verticale vlak OMM_1 neergelaten, de verticaal-projecterende lijnen, en hare voetpunten A'', B'', C'' en D'' de verticale projectiën, der punten A, B, C en D .

Daar de beide projectievlakken de onbepaalde ruimte in vier tweevlakkige hoeken verdeelen, hebben wij in onze figuur opzettelijk de projectiën voorgesteld van vier verschillende punten, waarvan er een in elk dezer tweevlakkige hoeken genomen is. Zoo ligt:

- het punt A boven het horiz. en vóór het vertic. vlak;
- het punt B boven het horiz. en achter het vertic. vlak;
- het punt C onder het horiz. en vóór het vertic. vlak;
- het punt D onder het horiz. en achter het vertic. vlak.

(*) Deze benamingen, hoezeer algemeen aangenomen, zijn niet volkomen juist. Immers de projectie van een punt is wederom een punt, en van een punt kan men niet zeggen dat het horizontaal of verticaal is. De horizontaal-projecterende lijn is eene verticale lijn, de verticaal-projecterende lijn is eene horizontale. Er bestaat echter geen bezwaar in het behouden der opgegevene benamingen, indien men slechts altijd indachtig blijft, dat uitdrukkingen als *horizontale projectie*, *horizontaal-projecterende lijn*, niet anders zijn dan verkortingen van de meer omslagtige uitdrukkingen *projectie op het horizontale vlak*, *projecterende lijn op het horizontale vlak*. Enz.

§ 8. Een punt in de ruimte wordt, door zijne horizontale en verticale projectiën beide, volkomen bepaald. Want zoo men, uit elk zijner projectiën, eene loodlijn op het projectievlak oprigt, moeten deze beide loodlijnen elkander in het geprojecteerde punt snijden.

§ 9. Wanneer men, uit de horizontale en verticale projectiën van een punt in de ruimte, loodlijnen op de as nederlaat, verkrijgen deze beide loodlijnen een gemeenschappelijk voetpunt; en de loodlijn, uit de verticale of horizontale projectie neergelaten, is gelijk aan den afstand van het geprojecteerde punt tot het horizontale of verticale vlak.

Beschouwt men b. v. het punt A' (Fig. 2), zoo kan men door de projecterende lijnen AA' en AA'' een plat vlak brengen; dit vlak is dan loodregt op elk der projectievlakken OLL_1 en OMM_1 (Meetk. § 321), en het is dus ook loodregt op de as OX (Meetk. § 323, *Gev.* 3^o). Zij nu a het punt, waar OX door het genoemde vlak gesneden wordt; zoo men dan in dat vlak de lijnen $A'a$ en $A''a$ trekt, volgens welke het de projectievlakken snijdt, zal OX loodregt op die lijnen zijn (Meetk. § 299 en 300); deze lijnen zijn alzoo de loodlijnen, die men uit A' en A'' op OX kan neerlaten, en die loodlijnen hebben derhalve een gemeenschappelijk voetpunt a .

Hieruit volgt verder, dat $A'aA''$ de standhoek van den tweevlakkigen hoek der projectievlakken is; wegens den onderling regthoekigen stand dier vlakken, is alzoo de hoek $A'aA''$ regt; maar omdat de lijnen AA' en AA'' loodregt op de vlakken OLL_1 en OMM_1 staan, zijn ook $AA'a$ en $AA''a$ rechte hoeken; derhalve is $AA'aA''$ een regthoek, waaruit volgt dat $A''a = AA'$ en $A'a = AA''$ is.

De beschouwing der punten B , C of D voert evenzoo tot hetzelfde besluit.

§ 10. Neemt men in elk der beide projectievlakken een willekeurig punt aan, zoodanig dat loodlijnen uit deze punten op de as nedergelaten geen gemeenschappelijk voetpunt verkrijgen, dan kunnen de aangenomene punten geene projectiën van eenig punt in de ruimte zijn. Loodlijnen, uit deze punten op de projectievlakken opgerigt, zouden elkander niet snijden, maar kruissen.

§ 11. Een punt E of F (Fig. 2), dat, aan deze of gene zijde van de as OX , in het horizontale vlak ligt, en dat dus (zie § 5) zelf zijne horizontale projectie is, heeft zijne verticale projectie

E'' of F'' in de as OX . Want de loodlijnen, uit E en F op het vlak OMM_1 vallende, liggen in het vlak OIL_1 (*Meetk.* § 322, 3^o) en verkrijgen dus hare voetpunten in de gemeene doorsnede OX .

Evenzoo hebben punten G en H , die aan deze of gene zijde van OX in het verticale vlak liggen, hunne horizontale projectiën G' en H' in de as OX , terwijl die punten G en H zelve hunne verticale projectiën zijn.

In verband hiermede zullen dan ook de verticale projectiën van punten in de ruimte boven of beneden de as vallen, naargelang die punten zelve boven of beneden het horizontale vlak gelegen zijn. Even als de horizontale projectiën vóór of achter de as vallen, naargelang de punten zelve zich vóór of achter het verticale vlak bevinden.

Een punt I , in de as van projectie genomen, kan eigenlijk op geen der beide projectievlakken geprojecteerd worden; maar zulk een punt kan beschouwd worden als zelf gelijktijdig zijne horizontale en verticale projectie te zijn.

§ 12. Indien zoovele punten als men verkiest op de projectievlakken geprojecteerd zijn, kan men de ruimte tusschen die vlakken, dus ook de punten in de ruimte met hunne projecterende lijnen, wegdenken; zoodat er niets overblijft dan de projectievlakken zelve, met de zich dáárin bevindende punten en lijnen. Stelt men zich verder voor dat die projectievlakken, onbepaaldelijk verlengd gedacht, door eene wenteling om hunne gemeene doorsnede, op elkander gekomen zijn en dus slechts één plat vlak uitmaken, zoo kan al wat zich dan in dit vlak bevindt, in zijne ware gedaante en grootte, door eene platte teekening worden voorgesteld. Die platte teekening is dan eene *constructie-figuur*.

In de constructie-figuur, die uit Fig. 2 ontstaan zal, blijven dus de as OX , de punten A' , A'' , B' , B'' , enz., benevens de lijnen $A'a$, $A''a$, $B'b$, $B''b$, enz. aanwezig; maar de punten A , B , enz. benevens de lijnen AA' , AA'' , BB' , BB'' , enz. kunnen in die constructie-figuur niet meer bestaan. Ook de grenslijnen, die wij in Fig. 2 noodig hadden tot eene perspectievische afbeelding van de projectievlakken (*Meetk.* § 291), vervallen in de constructie-figuur; dewijl zij dáár niet alleen overtollig zijn, maar zelfs in strijd zouden wezen met de voorstelling, die men zich van de projectievlakken, als onbepaaldelijk verlengde vlakken, moet maken.

Men laat de omwenteling om de as OX , waardoor de projectievlakken op elkander komen, altijd in dien zin geschieden, dat het bovenste deel OM van het verticale vlak, op het achterste deel OL_1 van het horizontale, en het voorste deel OL van het horizontale op het onderste deel OM_1 van het verticale komt te liggen. Van de lijnen, in de projectievlakken aanwezig, die in de punten a, b, c en d loodrecht op OX staan, zullen dan $A'a$ en $A''a$, alsmede $D'd$ en $D''d$ in elkanders verlengden komen; maar $B'b$ en $B''b$, of ook $C'c$ en $C''c$ zullen langs elkander gaan vallen. Derhalve zal de constructie-figuur, die uit Fig. 2 voortkomt, zóó zijn als wij ze in Fig. 3 hebben afgeteekend.

§ 13. Na deze verklaring volgt uit het in § 9 bewezene onmiddellijk: *dat, in eene constructiefiguur, de beide projectiën van eenig punt in de ruimte altijd gelegen zullen zijn in eene lijn die de as regthoekig snijdt; dat de verticale projectie juist zooveel boven of onder de as zal liggen, als het punt zelf zich boven of onder het horizontale vlak bevindt; en dat de horizontale projectie juist zooveel onder of boven de as zal gelegen zijn, als het punt zelf vóór of achter het verticale vlak ligt.*

§ 14. Daar aan weerszijden van de as eener constructiefiguur, zoowel horizontale als verticale projectiën van punten kunnen gelegen zijn, is het volstrekt noodig, dat men door eenig kenmerk deze beide soorten van projectiën van elkander onderscheidt. Te dien einde is men overeengekomen om, even als wij dit in Fig. 2 en 3 reeds gedaan hebben, elke horizontale projectie met één accent, elke verticale projectie met twee accenten te merken, waardoor alle dubbelzinnigheid verdwijnt. Om de punten door letters aan te wijzen, plaatst men verder bij elke projectie dezelfde letter, die men zich voorstelt dat in de ruimte bij het punt zelf geplaatst is. Die letters zijn echter niet altijd noodig ter onderscheiding der projectiën; hiertoe zijn dikwijls de accenten voldoende; zoo hebben wij b. v. in Fig. 4 eenige punten door middel hunner projectiën in eene constructiefiguur voorgesteld, en deze voorstelling bepaalt de plaats der punten in de ruimte volkomen. Denkt men zich namelijk de opeengeslagen projectievlakken weder in hun oorspronkelijken stand gebragt, zoodat de punten met één accent in het horizontale, die met twee accenten in het verticale vlak zijn gebleven, en verbeeldt men zich daarna uit die punten loodlijnen op de projectievlakken opgericht, dan zullen de snijpunten

dier loodlijnen de punten in de ruimte zijn, waartoe de projectiën behooren.

Lagen de projectiën van twee punten in de ruimte, in eene en dezelfde regthoekig door de as getrokken lijn, en wilde men dan die projectiën alleen door accenten onderscheiden, zoo zou men voor elk punt accenten van eene andere gedaante dienen te bezigen, ten einde daardoor aan te wijzen, wie de beide projectiën zijn, die tot hetzelfde punt behooren. Het is dan echter verkiesselijker eene gelijke letter bij de beide projectiën van hetzelfde punt te plaatsen, zooals in Fig. 5 geschied is, waar nu P' en P'' de projectiën van het eene, Q' en Q'' die van het andere punt zijn.

Hadden twee punten dezelfde horizontale maar verschillende verticale projectiën, dan zou men eigenlijk bij die horizontale projectie de twee letters moeten plaatsen, die bij de twee verticale voorkomen. Ten einde de figuur met niet meer letters dan noodig te overladen, doet men dit gewoonlijk niet, en ééne letter bij de horizontale projectie is dan ook meestal voldoende; zoo levert in Fig. 5 de voorstelling van twee verschillende punten, door eene gemeenschappelijke horizontale projectie T' , en twee verschillende verticale projectiën T'' en U'' geene dubbelzinnigheid op, zooals nog nader uit § 16 zal blijken.

Ligt een punt in één der projectievlakken, zoodat het punt zelf zijne projectie is (zie § 11) dan kan men bij dit punt zelf de behoorlijke accenten plaatsen. Alzoo hebben wij, in Fig. 3, E' en F' in plaats van E en F , G'' en H'' in plaats van G en H geschreven, zooals mede de dubbele letter I' , I'' in plaats van I . Dit is echter, hoe regelmatig het ook moge zijn, doorgaans onnoodig.

§ 15. In eene constructiefiguur kunnen de beide projectiën van een punt elkander zeer wel bedekken, dat is: een enkel punt vertoonen, hetzij dan dat dit boven of onder de as plaats hebbe. Is b. v. eenig punt boven de as, gelijktijdig de horizontale projectie R' en de verticale projectie R'' (Fig. 5) van een punt in de ruimte, dan volgt hieruit alleen dat het punt evenveel achter het verticale als boven het horizontale vlak ligt. Liggen de zamenvallende projectiën S' en S'' beide onder de as, dan ligt evenzoo het punt in de ruimte even ver onder het horizontale als vóór het verticale vlak.

Hier kan het plaatsen van de beide merken, bij hetzelfde punt der constructiefiguur, niet nagelaten worden.

§ 16. Van een punt in de ruimte komen in eene constructiefiguur niet anders dan de projectiën voor; het punt zelf is in die figuur nimmer aanwezig, immers zoo men onder punten in de ruimte niet mede begrijpt punten, die in de projectievlakken zelve gelegen zijn.

Wil men dus een punt in de ruimte opnoemen, dat door eene constructiefiguur is aangewezen, zoo kan men daartoe slechts de geaccenteerde letters bezigen, die bij de projectiën van het punt zijn geplaatst. Eene uitdrukking als: *het punt* (P' , P'') zal dus voortaan beteekenen: *het punt waarvan P' de horizontale en P'' de verticale projectie is*. Door deze wijze van zich uit te drukken, onderscheidt men nu in Fig. 5 de beide punten (T' , T'') en (T' , U'') van elkander, zonder dat het bezigen van eene enkele letter T' , voor beider horizontale projectiën, de minste onzekerheid overlaat.

§ 17. Een punt kan *boven*, *onder* of *in* het horizontale vlak, ook kan het *vóór*, *achter* of *in* het verticale vlak liggen. Elk dezer drie standen, met betrekking tot het eene projectievlak, kan met elk der drie standen ten aanzien van het andere gepaard gaan. Hieruit volgt, dat men negen verschillende standen van een punt onderscheiden kan. Om dit volkomen te doen inzien, hebben wij opzettelijk in Fig. 3 negen punten voorgesteld, waarvan er één in elk dier standen geplaatst is.

Zoo ligt dan:

- 1°. het punt (A' , A'') boven het horiz. en vóór het vertic. vlak;
- 2°. het punt (B' , B'') boven het horiz. en achter het vertic. vlak;
- 3°. het punt (C' , C'') onder het horiz. en vóór het vertic. vlak;
- 4°. het punt (D' , D'') onder het horiz. en achter het vertic. vlak;
- 5°. het punt (E' , E'') in het horiz. en vóór het vertic. vlak;
- 6°. het punt (F' , F'') in het horiz. en achter het vertic. vlak;
- 7°. het punt (G' , G'') boven het horiz. en in het vertic. vlak;
- 8°. het punt (H' , H'') onder het horiz. en in het vertic. vlak;
- 9°. het punt (I' , I'') in de beide projectievlakken, dus in de as.

§ 18. Door de projectie van eene kromme of regte lijn verstaat men de aaneenschakeling van de projectiën harer verschillende punten; terwijl de aaneenschakeling van de projecterende lijnen dier verschillende punten *het projecterend vlak* der kromme of regte lijn genoemd wordt. Hieruit volgt dadelijk: dat de projectie eener

kromme of regte lijn de gemeene doorsnede is van haar projecterend vlak met het vlak van projectie; en dat het projecterend vlak loodregt op het projectievlak is.

Indien men b.v., uit alle punten der kromme of regte lijn ABCD (Fig. 6, 7, 8, 9, 10 of 11), loodlijnen op het projectievlak OL heeft neergelaten, is de kromme of regte lijn A'B'C'D', die de voetpunten van al deze loodlijnen bevat, de projectie van de lijn ABCD op het vlak OL; het gebogene of platte vlak, waarin zich al die loodlijnen zelve bevinden, is het projecterend vlak der lijn ABCD; en dit projecterend vlak wordt door het projectievlak volgens de projectie A'B'C'D' gesneden.

§ 19. *In het algemeen is (zooals in Fig. 6 en 7) de projectie eener kromme lijn wederom eene kromme lijn, en haar projecterend vlak een cilindervlak (Meetk. § 407).*

Ligt echter (zooals in Fig. 8 is voorgesteld) eene kromme lijn ABCD in een plat vlak PQ, dat loodregt op het projectievlak staat, dan is haar projecterend vlak een plat vlak, namelijk het vlak PQ zelf, en hare projectie is dan eene regte lijn, vallende langs de doorsnede van het vlak PQ met het projectievlak OL. Want de loodlijnen AA', BB', CC', enz., uit de punten A, B, C, enz. op het vlak OL neergelaten, liggen allen in het vlak PQ (Meetk. § 322, 3°).

Eene kromme lijn kan dus in een bijzonder geval ook eene regte lijn tot projectie hebben.

§ 20. *Is eene kromme lijn evenwijdig met het vlak van projectie, dan zijn de kromme lijn en hare projectie gelijk en gelijkvormig.*

Laat bijv. (zooals in Fig. 7) A'B'C'D' de projectie op het vlak OL zijn, van eene kromme lijn ABCD, gelegen in een vlak PQ dat evenwijdig met OL is; indien men zich dan verbeeldt dat het vlak PQ evenwijdig met zich-zelf bewogen wordt, zal men gemakkelijk inzien dat die beweging derwijze kan plaats hebben, dat alle punten A, B, C, D, enz. langs de projecterende lijnen AA', BB', CC', DD' enz. glijden, tot dat zij met hunne projectiën zamenvallen. Daar dan A'B'C'D' volkomen door ABCD bedekt wordt, zijn deze kromme lijnen gelijk en gelijkvormig.

Hieruit blijkt tevens: *dat zoo men alle punten eener vlakke figuur projecteert op een vlak dat met haar vlak evenwijdig is, hierdoor in het projectievlak eene figuur ontstaan zal, die gelijk en gelijkvormig met de oorspronkelijke figuur is.*

§ 21. *De projectie eener regte lijn is in het algemeen wederom eene regte lijn, en haar projecterend vlak een plat vlak.*

Indien namelijk eene regte lijn ABCD (zooals in Fig. 9, 10 en 11 is voorgesteld) een schuinen of evenwijdigen stand met betrekking tot het projectievlak OL heeft, kan men door die lijn slechts één vlak loodrecht op het vlak OL brengen (*Meetk.* § 323). Dit loodrechte vlak is dan het projecterende vlak van de lijn; het snijdt het projectievlak volgens eene regte lijn A'B'C'D', en deze is dan (zie § 18) de projectie van ABCD.

Staat echter eene lijn AB (zooals in Fig. 12 is voorgesteld) loodrecht op het projectievlak OL, dan zullen de projecterende lijnen, die men uit hare verschillende punten op het vlak OL kan neerlaten, allen langs de lijn AB vallen en hare voetpunten in het snijpunt van AB met OL verkrijgen (*Meetk.* § 301). Dit enkele punt A' is dan de projectie der lijn AB, die nu geen projecterend vlak heeft.

Eene regte lijn heeft dus, in het bijzondere geval, dat zij loodrecht op het projectievlak is, een enkel punt tot projectie.

§ 22. Om de projectie te verkrijgen van eene regte lijn, die met betrekking tot het projectievlak een schuinen of evenwijdigen stand heeft, zal men blijkens de voorgaande § slechts nodig hebben twee van hare punten te projecteren en door de verkregene punten eene regte lijn te trekken; deze zal dan de begeerde projectie wezen.

Wanneer echter eene regte lijn ABCD het projectievlak in eenig punt S snijdt (zooals in Fig. 10), is dit snijpunt tevens een punt van hare projectie A'B'C'D'; want dit punt S ligt zoowel in het projecterende vlak als in het projectievlak. Is dus dit snijpunt bekend, dan kan men de projectie der lijn verkrijgen, door nog slechts één van hare punten te projecteren.

§ 23. Beschouwt men eene regte lijn AD van bepaalde lengte (Fig. 9, 10 en 11), dan zijn de projectiën A' en D' van hare uiteinden A en D, blijkbaar de uiteinden van hare projectie A'D'.

Heeft nu de lijn AD een schuinen stand met betrekking tot het projectievlak, zoo is zij altijd langer dan hare projectie A'D'. Want de lijn AD zelve is: of (zooals in Fig. 9) de schuine zijde van een regthoekig trapezium AA'D'D, dat de projectie A'D' tot regthoekszijde heeft; of (zooals in Fig. 10) de som van de schuine zijden van twee regthoekige driehoeken ASA' en DSD', waarvan twee regthoekszijden de projectie A'D' tot som hebben.

Is echter de lijn AD evenwijdig met het projectievlak (zooals in Fig. 11 is voorgesteld), dan is zij even lang als hare projectie A'D'; want de lijn en hare projectie zijn nu twee over elkander staande zijden van eenen regthoek AA'D'D.

Verlengt men in deze gevallen de projectie der lijn, dan is dit verlengde blijkbaar ook de projectie van het verlengde der lijn.

§ 24. Eene rechte of kromme lijn, die in het projectievlak ligt, kan daarop eigenlijk niet geprojecteerd worden; maar zulk eene lijn kan beschouwd worden als zelf hare projectie te zijn.

§ 25. Eene rechte of kromme lijn wordt, in het algemeen, door hare projectie op één vlak niet bepaald.

Immers, kent men van zulk eene lijn slechts de kromlijnige projectie A'B'C'D' (Fig. 6 of 7), zoo weet men niets meer dan dat de lijn gelegen is op een cilindervlak, waardoor het projectievlak OL, volgens de kromme lijn A'B'C'D', regthoekig gesneden wordt. Alle kromme lijnen op dat cilindervlak beschreven, hebben dezelfde kromme lijn A'B'C'D' tot projectie.

Kent men van eene lijn in de ruimte slechts de regtlijnige projectie A'B'C'D' (Fig. 8, 9, 10 of 11), zoo weet men niets meer, dan dat zij gelegen is in het platte vlak, dat men door A'B'C'D' loodregt op het projectievlak kan brengen, zoodat men zelfs niet eens ontdekt of zij (zooals in Fig. 8) eene kromme, dan wel (zooals in Fig. 9, 10 of 11) eene rechte lijn is. Alle kromme of rechte lijnen, die dan ook in het genoemde platte vlak (bijv. in het vlak PQ van Fig. 8) gelegen zijn, met uitzondering slechts van de rechte lijnen die loodregt op het projectievlak OL mogten staan, hebben hare projectiën langs dezelfde rechte lijn A'B'C'D'.

Weet men echter dat de projectie eener lijn een enkel punt A' is (Fig. 12), dan is zij, voor zoover hare lengte buiten beschouwing blijft, door die projectie volkomen bepaald; want zij is dan de eenige lijn AB, die door het punt A' loodregt op het projectievlak OL kan getrokken worden. Dit bijzondere geval is echter het eenige, waarin de stand eener lijn door ééne projectie bepaald wordt.

§ 26. Om dus eene lijn in de ruimte door middel van projectiën te bepalen, heeft men ten minste weder twee projectievlakken noodig, en als zoodanig gebruikt men ook nu dezelfde projectievlakken, het horizontale en verticale, die wij reeds leerden kennen. Naargelang de projectiën en de projecterende vlakken

op het horizontale of verticale vlak genomen worden, onderscheidt men ze ook hier door de benamingen: *horizontale en verticale projectie der lijn*; *horizontaal-projecterend* en *verticaal-projecterend vlak* (*).

Laat bijv. OL het horizontale en OM het verticale vlak voorstellen (Fig. 13, 14, 15 en 16), en dus OX de as van projectie zijn; indien men dan een genoegzaam aantal punten eener kromme lijn AD (Fig. 13 en 14), of twee punten (zie § 22) eener regte lijn AD (Fig. 15 en 16), op elk der vlakken OL en OM projecteert, verkrijgt men de horizontale projectie A'D' en de verticale projectie A''D'' dezer kromme of regte lijn. Ligt de kromme lijn (zooals in Fig. 14 is voorgesteld) in een plat vlak loodrecht op het horizontale, dan zal men, om de horizontale projectie te bekomen, blijkbaar slechts de projectiën van twee van hare punten noodig hebben.

Naargelang de horizontale projectie krom of regt is, zal het horizontaal-projecterend vlak der lijn een cilindervlak of een plat vlak zijn; even als het verticaal-projecterend vlak een cilindervlak of een plat vlak zal wezen, naargelang de verticale projectie krom of regt is.

§ 27. Behoudens eene enkele uitzondering, die wij in § 29 zullen doen kennen, *wordt eene lijn in de ruimte door hare beide projectiën volkomen bepaald*; want zij is niet anders dan de gemeene doorsnede van hare projecterende vlakken.

Zijn deze projectiën beide regtlijnig, dan is ook de lijn in de ruimte eene regte lijn; want in dit geval zijn de projecterende vlakken platte vlakken, die eene regte lijn tot gemeene doorsnede hebben (Meetk. § 298).

§ 28. Indien eene kromme of regte lijn in het horizontale vlak ligt, en dus zelf hare horizontale projectie is (zie § 24), valt hare verticale projectie blijkbaar in de as. Evenzoo valt in de as de horizontale projectie van elke kromme of regte lijn, die in het verticale vlak ligt, en dus zelf hare verticale projectie is.

§ 29. Ligt eene kromme lijn AB of eene regte lijn CD (Fig. 17) in een plat vlak PR, dat loodrecht op de as OX is en dus de projectievlakken snijdt volgens lijnen PQ en QR die almede loodrecht op de as staan, dan bevat dit vlak PR al de loodlijnen, die

(*) Omtrent deze benamingen gelden gelijke opmerkingen, als wij in de voorgaande noot aanvoerden.

men uit de verschillende punten van AB of CD, of ook uit andere punten van het vlak PR, op de vlakken OL en OM kan nederlaten. In de lijn PQ zal dus de horizontale, en in de lijn QR de verticale projectie vallen van AB, van CD, en van alle andere lijnen die in het vlak PR gelegen zijn, terwijl dit vlak PR zoowel het horizontaal-projecterend als het verticaal-projecterend vlak van al die lijnen is. In dit geval zullen dus de beide projecterende vlakken elkander niet snijden, maar elkander bedekken; de beide projectiën der lijnen AB en CD laten dus die lijnen niet alleen onbepaald, maar laten het zelfs onzeker of zij tot eene regte dan wel tot eene kromme lijn behooren.

Eene lijn wordt dus door hare beide projectiën niet bepaald, wanneer die projectiën regte lijnen zijn, die in eenig punt loodrecht op de as staan.

Weet men echter in dit geval dat de lijn in de ruimte eene regte lijn is, en kent men de projectiën van twee harer punten, dan bepalen die projectiën de lijn weder volkomen, omdat eene regte lijn door twee punten bepaald wordt.

§ 30. Staat eene onbepaaldelijk verlengde regte lijn AB loodrecht op het horizontale vlak OL (Fig. 18), dan is hare horizontale projectie een enkel punt A', terwijl zij geen horizontaal-projecterend vlak heeft (zie § 21). Alsnu staat haar verticaal-projecterend vlak AA''B''B (*Meetk.* § 321, en § 323 *Gev.* 3^o) en dus ook hare verticale projectie A''B'' loodrecht op de as, en wel in het voetpunt α der loodlijn, die men uit de horizontale projectie A' op de as kan neerlaten. De verticale projectie kan dus hier uit de horizontale afgeleid worden, en dit moest wel zoo zijn, omdat (zie § 25 aan 't slot) de projectie A' genoegzaam is om den stand der lijn in de ruimte te bepalen. Er bestaat dan ook nu geene snijding van twee projecterende vlakken.

Staat evenzoo eene lijn CD (Fig. 18) loodrecht op het verticale vlak OM, dan is hare verticale projectie een enkel punt C'', waaruit hare horizontale projectie kan afgeleid worden; terwijl de lijn geen verticaal-projecterend, maar wel een horizontaal-projecterend vlak heeft.

§ 31. Is eene lijn evenwijdig met het horizontale vlak, zooals bijv. de in Fig. 16 voorgestelde regte lijn AD, dan liggen al hare punten even ver van het horizontale vlak; volgens § 9 liggen dus ook de verticale projectiën van al hare punten even ver van de as,

weshalve dan ook de verticale projectie der lijn evenwijdig met de as moet loopen.

Evenzoo zal evenwijdig met de as loopen de horizontale projectie van elke lijn die evenwijdig met het verticale vlak is.

Hierbij zijn echter de gevallen der voorgaande § stilzwijgend uitgesloten, omdat eene regte lijn, die evenwijdig met het eene projectievlak is, tevens loodregt op het andere kan wezen.

Is eene regte lijn evenwijdig met elk der beide projectievlakken, dat is met andere woorden, loopt zij evenwijdig met de as, dan loopen ook hare beide projectiën evenwijdig met de as.

§ 32. Wanneer eene lijn, zooals bijv. de verlengde lijn AD van Fig. 15, het horizontale vlak snijdt, is dit snijpunt S vooreerst (zie § 22) een punt van de horizontale projectie dier lijn. Dit punt S heeft verder (zie § 11) zijne verticale projectie S' in de as; maar omdat S een punt van de lijn is, is S' een punt van hare verticale projectie (zie § 18); *indien dus eene lijn het horizontale vlak snijdt, zal ook hare verticale projectie de as snijden, en de regte lijn, die deze beide snijpunten vereenigt, zal loodregt op de as staan.*

Evenzoo zal, *indien eene lijn het verticale vlak snijdt, hare horizontale projectie de as snijden, en de regte lijn die de beide snijpunten vereenigt loodregt op de as staan.*

Wanneer eene lijn de as snijdt, is dit snijpunt zelf gelijktijdig zijne horizontale en verticale projectie (zie § 11 aan het slot), en het is dus ook een punt van de beide projectiën der lijn; in dit geval *zullen dus de beide projectiën der lijn elkander en de as in hetzelfde punt snijden.*

§ 33. Neemt men in elk der beide projectievlakken eene willekeurige kromme lijn aan, zoo zullen deze kromme lijnen niet als de beide projectiën van eene kromme lijn in de ruimte kunnen beschouwd worden, dan voor zoover de cilindervlakken, die volgens de aangenomene kromme lijnen loodregt op de projectievlakken kunnen opgericht worden, elkander snijden. De kromme lijnen EF en GH bijv., die in Fig. 17 respectievelijk in het horizontale en verticale vlak zijn getrokken, kunnen geenszins de beide projectiën van eene kromme lijn in de ruimte zijn; want van de bedoelde cilindervlakken bevindt er zich één aan weêrszijden van het vlak PQR, weshalve die cilindervlakken elkander onmogelijk snijden kunnen.

Neemt men in elk der beide projectievlakken eene regte lijn aan, zoodat die lijnen in verschillende punten loodregt op de as staan, zooals bijv. de lijnen PQ en TU in Fig. 17, dan kunnen deze lijnen geenszins de beide projectiën van eene lijn in de ruimte wezen. Want brengt men door PQ een vlak PR loodregt op het horizontale vlak OL, en door TU een vlak SU loodregt op het verticale vlak OM, zoo staan deze vlakken in verschillende punten Q en T loodregt op de as (*Meetk.* § 322, 1°, § 321 en § 323 *Gev.* 3°); deze vlakken, die nu de projecterende vlakken der lijn in de ruimte zouden moeten zijn, zijn dus evenwijdig en snijden elkander niet.

Neemt men echter in elk der projectievlakken eene willekeurige regte lijn aan, zoodanig dat zij geen van beide loodregt op de as zijn, dan zullen die lijnen altijd kunnen aangemerkt worden als de projectiën van eene regte lijn in de ruimte te wezen. Laten namelijk A'D' en A''D'' (Fig. 15 of 16) de aangenomene lijnen zijn, zoo kan men door deze lijnen vlakken A'ADD', A''ADD'' loodregt op de projectievlakken brengen. Die vlakken A'ADD' en A''ADD'' zullen elkander dan noodzakelijk snijden; want daar het ééne loodregt op het horizontale, het andere loodregt op het verticale is, kunnen zij elkander niet bedekken, of ook niet evenwijdig zijn, zonder loodregt op de as te staan, hetgeen strijdt tegen de onderstelling dat A'D' en A''D'' niet loodregt op de as zijn. De gemeene doorsnede van de vlakken A'ADD' en A''ADD'' is nu eene regte lijn (*Meetk.* § 298), die deze vlakken tot projecterende vlakken, en de lijnen A'D' en A''D'' tot projectiën heeft.

Neemt men slechts in één der projectievlakken, bijv. in het verticale, eene loodlijn op de as, zooals QR in Fig. 17 of A''a in Fig. 18, tot projectie eener lijn in de ruimte aan, dan kent men het verticaal-projecterend vlak, waarin die lijn moet gelegen zijn. Naargelang zij dus niet of al eene loodregt op het horizontale vlak staande regte lijn is, zal hare horizontale projectie, of zooals in Fig. 17 langs PQ vallen, of zooals in Fig. 18 een enkel punt A' zijn. In het laatste geval is de horizontale projectie genoegzaam om den stand der lijn in de ruimte te bepalen; in het andere zijn de beide projectiën daartoe ontoereikend.

Wordt in het horizontale vlak eene loodlijn op de as als projectie eener lijn in de ruimte aangenomen, dan moet evenzoo de verticale projectie, of eene regte lijn, die in hetzelfde punt loodregt

op de as staat, of een enkel punt wezen. In het laatste geval is wederom de verticale projectie genoegzaam om den stand der lijn in de ruimte te bepalen; terwijl in het andere geval de beide projectiën hiertoe ongenoegzaam zijn.

§ 34. Nadat kromme of regte lijnen op het horizontale en verticale vlak geprojecteerd zijn, kan men die lijnen met hare projecterende vlakken wegdenken, zoodat er slechts de projectievlakken met de daarin aanwezige projectiën overblijven. Brengt men nu wederom, even als in § 12 verklaard is, de projectievlakken door eene wenteling om hunne gemeene doorsnede op elkander, als wanneer zij eene constructiefiguur met de daarin aanwezige as uitmaken, zoo komen in deze constructiefiguur slechts de projectiën der lijnen in de ruimte voor; en door deze projectiën, die zich dan in eene en dezelfde platte teekening bevinden, worden nu, met uitzondering van het in § 29 aangewezen geval, de lijnen in de ruimte volkomen bepaald.

Evenzoo als dit in § 14 ten aanzien van punten is gezegd, kunnen echter zoowel horizontale als verticale projectiën van lijnen, aan deze of gene zijde van de as vallen; die beide soorten van projectiën moeten dus almede door een kenmerk van elkander onderscheiden worden, en als zoodanig bezigt men wederom één accent ter aanduiding der horizontale, en twee accenten ter aanduiding der verticale projectiën. Wil men hierbij van geene letters gebruik maken, dan zal men, voor verschillende lijnen, accenten van verschillende gedaanten dienen te bezigen, ten einde daardoor aan te wijzen, wie de horizontale en verticale projectiën zijn, die tot eene en dezelfde lijn in de ruimte behooren.

Zoo hebben wij bijv. in Fig. 19 drie verschillende regte lijnen, door middel van hare projectiën, in eene constructiefiguur voorgesteld, en door deze voorstelling is de stand van die lijnen in de ruimte volkomen bepaald. Denkt men namelijk de opeengeslagene projectievlakken weder in hunnen oorspronkelijken stand gebragt, zoodanig dat de projectiën in het horizontale of verticale vlak zijn gebleven, naargelang zij met één of twee accenten gemerkt waren, en verbeeldt men zich daarna, dat, volgens die projectiën, projecterende vlakken op de projectievlakken opgericht zijn, dan zullen die projecterende vlakken door hunne snijding de lijnen doen kennen, waartoe de projectiën behooren.

Gewoonlijk echter plaatst men, naar het voorschrift van § 14,

letters bij de projectiën van twee of meer punten der lijn; en, zoo men eene lijn van bepaalde lengte beschouwt, kiest men daartoe bij voorkeur hare uiteinden (zie § 23), wier projectiën dan voldoen moeten aan de in § 13 opgegevene eigenschap. Bij de gelijknamige projectiën der verschillende uiteinden of punten komen dan verschillende letters die op dezelfde wijze geaccenteerd zijn; terwijl bij de beide projectiën van hetzelfde uiteinde of punt, dezelfde letter verschillend geaccenteerd voorkomt. Evenzoo als zulks in § 16 met betrekking tot een punt is aangewezen, kan eene lijn in de ruimte, bij de op voorschrevene wijze in de constructiefiguur geplaatste letters, opgenoemd worden. Eene uitdrukking als: *de lijn* ($A'B', A''B''$), zal dus voortaan beteekenen: *de lijn, waarvan $A'B'$ de horizontale en $A''B''$ de verticale projectie is* (zie Fig. 19).

Hebben twee lijnen eene en dezelfde horizontale, maar verschillende verticale projectiën, dan maakt deze wijze van zich uit te drukken het weder overtuigend, bij die horizontale projectie de letters te plaatsen, die bij elk der beide verticale voorkomen; zoo zijn in Fig. 19 twee dergelijke lijnen ($A'B', A''B''$) en ($A'B', C''D''$) onderscheidenlijk aangewezen, zonder de figuur met de letters C' en D' te overladen, die men echter ook nog, des verkiezende, in A' en B' zou kunnen plaatsen.

§ 35. Eene rechte lijn kan met betrekking tot een der projectievlakken een schuinen, loodregten of evenwijdigen stand hebben, of ook zich in het projectievlak bevinden; en de stand, dien zij ten aanzien van het eene projectievlak heeft, kan gepaard gaan met verschillende standen ten aanzien van het andere; ook kan eene lijn de as van projectie, hetzij scheefhoekig, hetzij rechthoekig, snijden of kruissen.

Hoe, voor al deze bijzondere standen eener rechte lijn, hare projectiën zich in eene constructiefiguur moeten voordoen, volgt uit het tot dusver voorgedragene zoo onmiddellijk, dat eene nadere verklaring overtuigend mag geacht worden. Het is dus alleen ter meerdere opheldering, dat wij in eene constructiefiguur (Fig. 20) de projectiën van eenige rechte lijnen van bepaalde lengte hebben aangewezen, voor de voornaamste standen die er te onderscheiden vallen.

Zoo is namelijk:

- 1°. de lijn ($A'B', A''B''$) in geenerlei bijzonderen stand;
 - 2°. de lijn ($C'D', C''D''$) evenwijdig met het horiz. vlak;
 - 3°. de lijn ($E'F', E''F''$) evenwijdig met het vertic. vlak;
 - 4°. de lijn ($G'H', G''H''$) evenwijdig met beide, of met de as;
 - 5°. de lijn (I', I'') loodregt op het horiz. vlak;
 - 6°. de lijn (J', J'') loodregt op het vertic. vlak;
 - 7°. de lijn ($K'L', K''L''$) in het horizontale vlak;
 - 8°. de lijn ($M'N', M''N''$) in het verticale vlak;
 - 9°. de lijn ($P'Q', P''Q''$) in beide, of langs de as;
 - 10°. de lijn ($R'S', R''S''$) de as scheefhoekig snijdende;
 - 11°. de lijn ($T'U', T''U''$) in het punt (T', T'') loodregt op de as;
 - 12°. de lijn ($V'W', V''W''$) in een vlak loodregt op de as;
- in de drie laatste gevallen, even als in het eerste, heeft de lijn een schuinen stand met betrekking tot elk der projectievlakken; in de drie eerste gevallen kruissen de lijnen de as scheefhoekig, terwijl de lijnen, onder 5°, 6° en 12° genoemd, de as regthoekig kruissen; de lijnen, onder 7°, 8° en 10° genoemd, snijden de as scheefhoekig, terwijl alleen de lijn, onder 11° vermeld, haar regthoekig snijdt.

In de voorgaande opgaaft hebben wij de gevallen niet opgenomen, dat de ligging van eene regte lijn in het eene projectievlak, gepaard ging met den evenwijdigen of loodregten stand ten aanzien van het andere, en laten dit aan den lezer over. Ook is het klaar dat, hoezeer wij in onze figuur doorgaans de horizontale projectiën onder en de verticale projectiën boven de as geteekend hebben, hieromtrent dezelfde verscheidenheid bestaan kan, die wij vroeger ten aanzien van de projectiën van punten in de ruimte leerden kennen.

§ 36. Neemt men in eene constructiefiguur twee willekeurige regte lijnen aan, die echter geen van beide loodregt op de as staan, dan zal men van deze lijnen (zie § 33) altijd de eene als de horizontale, de andere als de verticale projectie eener lijn in de ruimte mogen aanmerken, mits men zich slechts die lijn en hare projectiën als onbepaaldelijk verlengd voorstelt.

Zoo kunnen wij bijv. de in Fig. 21 willekeurig getrokken lijnen $A''B''$ en $C'D'$ zeer wel als de projectiën eener lijn in de ruimte beschouwen, maar het zijn geene projectiën van hetzelfde bepaalde deel dier lijn. Door $A''B''$ en $C'D'$ te verlengen, verkrijgen wij eigenlijk de projectiën van de lijn in de ruimte; en door voorts uit A'', B'', C' en D' loodlijnen op de as te trekken, vinden wij

dat ($A'B'$, $A''B''$) en ($C'D'$, $C''D''$) de bepaalde deelen dier lijn zijn, waartoe de aangenomene projectiën $A'B''$ en $C'D'$ behooren.

§ 37. Uit hetgeen tot hiertoe over de projectiën van punten en lijnen gezegd is, volgt dadelijk, dat men al de hoekpunten en zijden eens veelhoeks, of ook al de hoekpunten en ribben van een veelvlakkelig ligchaam, op de aangenomene projectievlakken zal kunnen projecteren. De figuren, die men hierdoor in het horizontale en verticale vlak verkrijgt, heeten dan *de horizontale en verticale projectiën van den veelhoek, van het ligchaam*; en door de constructiefiguur, die deze projectiën bevat, wordt zulk een veelhoek, zulk een ligchaam, dan even naauwkeurig aangeduid, als eene platte figuur door hare afteekening in haar eigen vlak. Hoe men lichamen, ook door gebogen vlakken begrensd, even naauwkeurig door middel eener constructiefiguur kan aanduiden, zal later blijken.

Daar men echter dikwijls verplicht is, zich de platte of gebogene vlakken, die een ligchaam begrenzen, als onbepaaldelijk verlengd voor te stellen, en men ook niet zelden lichamelijke uitgebreidheden te beschouwen heeft, die niet aan alle zijden begrensd zijn, is het noodzakelijk dat men almede onbepaaldelijk verlengde platte of gebogene vlakken, door middel der reeds verklaarde constructiefiguren, kunne aanduiden. Hoe die aanduiding geschiedt, zullen wij vooreerst alleen ten aanzien van platte vlakken verklaren (*).

§ 38. Ter bepaling van een vlak, kan het volstrekt geen nut aanbrengen, dat vlak, even als eene lijn, op een of meer projectievlakken te projecteren.

In het bijzondere geval, dat het te bepalen vlak, zooals PQ in Fig. 8, loodregt op het horizontale vlak OL staat, kan wel de gemeene doorsnede QR van die beide vlakken, de horizontale projectie van het vlak PQ genoemd worden, omdat de loodlijnen, die men uit de verschillende punten van het vlak PQ op het vlak OL kan nederlaten, allen hare voetpunten in de doorsnede QR verkrijgen; maar hieraan heeft men ook in dit geval weinig, omdat QR tevens de horizontale projectie is van de verschillende kromme of rechte lijnen in het vlak PQ gelegen.

(*) Daar zoo gebogen vlakken, en diensvolgens ook kromme lijnen, vooreerst buiten beschouwing blijven, zullen wij voortaan door de woorden *vlak* en *lijn* altijd een plat vlak en eene rechte lijn verstaan, tenzij het tegendeel uitdrukkelijk mogt blijken.

Indien echter het te bepalen vlak niet loodregt op het horizontale staat, en men dan uit al zijne punten loodlijnen op het horizontale vlak nederliet, zou de aaneenschakeling van de voetpunten dier loodlijnen het geheele horizontale vlak bedekken, waardoor dan het geheele horizontale vlak de projectie van het andere zou zijn. Dit projecteren kan dus geen middel opleveren, om verschillende vlakken van elkander te onderscheiden, dat is: om een vlak te bepalen.

Wel kan eene vlakke figuur, bijv. om de eenvoudigste te kiezen een driehoek, zooals in de voorgaande § gezegd is, op de projectievlakken geprojecteerd worden; en daar dan de beide projectiën den driehoek volkomen bepalen, zal ook het vlak waarin hij ligt bepaald zijn. Maar deze wijze, om een vlak te bepalen, zou lastig en omslagtig zijn, en derhalve heeft men een eenvoudiger middel gekozen, om de projectievlakken tot bepaling van een vlak te doen dienen.

§ 39. Daar namelijk de stand van een vlak, door twee in dat vlak gelegene lijnen volkomen bepaald wordt (*Meetk.* § 295, *Geom.* 2°), heeft men de beide lijnen, volgens welke de projectievlakken door eenig vlak gesneden worden, tot bepaling van dat vlak aangenomen. Deze lijnen, die men *de doorgangen* van het vlak noemt, verdienen daartoe boven alle andere de voorkeur, omdat zij zich in de projectievlakken bevinden, en dus ook onveranderd daarin aanwezig blijven, als de projectievlakken, tot daarstelling der constructiefiguur, op elkander worden neergeslagen. De beide doorgangen van een vlak, worden door de benamingen *horizontale en verticale doorgang* onderscheiden, naargelang zij in het horizontale of verticale vlak gelegen zijn (*).

Laat bijv. een vlak Aa (Fig. 22) het horizontale vlak OL volgens AA_1 , en het verticale vlak OM volgens AA_2 , snijden, dan is AA_1 de horizontale doorgang en AA_2 de verticale doorgang van het vlak Aa . Dit vlak is het eenige, dat men door de beide lijnen AA_1 en AA_2 kan brengen, en het wordt dus door zijne beide doorgangen volkomen bepaald.

§ 40. Wanneer een vlak Aa de as OX in eenig punt A snijdt,

(*) Deze benamingen moeten weder beschouwd worden als verkortingen van: *doorgang met het horizontale vlak*, *doorgang met het verticale vlak*; de benaming *verticale doorgang* zou anders onnaauwkeurig zijn, want slechts in een bijzonder geval is een verticale doorgang eene verticale lijn.

is dit punt blijkbaar een punt van elk^o der beide doorgangen. *De beide doorgangen van een vlak, dat niet evenwijdig met de as is, snijden dus de as in hetzelfde punt.*

Trekt men dan ook, uit verschillende punten B en C van de as (Fig. 22), lijnen, de eene BB, in het horizontale, de andere CC,, in het verticale vlak, zoo kunnen deze lijnen geenszins de beide doorgangen van een vlak zijn; immers zoo men onderstelde dat zij het waren, zou het vlak, omdat het door BB, gaat de as in B, omdat het door CC,, gaat de as in C moeten snijden, hetgeen ongerijmd is, omdat een vlak eene lijn slechts in één punt snijden kan.

Trekt men echter uit een willekeurig punt B van de as lijnen BB, en BB,, in elk der projectievlakken, dan mogen deze lijnen als doorgangen van een vlak beschouwd worden; namelijk van het vlak, dat men door die twee lijnen brengen kan.

§ 41. Wanneer een vlak evenwijdig met het horizontale is, en dus het horizontale vlak niet snijdt, heeft het geen horizontalen doorgang; de verticale doorgang is dan evenwijdig met de as (*Meetk.* § 327). De verticale doorgang, gepaard met het ontbreken van den horizontalen, bepaalt in dit geval het vlak volkomen; want het is het eenige vlak dat men, door den verticalen doorgang, evenwijdig met het horizontale vlak kan brengen. Die verticale doorgang zal voorts blijkbaar boven of onder de as vallen, naargelang het vlak boven of onder het horizontale gelegen is.

Is een vlak evenwijdig met het verticale, dan heeft het evenzoo geen verticalen doorgang, terwijl de horizontale evenwijdig met de as loopt. Die horizontale doorgang, gepaard met het ontbreken van den verticalen, bepaalt nu weder het vlak. Hier zal de horizontale doorgang vóór of achter de as vallen, naargelang het vlak vóór of achter het verticale gelegen is.

§ 42. Wanneer een vlak evenwijdig met de as is, zonder evenwijdig met een der projectievlakken te zijn, loopen de beide doorgangen evenwijdig met de as (*Meetk.* § 312, *Gev.* 4^o). Deze doorgangen kunnen, ieder op zich zelf, aan de eene of andere zijde van de as gelegen zijn, al naar dat de stand van het vlak is.

Zoo hebben wij in Fig. 23 twee vlakken PQ en RS evenwijdig met de as OX voorgesteld, die beide den horizontalen doorgang D,D, en E,E, vóór de as hebben; maar waarvan het eene den verticalen doorgang D,,D,, boven de as, het andere den verticalen doorgang E,,E,, beneden de as heeft.

§ 43. Wanneer een vlak Pp loodrecht op het horizontale vlak is (Fig. 24), zonder evenwijdig met of loodrecht op het verticale te wezen, staat zijn verticale doorgang $PP_{//}$ loodrecht op de as, terwijl de horizontale PP , schuin op de as staat. Want de vlakken OM en Pp zijn beide loodrecht op OL ; hunne gemeene doorsnede $PP_{//}$ is dus (Meetk. § 323, *Gev.* 2^o) almede loodrecht op OL , en bijgevolg loodrecht op OX . Voorts is PP , schuin op de as, want stond ook PP , loodrecht op de as, dan zou het vlak Pp loodrecht op OX , en dus tegen de onderstelling loodrecht op het verticale vlak OM zijn.

Evenzoo zal, als een vlak Qq loodrecht op het verticale vlak is, zonder evenwijdig met of loodrecht op het horizontale te zijn, de horizontale doorgang QQ , van dat vlak loodrecht op de as, en de verticale doorgang $QQ_{//}$, schuin op de as staan.

Staat een vlak loodrecht op het horizontale en verticale vlak beide, dus loodrecht op de as, zooals bijv. het vlak SU in Fig. 17, dan zullen blijkbaar de beide doorgangen TS en TU loodrecht op de as zijn.

§ 44. Gaat een vlak door de as, dat is ligt de as in het vlak, dan is de as zelve gelijktijdig de horizontale en de verticale doorgang van dat vlak; die beide doorgangen zijn in dit geval geene twee verschillende lijnen, en laten het vlak dus onbepaald. Dit is echter het eenige geval, waarin een vlak door middel zijner horizontale en verticale doorgangen niet kan bepaald worden.

Kent men in dit geval de projectiën van eenig buiten de as liggend punt van het vlak, dan is het wederom bepaald, omdat men door dat punt en de as slechts één vlak kan brengen. (Meetk. § 295, *Gev.* 2^o).

§ 45. Uit het voorgaande volgt onmiddellijk, dat men twee willekeurige lijnen, waarvan de eene in het horizontale, de andere in het verticale vlak is getrokken, al of niet als de doorgangen van een vlak kan beschouwen, naargelang zij al of niet, hetzij door een en hetzelfde punt van de as gaan, hetzij beide evenwijdig met de as loopen. Alsmede dat men eene enkele lijn, in een der projectievlakken evenwijdig met de as getrokken, altijd kan beschouwen als den doorgang van een vlak, dat evenwijdig met het andere projectievlak is.

§ 46. Nadat in de projectievlakken de doorgangen van een of meer vlakken zijn aangewezen, kan men die vlakken wegdenken, zoodat er slechts de projectievlakken, met de zich daarin bevinde doorgangen, overblijven. Brengt men daarna, zooals dit

vroeger verklaard is, de projectievlakken op elkander, zoo blijven, in de daaruit ontstaande constructiefiguur, de genoemde doorgangen aanwezig; en deze, die zich nu in dezelfde platte teekening bevinden, bepalen dan de vlakken in de ruimte volkomen. Immers zoo men de projectievlakken weder in hunnen oorspronkelijken stand brengt, terwijl men elken doorgang in zijn gelijknamig projectievlak laat blijven, en zoo men dan daarna, door elk paar bij elkander behoorende doorgangen een vlak brengt, verkrijgt men de vlakken die door deze doorgangen bepaald worden.

Ook hier is het blijkbaar noodig de horizontale en verticale doorgangen door een kenmerk van elkander te onderscheiden. Dit geschiedt weder door letters met enkele accenten bij de horizontale, letters met dubbele accenten bij de verticale doorgangen, en letters zonder accenten bij hunne snijpunten met de as te plaatsen; terwijl men voorts dezelfde letter bezigt voor de beide doorgangen van een en hetzelfde vlak.

Ten einde alle verwarring tusschen projectiën van lijnen en doorgangen van vlakken te vermijden, zullen wij steeds, zooals dit reeds in de voorgaande figuren stilzwijgend is geschied, de accenten aan het hoofd of aan den voet der letters plaatsen, naargelang zij tot projectiën of doorgangen behooren. Voor zoover echter eene lijn gelijktijdig de projectie van eene lijn en de doorgang van een vlak mogt wezen, zullen wij de eerstgebruikte letters en accenten behouden, ten einde onze figuren niet met meer letters dan noodig is te overladen.

Om een vlak in de ruimte bij de in de constructiefiguur voorkomende letters op te noemen, gebruiken wij overigens dergelijke uitdrukkingen, als wij reeds met betrekking tot punten en lijnen opgaven. *Het vlak* ($A, AA_{,,}$), beteekent dus: *het vlak waarvan $AA_{,,}$ de horizontale en $AA_{,,}$ de verticale doorgang is; het vlak* ($B, B_{,,}$ $B_{,,} B_{,,}$) zou beteekenen: *het vlak waarvan $B, B_{,,}$ en $B_{,,} B_{,,}$ de doorgangen zijn; door het vlak* ($C, C_{,,}$) zal verstaan worden: *het vlak dat, $C, C_{,,}$ tot horizontalen doorgang hebbende, geen verticalen doorgang heeft en dus evenwijdig met het verticale vlak loopt; enz.*

§ 47. Een vlak kan met betrekking tot een projectievlak, eenen schuinen, loodregten of evenwijdigen stand hebben. De stand, met betrekking tot het eene projectievlak, kan met verschillende standen ten aanzien van het andere gepaard gaan. Hoe voor al deze bijzondere standen de doorgangen van het vlak zich in de

constructiefiguur voordoen, is in het voorgaande volkomen gebleken; en wij vergenoegen ons dus met, tot nadere opheldering, wederom in eene constructiefiguur (Fig. 25) de doorgangen van eenige vlakken in hunne onderscheidene standen voor te stellen.

Zoo is namelijk:

- 1°. het vlak $(A, AA_{//})$ of $(B, BB_{//})$ in geenerlei bijzonderen stand;
- 2°. het vlak $(C, C_{//}, C_{//}, C_{//})$ evenwijdig met de as van projectie;
- 3°. het vlak $(D_{//}, D_{//})$ evenwijdig met het horizontale vlak;
- 4°. het vlak $(E, E_{//})$ evenwijdig met het verticale vlak;
- 5°. het vlak $(F, FF_{//})$ loodregt op het horizontale vlak;
- 6°. het vlak $(G, GG_{//})$ loodregt op het verticale vlak;
- 7°. het vlak $(H, HH_{//})$ loodregt op de as;

in de beide eerstgenoemde gevallen, heeft het vlak een schuinen stand met betrekking tot elk der projectievlakken.

In de voorgaande opgaaf hebben wij het geval niet opgenomen, dat een vlak door de as gaat en dus door zijne langs de as valende doorgangen niet kan bepaald worden. Hoezeer wij voorts de doorgangen, die met de as evenwijdig loopen, boven of onder de as geteekend hebben, naargelang het verticale of horizontale doorgangen waren, is het klaar, dat hieromtrent alweder dezelfde verscheidenheid bestaan kan, die vroeger ten aanzien van de projectiën van punten is aangewezen.

§ 48. Wanneer een vlak de as snijdt, is men gewoon in de constructiefiguur slechts het deel van den horizontalen doorgang dat onder, en het deel van den verticalen doorgang dat boven de as valt, te teekenen. Het is echter klaar, dat, wanneer men de alzo geteekende doorgangen door de as heen verlengt, die verlengden altijd tot denzelfden horizontalen of verticalen doorgang blijven behooren. In Fig. 25 is dus de onbepaaldelijk verlengde $B, B_{//}$ de horizontale, en evenzoo $B_{//}, B_{//}$ de verticale doorgang van het vlak $(B, BB_{//})$.

Voorts is het almede klaar, dat van zulk een vlak de deelen der verschillende doorgangen, die in de constructiefiguur aan weerszijden van de as gelegen zijn, zeer wel in elkanders verlengden kunnen vallen, en dat zij dan slechts ééne lijn vertoonen, die de as snijdt. De beide doorgangen, onbepaaldelijk verlengd gedacht, zullen in dit geval elkander bedekken.

Dat de beide doorgangen van een vlak elkander bedekken, kan almede gebeuren, indien die doorgangen evenwijdig met de as zijn.

§ 49. Daar de beschrijvende Meetkunst uitsluitend het gebruik van constructiefiguren vordert, en daar de in die figuren aanwezige horizontale en verticale projectiën en doorgangen toereikend zijn, om punten, lijnen en vlakken volkomen te bepalen (behoudens de enkele uitzonderingen in § 29 en § 44 aangewezen) zullen wij in 't vervolg een punt, eene lijn of een vlak *gegeven* noemen, wanneer hunne horizontale en verticale projectiën of doorgangen in eene constructiefiguur gegeven zijn. Wordt er, onder zekere voorwaarden, gevraagd een punt, eene lijn of een vlak in de ruimte te vinden, dan zal hierdoor evenzoo niets anders verstaan worden, dan het vinden hunner projectiën of doorgangen in eene constructiefiguur.

§ 50. De onderstelling dat een der beide projectievlakken een waterpassen stand heeft (zie § 7), is wel bijzonder geschikt om het voorstellingsvermogen te hulp te komen; ook heeft zij aanleiding gegeven tot het gebruik der woorden „horizontaal en verticaal”, om al wat tot het eene of andere projectievlak behoort onderscheidenlijk aan te duiden; maar die onderstelling heeft overigens op al de voorgaande verklaringen geen den minsten invloed. Neemt men dus twee projectievlakken aan, die, mits onderling regthoekig, een willekeurigen stand in de ruimte hebben, en onderscheidt men deze vlakken van elkander door de dan on-eigenlijke benamingen van horizontaal en verticaal vlak, zoo blijft al het voorgedragene onveranderd stand houden.

Derhalve zal men dan ook steeds de horizontale en verticale vlakken met elkander kunnen verwisselen.

§ 51. Niet alleen om in het geval van § 29 eene lijn, of in het geval van § 44 een vlak, te bepalen, maar ook om andere redenen, die later van zelf zullen blijken, neemt men behalve het horizontale en verticale vlak, dikwijls nog een *derde projectievlak* aan, dat loodrecht op de as staat en dus almede verticaal is. Hierdoor heeft men dan de drie onderling loodrechte projectievlakken in Fig. 26 voorgesteld, waar OL het horizontale, OM het verticale en ON het derde projectievlak verbeeldt. Deze drie vlakken snijden elkander volgens drie onderling regthoekige lijnen of assen OX, OY en OZ (*Meetk.* § 323, *Gev.* 4^o). Op dit derde projectievlak nu heeft in het algemeen elk punt, elke lijn eene projectie, elk vlak eenen doorgang; zulk eene projectie of zulk eenen doorgang zullen wij door de benamingen *derde projectie*, *derde door-*

gang onderscheiden, en in de figuren, waar dit niet overtollig mogt zijn, door hunne met drie accenten gemerkte letters aanwijzen.

§ 52. Heeft men een punt A op de drie genoemde projectievlakken in A', A'' en A''' geprojecteerd, en brengt men door de projecterende lijnen AA', AA'' en AA''', twee aan twee, vlakken, dan sluiten deze met de projectievlakken een regthoekig parallelopipedum OA in; zoodat $a''A''' = Oa' = aA'$ en $a'A''' = Oa'' = aA''$ is. Door de gelijkheid dezer lijnen, kan dus de plaats van het punt A''' in het vlak ON gevonden worden, wanneer de plaats der punten A' en A'' in de vlakken OL en OM bekend is.

Heeft men een vlak Bb, dat de drie projectievlakken snijdt, dan zijn de snijpunten, van den horizontalen doorgang BB, met OY en van den verticalen doorgang BB,, met OZ, blijkbaar tevens punten van den derden doorgang B,,,B,,,; uit het kennen der twee eerste doorgangen kan dus onmiddellijk de derde doorgang gevonden worden.

§ 53. Om uit de drie genoemde projectievlakken, die men zich wederom aan weerszijden van hunne gemeene doorsneden onbepaaldelijk verlengd voorstelt, eene constructiefiguur te verkrijgen, laat men het derde vlak ON (Fig. 26) om de doorsnede OZ wendelen, totdat het voorste gedeelte ON van dit derde vlak, in het verlengde komt van het deel OM des verticalen vlaks; terwijl overigens het horizontale en verticale vlak even als vroeger op elkander gewenteld worden.

Door deze wenteling komen dan de drie projectievlakken van Fig. 26, met de daarin aanwezige projectiën en doorgangen, in een en hetzelfde vlak te liggen; en wel zóó, als wij hen in Fig. 27, met behoud van de grenslijnen, die wij in Fig. 26 tot hunne perspectievische afbeelding noodig hadden, hebben voorgesteld. In deze nieuwe figuur, die nu eene constructiefiguur daargestelt, komt dezelfde lijn OY tweemaal voor; en door cirkelkwadranten, uit O als middelpunt beschreven, zal men onmiddellijk kunnen aanwijzen, welke punten, van deze tweemaal voorkomende lijn OY, werkelijk een en hetzelfde punt verbeelden; zooals bijv. het punt a'. Voorts komen hier, even als aA' en aA'' , zoo ook $a''A''$ en $a''A'''$ in elkanders verlengden.

Daar men echter aan de projectievlakken, als onbepaaldelijk verlengd, geene grenzen toekent, zal men de in Fig. 27 behoudene grenslijnen moeten weglaten, om de eigenlijke uit Fig. 26

ontstaande constructiefiguur te bekomen, die dus zijn zal zooals wij ze in Fig. 28 hebben voorgesteld. Ook hier blijft steeds dezelfde lijn OY tweemaal voorkomen; terwijl almede het verlengde van OY, dat langs OX valt, dezelfde lijn is als het verlengde van OY dat langs OZ ligt, en ook in die verlengden, door uit O beschrevene cirkelkwadranten, de punten, die slechts een en hetzelfde punt verbeelden, worden aangewezen.

§ 54. Om dus in eene constructiefiguur, die aanvankelijk alleen uit het horizontale en verticale vlak was zamengesteld, het bedoelde derde projectievlak aan te nemen, heeft men niets anders te doen, dan door eenig punt O (Fig. 28) van de reeds aanwezige as OX, eene lijn YZ regthoekig op die as te trekken; en zich vervolgens voor te stellen, dat een vlak, OY tot horizontalen en OZ tot verticalen doorgang hebbende, om dien verticalen doorgang OZ wentelende, op het vlak der reeds bestaande constructiefiguur zoodanig is neergeslagen, dat de lijn OY van dit neergeslagen vlak, in het verlengde van OX is gekomen.

Om, na het aannemen van dit derde projectievlak, de derde projectie te vinden van een punt (A' , A''), welks horizontale en verticale projectiën gegeven zijn, heeft men weder niets anders te doen, dan: uit A' en A'' lijnen $A'a'$ en $A''a''$ evenwijdig met de as OX te trekken; het punt a' , waar de eerste dezer lijnen OY ontmoet, door een uit O beschreven cirkelboog op het verlengde van OX over te brengen, en uit dit overgebrachte punt eene loodlijn op de verlengde OX op te rigten; het snijpunt van deze loodlijn met de verlengde $A''a''$ is dan de begeerde derde projectie A''' .

Was omgekeerd de derde projectie A''' , benevens het punt a gegeven, waar de as door de vereenigingslijn der horizontale en verticale projectiën gesneden wordt, dan zou men blijkbaar even gemakkelijk de projectiën A' en A'' zelve, kunnen construeren.

Het vinden van den derden doorgang $B_{///}B_{///}$ van een vlak, welks horizontale en verticale doorgangen BB_1 en BB_2 gegeven zijn, is nog gemakkelijker. Immers het snijpunt van den verticalen doorgang met OZ is dadelijk één punt van dien derden doorgang, waarvan een tweede punt gevonden wordt, als men het snijpunt van den horizontalen doorgang met OY, door een uit O beschreven cirkelboog, op het verlengde van OX overbrengt.

Was omgekeerd de derde doorgang, en het punt B waar het

vlak de as snijdt, gegeven, dan zou men even gemakkelijk de horizontale en verticale doorgangen kunnen construeren.

§ 55. De horizontale en verticale vlakken OL en OM (Fig. 26), die de ruimte in vier tweevlakkige hoeken verdeelen, verdeelen het onbepaaldelijk verlengde derde projectievlak ON in vier rechte hoeken, waarvan YOZ er één is. De derde projectie van een punt in de ruimte zal blijkbaar binnen den eenen of anderen van die vier rechte hoeken vallen, naargelang het punt zelf binnen den eenen of anderen der genoemde tweevlakkige hoeken ligt. Naargelang hiervan zal dus, ook in de constructiefiguur (Fig. 28), de derde projectie binnen dezen of genen van de vier hoeken vallen, aldaar door de snijding der lijnen OX en YZ gevormd.

Ook ingeval een punt in de ruimte in een anderen tweevlak-kigen hoek ligt, dan het in Fig. 26 voorgestelde punt A, zal men slechts den weg behoeven te volgen, dien wij in de voorgaande § aanwezen, om de derde projectie van het punt uit zijne gegevene horizontale en verticale projectiën te vinden. Hierbij zal men zich echter, als het punt achter het verticale vlak ligt, van de verlengden der tweemaal voorkomende lijn OY moeten bedienen. Tot opheldering hebben wij in Fig. 29 de derde projectiën P''' , Q''' en R''' geconstrueerd van drie verschillende punten (P' , P''), (Q' , Q'') en (R' , R''), wier horizontale en verticale projectiën gegeven waren. Punten, in het horizontale vlak gelegen, verkrijgen blijkbaar hunne derde projectie in de lijn YOX; punten, in het verticale vlak gelegen, verkrijgen die in de lijn ZOY; terwijl het punt O de derde projectie is van alle punten die in de as liggen.

Ook wanneer een vlak een anderen stand heeft, dan het in Fig. 26 voorgestelde vlak Bb , kan 'men den weg der voorgaande § blijven volgen, om in eene constructiefiguur, na daarin het derde projectievlak te hebben aangenomen, den derden doorgang te vinden, als de horizontale en verticale doorgangen gegeven zijn. Hierbij zal men slechts, naar het valt, hetzij van het verlengde van OZ, hetzij van de verlengden der tweemaal voorkomende OY, gebruik moeten maken. Tot opheldering hebben wij wederom in Fig. 30 de derde doorgangen $E_{,,,}$, $F_{,,,}$ en $G_{,,,}$ geconstrueerd van drie verschillende vlakken ($E,EE_{,,}$), ($F,FF_{,,}$) en ($G,G_{,,}$, $G_{,,}G_{,,}$), wier horizontale en verticale doorgangen gegeven waren. Vlakken loodregt op de as OX staande hebben blijkbaar geen derden

doorgang, terwijl vlakken die overigens loodregt op het horizontale of verticale vlak staan, een derden doorgang loodregt op YOX of op ZOY zullen hebben.

† § 56. Wanneer eene regte lijn door hare horizontale en verticale projectiën gegeven is, kan men hare derde projectie volgens § 22 vinden, door de derde projectiën van twee van hare punten te construeren, en hiertoe is in de voorgaande §§ de weg aangewezen. Heeft de lijn eene bepaalde lengte, dan kan men zich daarbij van hare uiteinden bedienen.

Kiezen wij, om dit door een voorbeeld op te helderen, eene regte lijn van bepaalde lengte ($A'B'$, $A''B''$), gelegen in een vlak, dat loodregt op de as van projectie is (Fig. 31); construeren wij dan volgens § 54 de derde projectie van haar uiteinde (A' , A''), evenzoo de derde projectie van haar uiteinde (B' , B''), en vereenigen wij deze derde projectiën A''' en B''' door eene regte lijn, dan is $A'''B'''$ de derde projectie van de lijn ($A'B'$, $A''B''$).

Staat zulk eene lijn, zooals bijv. ($C'D'$, $C''D''$), in een punt (C' , C''), loodregt op de as, dan valt de derde projectie van dit punt (C' , C'') blijkbaar in O, en men behoeft slechts de derde projectie D''' van het andere uiteinde (D' , D'') der lijn te construeren, om hare derde projectie OD''' te verkrijgen.

De hier beschouwde lijnen ($A'B'$, $A''B''$) en ($C'D'$, $C''D''$) verkeeren in het geval van § 29, zoodat zij door hare horizontale en verticale projectiën niet bepaald zijn. Om dan ook hare derde projectiën te kunnen vinden, was het vooreerst noodig te weten dat de gegeven projectiën tot *regte* lijnen behoorden, terwijl men ten andere de projectiën van twee punten van elke lijn, hier de uiteinden, moest kennen. Zijn echter de derde projectiën, benevens de horizontale of verticale, gegeven, dan worden daardoor ook in dit geval de lijnen volkomen bepaald, zonder dat men vooruit weet dat die lijnen regt zijn, en zonder dat men de projectiën van twee punten in elke lijn kent.

Het zal wel onnoodig zijn, meer voorbeelden van het construeren van de derde projectie eener lijn bij te brengen, en daarbij de gegevene lijn in verschillende standen aan te nemen; alleen willen wij doen opmerken, dat de derde projectie loodregt op YOX, loodregt op ZOY, of een enkel punt zal wezen, naargelang de lijn loodregt op het horizontale vlak, loodregt op het verticale vlak, of evenwijdig met de as is.

§ 57. Gaat een vlak door de as, zoodat het (zie § 44) door zijne langs de as vallende horizontale en verticale doorgangen niet bepaald wordt, dan zal het punt O van de as, waardoor het derde projectievlak gebragt is, noodwendig een punt van den derden doorgang zijn; want dit punt ligt zoowel in het vlak als in het derde projectievlak. Zoodra men nu dien derden doorgang kent, zal het vlak volkomen bepaald zijn, want die doorgang en de as zijn twee lijnen waardoor het vlak gaat.

Is van zoodanig vlak een punt (P' , P'') buiten de as gegeven (Fig. 32), dan is het vlak bepaald (zie § 44), en kan dus ook zijn derde doorgang onmiddellijk geconstrueerd worden. Hiertoe behoeft men slechts volgens § 54 de derde projectie P''' van het punt (P' , P'') te bepalen, als wanneer eene lijn $OA_{,,,}$ uit O door P''' getrokken, de begeerde derde doorgang zal wezen. Daar namelijk het bedoelde vlak door OX gaat, staat het loodregt op het derde projectievlak; laat men dus, uit een punt (P' , P'') van het bedoelde vlak, eene loodlijn op het derde projectievlak vallen, zoo ligt die loodlijn (*Meetk.* § 322, 3^e) en dus ook haar voetpunt P''' in het bedoelde vlak, waarvan alzoo de doorgang door P''' moet gaan.

§ 58. Uit de twee voorgaande §§ ziet men, dat het beschouwde derde projectievlak genoegzaam is, om eene lijn of een vlak volkomen te bepalen, in die bijzondere gevallen (zie § 29 en § 44), waarin het horizontale en verticale vlak tot die bepaling ongenoegzaam zijn.

§ 59. Om eene zekere overeenkomst te bewaren, tusschen de drie projectievlakken met de coördinatenvlakken, zooals men die gewoon is in de hoogere Meetkunst te gebruiken, hebben wij het derde projectievlak aan de linkerzijde onzer figuren geplaatst, en het toen ook naar de linkerzijde neergeslagen. Het is echter klaar, dat wij dit vlak even goed aan de rechterzijde hadden kunnen plaatsen, en het dan ook naar de rechterzijde hadden kunnen neerslaan. Men heeft hierin eene geheel vrije keuze; maar zoowel in het eene als in het andere geval is het, waar men van een derde projectievlak gebruik moet maken, altijd verkiesselijk dit vlak zoover buiten het overige deel der teekening aan te nemen, dat de daarop voorkomende projectiën en doorgangen, zich zoo min mogelijk met horizontale of verticale projectiën en doorgangen kunnen vermengen.

§ 60. Nadat wij, in het tot dusver voorgedragene, hebben aangetoond, hoe de betrekkelijke ligging van punten, lijnen en vlakken in de ruimte, volkomen naauwkeurig door eene constructiefiguur wordt voorgesteld, zullen wij thans overgaan tot het oplossen van de voornaamste werstukken, die men zich ten aanzien van de rechte lijn en het platte vlak kan voorstellen. Nu en dan zullen wij daarbij enkele stellingen opgeven en zoo noodig bewijzen, die wij niet mogen onderstellen dat aan den lezer uit de gewone Meetkunst bekend zijn, en wier kennis tot de oplossing van volgende werkstukken noodig is (*). In die stellingen, of ook in andere verklaringen, zullen wij projectiën, projecterende vlakken en doorgangen, die tot een en hetzelfde projectievlak behooren, *gelijknamig* noemen, niet alleen met elkander, maar ook met het projectievlak.

Wat voorts de voor te dragen werkstukken betreft, moeten wij den lezer dringend aanbevelen, zich niet te bepalen tot eene bloote navolging onzer figuren, maar zich te oefenen in het uitvoeren der constructiën, met gegevens, wier stand min of meer afwijkt van den stand dien wij er aan gaven. Immers eene oplossing zou haar doel missen, wanneer men die slechts kon uitvoeren, onder voorwaarde dat de gegevens juist zóó geplaatst waren als in een aangewezen voorbeeld.

OPLOSSING VAN WERKSTUKKEN,

MET BETREKKING TOT DE REGTE LIJN EN HET PLATTE VLAKE.

§ 61. WERKSTUKKEN. 1°. *De verticale projectie van een punt te vinden, indien zijne horizontale projectie, benevens zijne hoogte of diepte boven of beneden het horizontale vlak, gegeven is.*

2°. *De horizontale projectie van een punt te vinden, indien zijne verticale projectie, benevens zijn afstand vóór of achter het verticale vlak gegeven is.*

(*) De eigenschappen der figuren in de ruimte, zooals die in de gewone Meetkunst geleerd worden, zullen wij steeds beschouwen als den lezer bekend te zijn.

3°. *De beide projectiën van een punt te vinden, dat op een gegeven afstand boven of onder het horizontale vlak, en tevens op een gegeven afstand vóór of achter het verticale vlak ligt.*

Deze drie werkstukken, waarvan het laatste onbepaald is, kunnen zoo onmiddellijk door de in § 13 aangewezen eigenschap opgelost worden, dat wij die oplossing aan den lezer kunnen overlaten.

§ 62. *STELLING. Wanneer een punt in eene lijn ligt, ligt de projectie van dat punt in de gelijknamige projectie van de lijn; of ook met andere woorden: wanneer eene lijn door een punt gaat, gaat de projectie van de lijn door de gelijknamige projectie van het punt.*

Deze stelling is een onmiddellijk gevolg van de in § 18 gegevene bepaling, en behoeft alzoo geen nader betoog.

§ 63. *WERKSTUK. Door twee gegevene punten, eene onbepaaldelijk verlengde regte lijn te trekken.*

Dit geschiedt onmiddellijk door toepassing der voorgaande stelling, in verband met de eigenschap, dat de projectie van eene regte lijn wederom eené regte lijn is (zie § 21). Indien bijv. (A' , A'') en (D' , D'') de gegevene punten zijn (Fig. 21), zal eene onbepaaldelijk verlengde regte lijn door A' en D' getrokken de horizontale, en eene dergelijke lijn door A'' en D'' getrokken de verticale projectie der begeerde lijn zijn.

De horizontale en verticale projectiën, die men door deze constructie verkrijgt, zullen echter de begeerde lijn niet bepalen, indien de projectiën der gegevene punten allen in een en dezelfde loodlijn op de as liggen; zoodat men in dit bijzondere geval een derde projectievlak zal moeten aannemen. Zijn bijv. de gegevene punten zoo gelegen, als in Fig. 31 de punten (A' , A'') en (B' , B''), dan wordt de begeerde lijn door de onbepaaldelijk verlengde projectiën $A'B'$ en $A''B''$ niet bepaald; construeert men dan echter volgens § 54 de derde projectiën A''' en B''' der gegevene punten, en trekt men door deze eene onbepaaldelijk verlengde regte lijn, dan is dit eene derde projectie, die met de horizontale of verticale de begeerde lijn bepaalt.

§ 64. *WERKSTUK. In eene gegevene lijn, een willekeurig punt aan te nemen.*

Dit geschiedt onmiddellijk door toepassing der stelling van § 62, in verband met de eigenschap, die wij in § 13 leerden kennen. Indien bijv. ($A'D'$, $A''D''$) de gegevene lijn is (Fig. 21), nemen wij

in een van hare projectiën, bijv. in de horizontale, een willekeurig punt B' aan, en trekken uit dat punt eene lijn, die loodrecht door de as gaat en de verticale projectie der lijn ergens in B'' ontmoet; dan is (B', B'') een punt van de gegevene lijn. Desgelijks hadden wij in de verticale projectie der lijn een punt C'' kunnen aannemen, om daaruit eene loodlijn op de as te trekken en zodoende de horizontale projectie C' te vinden, van het in de gegevene lijn liggende punt (C', C'') .

Staat de gegevene lijn loodrecht op het horizontale vlak, zooals bijv. de lijn $(I', I''i)$ van Fig. 20, dan kan de horizontale projectie van het aan te nemen punt niet anders dan het punt I' zijn, terwijl de verticale projectie van het punt ergens naar welgevallen in $I''i$ kan genomen worden. Is de gegevene lijn loodrecht op het verticale vlak, dan is evenzoo de verticale projectie van het aan te nemen punt dadelijk bepaald, terwijl men voor de horizontale eene keuze naar welgevallen kan doen.

Ligt echter de gegevene lijn in een vlak, dat loodrecht op de as staat, dat is: zijn hare beide projectiën loodrecht op de as, dan zal men, om een punt in die lijn te kunnen aannemen, het derde projectievlak noodig hebben. Is bijv. $(A'B', A''B'')$ de gegevene lijn (Fig. 31), dan kan men wel in de horizontale projectie $A'B'$ een punt P' aannemen, maar eene lijn uit P' loodrecht op de as getrokken, valt nu langs de verticale projectie $A''B''$, en kan dus van geen nut zijn. Heeft men echter, wetende dat (A', A'') en (B', B'') punten der gegevene lijn zijn, hare derde projectie $A'''B'''$ volgens § 56 geconstrueerd, zoo weet men ook dat hierin de derde projectie van elk punt der lijn moet liggen. Naar aanleiding van § 54 vindt men dus, door de in onze figuur aangewezen lijnen, eerst de derde projectie P''' en daarna de verticale projectie P'' van het punt der lijn, dat P' tot horizontale projectie heeft. Alzoo is (P', P'') een willekeurig aangenomen punt van de lijn $(A'B', A''B'')$.

In het laatstbeschenouwd geval, hadden wij blijkbaar ook de verticale projectie P'' willekeurig kunnen aannemen, om daaruit eerst P''' en vervolgens P' te bepalen.

§ 65. *WERKSTUK. In eene gegevene lijn een punt te vinden, dat op eene gegevene hoogte boven het horizontale vlak ligt.*

De stelling van § 62 en de eigenschap in § 13 opgegeven, wijzen onmiddellijk aan, hoe men dit werkstuk, door op de gegevene hoogte eene lijn evenwijdig met de as te trekken, kan

oplossen. Wij zullen dus die oplossing en hare verklaring aan den lezer overlaten.

Was de gegebene lijn evenwijdig met het horizontale vlak, dan zou het begeerde punt of een willekeurig punt der gegebene lijn, of onbestaanbaar zijn, naargelang zijne gegebene hoogte al of niet gelijk was aan de hoogte der gegebene lijn boven het horizontale vlak.

§ 66. WERKSTUK. *In eene gegebene lijn een punt te vinden, dat op gelijke afstanden van het horizontale en verticale vlak ligt.*

Tot oplossing van dit werkstuk zullen wij ons van een derde projectievlak bedienen. Laat ($A'B'$, $A''B''$) de gegebene lijn zijn (Fig. 33), en nemen wij het vlak YOZ als derde projectievlak aan; construeren wij hierop de projectiën A''' en B''' van twee willekeurige punten, in de gegebene lijn aangenomen, dan verkrijgen wij de derde projectie $A'''B'''$ van de gegebene lijn; deelen wij vervolgens den hoek ZOY middendoor, dan zal de deellijn de projectie $A'''B'''$ in een punt P''' snijden, dat op gelijke afstanden van de verlengde OX en van OZ verwijderd is; dit punt P''' is dus de derde projectie van het begeerde punt, waarvan nu de horizontale en verticale projectiën P' en P'' onmiddellijk naar aanleiding van § 54 gevonden worden. Daar men door de aangewezenen lijnen de punten P' en P'' ieder afzonderlijk bepaalt, heeft men eene proef op de naauwkeurige uitvoering der constructie, door te onderzoeken of eene lijn van P' naar P'' getrokken wel loodregt op de as staat. Dat het alzoo gevondene punt (P' , P'') het begeerde is, blijkt uit hetgeen wij in § 52 aanvoerden; immers bleek dáár, dat de lijnen $P'''p'$ en $P'''p''$, die hier onderling gelijk geworden zijn, gelijk zijn aan de afstanden, waarop het punt, dat zich in P''' projecteert, van het horizontale en verticale vlak verwijderd is.

Deelt men den hoek XOZ middendoor, dan zal de snijding van de deellijn met $A'''B'''$ een tweede punt doen kennen dat aan de vraag voldoet. Dit tweede punt zal echter geen ander zijn dan het punt (S' , S''), waar de horizontale en verticale projectiën der gegebene lijn over elkander heen gaan. Immers dit punt (S' , S'') is vooreerst een punt van de gegebene lijn, en ten andere ligt het, zooals reeds in § 15 bleek, op gelijke afstanden van het horizontale en verticale vlak.

§ 67. WERKSTUK. *De beide projecterende vlakken eener gegeven lijn te construeren.*

Laat ($A'B'$, $A''B''$) de gegeven lijn zijn (Fig. 34 of 35), dan heeft haar horizontaal-projecterend vlak vooreerst $A'B'$ tot horizontalen doorgang (zie § 18); en daar dit vlak loodregt op het horizontale is, moet zijn verticale doorgang loodregt op de as staan (zie § 43). Verlengen wij dus $A'B'$ tot aan de as in C, dan is C volgens § 40 een punt van den verticalen doorgang, zoodat eene loodlijn $CC_{,,}$ uit C op de as getrokken, de verticale doorgang zelf moet wezen; derhalve is dan ($C, CC_{,,}$) het horizontaal-projecterend vlak der gegeven lijn. Evenzoo wordt haar verticaal-projecterend vlak ($D, DD_{,,}$) gevonden, door $A''B''$ tot aan de as in D te verlengen, en uit D eene loodlijn $DD_{,,}$ op de as te trekken.

Loopen de projectiën der gegeven lijn een van beide of beide evenwijdig met de as, dan verkeeren hare projecterende vlakken een van beide of beide in het geval van slechts ééner doorgang te hebben. Is bijv. de horizontale projectie evenwijdig met de as, dan is die projectie tevens de horizontale doorgang van het horizontaal-projecterend vlak, dat geen verticalen doorgang heeft, omdat het evenwijdig met het verticale vlak is (zie § 31).

Naargelang of de horizontale of de verticale projectie der gegeven lijn een enkel punt mogt wezen, heeft de lijn of geen horizontaal-, of geen verticaal-projecterend vlak, terwijl dan haar andere projecterende vlak loodregt op de as is (zie § 30).

Zijn de beide projectiën der gegeven lijn loodregt op de as, dan maken hare beide projecterende vlakken slechts één vlak uit, waarvan de doorgangen langs de projectiën der lijn gelegen zijn.

§ 68. WERKSTUK. *De ontmoetingspunten van eene gegeven lijn met het horizontale en verticale vlak te construeren; of met andere woorden: de punten te construeren, waarin eene gegeven lijn de projectievlakken snijdt.*

Dit geschiedt, zoo men enkele bijzondere standen der lijn uitzondert, onmiddellijk door toepassing van het voorgaande werkstuk; men zal daarbij slechts moeten in het oog houden, dat eene lijn de gemeene doorsnede van hare projecterende vlakken is (zie § 27), en dat dus elk gemeenschappelijk punt van die beide vlakken ook een punt van de lijn is. Is namelijk ($A'B'$, $A''B''$) de gegeven lijn (Fig. 34 of 35), en heeft men hare projecterende vlakken ($C, CC_{,,}$) en ($D, DD_{,,}$) geconstrueerd, dan is het punt E,

waar de horizontale doorgangen elkander snijden, omdat CC, in het eene en DD, in het andere projecterende vlak ligt, een punt dat aan de beide projecterende vlakken gemeen is, en dus een punt van de gegevene lijn; maar dit punt E is ook een punt van het horizontale vlak, en het is alzoo het punt waar de gegevene lijn het horizontale vlak ontmoet of snijdt. Evenzoo toont men aan dat het punt F, als snijpunt der verticale doorgangen van de projecterende vlakken der gegevene lijn, het ontmoetingspunt of snijpunt van die lijn met het verticale vlak is.

Om dus het snijpunt van eene lijn met het horizontale of verticale vlak te vinden, trekt men uit het punt, waar de verticale of horizontale projectie der lijn de as ontmoet, eene loodlijn op de as; het snijpunt van die loodlijn met de andere projectie der lijn, zal dan het begeerde punt zijn.

Naargelang de horizontale of verticale projectie der lijn evenwijdig met de as mogt loopen, zal de lijn zelf het verticale of horizontale vlak niet snijden; maar haar snijpunt met het andere projectievlak kan dan als boven geconstrueerd worden.

Naargelang de horizontale of verticale projectie der lijn een enkel punt mogt wezen, is dat punt zelf het snijpunt der lijn met het horizontale of verticale vlak, terwijl zij het andere projectievlak niet snijdt. In die gevallen wordt er dus geene constructie vereischt.

Zoo de beide projectiën der lijn de as in hetzelfde punt mogten snijden, is dit snijpunt blijkbaar gelijktijdig het punt, waar de lijn het horizontale en het verticale vlak snijdt.

Staan de projectiën der gegevene lijn beide regthoekig op de as, dan zal men, om hare snijpunten met het horizontale en verticale vlak te vinden, een derde projectievlak dienen aan te nemen. Is bijv. (A'B', A''B'') zulk eene gegevene lijn (Fig. 36), die door de projectiën van twee harer punten (A', A'') en (B', B'') bepaald is; nemen wij dan een derde projectievlak YOZ aan, dat om zijn verticalen doorgang OZ op het verticale vlak is neergeslagen, zoo kunnen wij volgens § 56 de derde projectie A'''B''' construeren, waardoor YOX en ZOY in C''' en D''' gesneden worden. Bepalen wij vervolgens, naar aanleiding van § 54, de horizontale en verticale projectiën van de punten der lijn, die C''' en D''' tot derde projectiën hebben, dan vinden wij dat (C', C'') het eene, (D', D'') het andere van die beide punten is. Deze twee punten liggen nu in

de gegevene lijn; het eerste ligt, blijkens zijne verticale projectie C'' , in het horizontale vlak; het tweede ligt, blijkens zijne horizontale projectie D' , in het verticale vlak. Derhalve is C' het punt waar het horizontale, D'' het punt waar het verticale vlak door de lijn ($A'B'$, $A''B''$) gesneden wordt.

Was bij deze laatste constructie het snijpunt D''' beneden O gevallen, dan zou de lijn $D'''D''$ en dus het punt D'' onder de as gekomen zijn; dat is, het ontmoetingspunt van de lijn met het verticale vlak zou onder het horizontale liggen. Was het snijpunt C''' aan de andere zijde van O gevallen, dan zou het cirkelkwadrant, ter overbrenging van dat punt dienende, binnen den hoek XOZ hebben moeten beschreven worden, waardoor het punt C' boven de as gekomen zou zijn; dat is: het snijpunt van de lijn met het horizontale vlak, zou achter het verticale vlak liggen.

§ 69. WERKSTUK. *Den afstand van twee gegevene punten te construeren; of met andere woorden: de werkelijke lengte te construeren van eene lijn, wier uiteinden gegeven zijn.*

Wanneer eene lijn, die twee punten vereenigt, evenwijdig loopt met het horizontale of verticale vlak, is volgens § 23 die lijn even lang als hare horizontale of verticale projectie. Ligt de lijn in een vlak dat loodregt op de as staat, zooals bijv. de lijn ($A'B'$, $A''B''$) van Fig. 36, dan loopt zij evenwijdig met het aangenomen derde projectievlak YOZ , en is dus even lang als hare derde projectie $A'''B'''$; zoodat men in dit geval slechts de derde projectie te construeren heeft, om de lengte der lijn te vinden. De oplossing van het opgegeven werkstuk is dus nog slechts noodig in het algemeene geval, dat de lijn, wier lengte men bepalen moet, eenen schuinen stand, zoowel met betrekking tot de as, als met betrekking tot de projectievlakken heeft. Bij deze oplossing, die op verschillende wijzen kan plaats hebben, kan men onderstellen, dat de punten wier afstand men zoekt, aan dezelfde zijde of aan verschillende zijden van het horizontale vlak liggen.

Onderstellen wij *in de eerste plaats*, dat die punten aan dezelfde zijde, bijv. beide boven het horizontale vlak liggen, zooals de punten A en B in Fig. 9, dan zijn de projecterende lijnen AA' en BB' de evenwijdige zijden van een regthoekig trapezium $AA'B'B$, dat de lijn AB , wier lengte gevraagd wordt, tot schuine zijde, en hare projectie $A'B'$ tot regthoekszijde heeft. Verbeeldt

men zich nu dat dit trapezium, om de zijde $A'B'$ wentelende op het horizontale vlak wordt neergeslagen, dan komt ook de lijn AB in hare ware lengte op het horizontale vlak te liggen, en de lengte der lijn AB zal dus gevonden zijn, zoodra men dit neergeslagen trapezium heeft geconstrueerd. Dit nu kan in eene constructiefiguur onmiddellijk geschieden, want de lijn $A'B'$ komt in de constructiefiguur voor, de lijnen AA' en BB' blijven bij het neerslaan des trapezijs loodrecht op $A'B'$, en de lengte van die lijnen is gelijk aan de afstanden van de verticale projectiën der punten A en B tot de as. Om dus den afstand der in Fig. 37 voorgestelde punten (A', A'') en (B', B''), dat is de werkelijke lengte der lijn ($A'B', A''B''$), te construeren, stelt men in A' en B' loodlijnen op $A'B'$, aan dezelfde zijde van $A'B'$; na op deze loodlijnen $A'A = aA''$ en $B'B = bB''$ genomen te hebben, trekt men AB ; dan is $AA'B'B$ het bedoelde neergeslagen trapezium, en AB de gevraagde afstand. Het genoemde trapezium heeft in zijn oorspronkelijken stand, blijkbaar $A'B'$ tot horizontale, en $A''abB''$ tot verticale projectie.

Trekken wij in Fig. 37 $A''C$ evenwijdig met de as, en $A'D$ evenwijdig met AB ; zoo is niet alleen $A'D = AB$, maar ook $B'D = B''C$; want de lijnen $B'D$ en $B''C$ stellen ieder in 't bijzonder het verschil in hoogte voor van de punten (A', A'') en (B', B'') boven het horizontale vlak. Eene tweede oplossing van ons werkstuk is dus deze: dat men op $A'B'$ slechts uit de projectie B' van het hoogstgelegen punt eene loodlijn $B'D$ oprigt, die gelijk is aan het verschil in hoogte $B''C$, en daarna de lijn $A'D$ trekt; als wanneer $A'D$ de begeerde afstand zal zijn. Deze $A'D$ is eigenlijk de projectie, die de lijn ($A'B', A''B''$) op het horizontale vlak zou verkrijgen, indien men den driehoek, die $A'B'$ tot horizontale en $A''B''C$ tot verticale projectie heeft, om de lijn ($A'B', A''C$) liet wentelen, tot dat zijn vlak evenwijdig met het horizontale werd.

Zetten wij in Fig. 37 op de as, van a af een stuk $ab' = A'B'$ uit, stellen wij uit b' eene loodlijn $b'E = bB''$ op de as, en trekken wij vervolgens $A''E$, dan is blijkbaar het trapezium $A''ab'E$ gelijk en gelijkvormig met het trapezium $AA'B'B$, en dus $A''E = AB$, zoodat nu ook $A''E$ de begeerde afstand is; hierdoor heeft men alzoo eene derde oplossing van het werkstuk. Zij verschilt van de eerste hierdoor, dat men nu, in plaats van het trapezium ($A'B', A''abB''$) om de zijde $A'B'$ op het horizontale vlak neer te

slaan, dit trapezium om de projecterende lijn (A', aA'') heeft laten wentelen, tot dat het evenwijdig met het verticale vlak werd, en het in dien stand op het verticale vlak heeft geprojecteerd, als wanneer $A''ab'E$ die projectie is.

— Lag een der gegeven punten in het horizontale vlak, dan zou, door het verdwijnen van een der projecterende lijnen, het meer genoemde trapezium een driehoek worden; de tweede der boven gegeven oplossingen zou dan niet van de eerste verschillen, terwijl overigens de constructie onveranderd blijft. Zoo hebben wij in Fig. 38 op de twee verschillende manieren den afstand $A'B = A'E$ geconstrueerd van twee punten (A', A'') en (B', B''), waarvan het eerste in het horizontale vlak ligt.

Lagen de gegeven punten beide onder het horizontale vlak, zoo kan dit blijkbaar in de verklaarde oplossingen geene andere wijziging te weeg brengen, dan dat de lengten der projecterende lijnen als gegevens beneden de as afgeteekend staan, en diensvolgens bij de derde oplossing ook beneden de as moeten gebruikt worden. Wij laten de uitvoering der constructie, voor een paar alzo gegeven punten, aan den lezer over.

Onderstellen wij *in de tweede plaats*, dat van de gegeven punten het eene boven, het andere beneden het horizontale vlak ligt, zooals de punten A en D in Fig. 10, dan vormen de projecterende lijnen AA' en DD' , met de lijn AD en hare projectie $A'D'$, geen trapezium, maar een samenstel van twee in een en hetzelfde vlak liggende regthoekige driehoeken, waarvan zoowel de schuine zijden AS en DS, als de regthoekszijden $A'S$ en $D'S$, in elkanders verlengden vallen, terwijl de regthoekszijden AA' en DD' evenwijdig loopen. Wordt nu weder het vlak dezer driehoeken om $A'D'$ op het horizontale vlak neergeslagen, dan komen die driehoeken aan weerszijden van de lijn $A'D'$ te liggen; na dit neerslaan zijn niet alleen AA' en DD' loodrecht op $A'D'$, maar ook AS en DS in elkanders verlengden gebleven, zoodat dan weder de lijn AD in hare ware lengte op het horizontale vlak zal liggen. Maar even als het boven gebruikte trapezium, kunnen ook nu die neergeslagen driehoeken, onmiddellijk in de constructiefiguur uit de dáár aanwezige gegevens geconstrueerd worden, en daardoor zal dan de werkelijke lengte der lijn AD gevonden zijn. Om bijv. de werkelijke lengte der in Fig. 39 voorgestelde lijn ($A'B', A''B''$) te vinden, stelt men wederom in A' en B' loodlijnen op $A'B'$, doch

nu aan verschillende zijden; na dan, op die loodlijnen, $A'A = aA''$ en $B'B = bB''$ genomen en AB getrokken te hebben, heeft men de begeerde lengte AB gevonden. Het punt, waar de lijn ($A'B'$, $A''B''$) het horizontale vlak snijdt, verandert bij het genoemde neerslaan niet van plaats; dit snijpunt is dus geen ander dan het punt S, waar de projectie $A'B'$ door de neergeslagene lijn AB gesneden wordt. Trekt men uit het punt S'' , waar de verticale projectie $A''B''$ de as snijdt, eene loodlijn op de as, dan zal volgens de in § 32 gegevene verklaring, en ook volgens het werkstuk van § 68, het punt S in die loodlijn moeten liggen; hierdoor heeft men eene proef op de naauwkeurige uitvoering der constructie.

Trekken wij in Fig. 39, $A''C$ evenwijdig met de as en $A'D$ evenwijdig met AB, dan is niet alleen $A'D = AB$, maar ook $B'D = B''C$; want elk dezer beide laatste lijnen is blijkbaar gelijk aan de som van aA'' en bB'' . Hieruit volgt ook nu eene tweede oplossing van ons werkstuk, die geheel met de in Fig. 37 verklaarde overeenkomt; alleen is het verschil in hoogte, dat men hier uit B' op de loodlijn moet uitzetten *de som* der lijnen aA'' en bB'' , terwijl dit verschil in hoogte in Fig. 37 ook *het verschil* van aA'' en bB'' was.

Nemen wij, ook in Fig. 39, $ab' = A'B'$, stellen wij $b'E = bB''$ loodregt op de as, en trekken wij $A''E$, dan zal ook $A''E$ de werkelijke lengte van ($A'B'$, $A''B''$) zijn. Immers zal men de figuur $AA'B'B$ (wegens de gelijkheid der lijnen $A'B'$ en ab' , $A'A$ en aA'' , $B'B$ en $b'E$, en wegens den regthoekigen stand van de laatstgenoemde lijnen op de eersten) zoo kunnen verplaatsen, dat zij de figuur $A''ab'E$ volkomen bedekt, weshalve $A''E = AB$ is; alzoo heeft men dan ook nu eene derde oplossing. Hier kan men zich verbeelden, dat de driehoeken $A'SA$ en $B'SB$, in plaats van op het horizontale vlak neergeslagen te zijn, om de projecterende lijn (A' , aA'') zijn gewenteld, tot dat hun vlak evenwijdig met het verticale was, en dat zij daarna op het verticale vlak geprojecteerd zijn, als wanneer $A''as$ en $sb'E$ die projectiën zijn. De beweging, die bij dit wentelen en projecteren de punten S en B' ondergaan, hebben wij in de figuur, door uit A' beschreven cirkelbogen en door een paar loodlijnen op de as, aangewezen.

Hoezeer wij de oplossing van dit werkstuk reeds vrij uitvoerig verklaard hebben, meenen wij dat het niet ondienstig is nog aan te merken, dat men, tot het uitvoeren der constructiën, hetzelfde gebruik van het verticale vlak kan maken, dat wij boven van

het horizontale vlak gemaakt hebben. Die uitvoering echter laten wij, met verwijzing naar § 50, aan den lezer tot eigene oefening over.

§ 70. WERKSTUK. *Het horizontaal-projecterend vlak eener gegevene lijn, om zijn horizontalen doorgang, op het horizontale vlak neer te slaan, en daarna weder op te rigten.*

Het genoemde neerslaan, waarvan wij eigenlijk reeds in het voorgaande werkstuk gebruik maakten, heeft ten doel, den waren stand der lijn in het neergeslagen vlak aan te wijzen; het weder oprigten bestaat daarin, dat men, na in het neergeslagen vlak zekere punten aangenomen te hebben, bepale, waar de projectiën dier punten zullen komen, als het neergeslagen vlak in zijn oorspronkelijken stand gebracht wordt.

Het vlak, dat neergeslagen moet worden, bevat de horizontaal-projecterende lijnen van al de verschillende punten der gegevene lijn, en heeft hare horizontale projectie tot horizontalen doorgang. Nemen wij dus in de gegevene lijn (Fig. 40) twee willekeurige punten (A' , A'') en (B' , B'') aan, dan zullen, bij het begeerde neerslaan, de voetpunten A' en B' der projecterende lijnen (A' , aA'') en (B' , bB'') niet van plaats veranderen, terwijl die projecterende lijnen zelf loodregt op $A'B'$ zullen blijven; maar op het verticale vlak, staan de werkelijke lengten aA'' en bB'' dier projecterende lijnen afgeteekend; stellen wij dus op $A'B'$ de loodlijnen $A'A = aA''$ en $B'B = bB''$, en trekken wij door hare uiteinden A en B eene lijn, dan is deze de ware stand der gegevene lijn in het neergeslagen vlak, terwijl daarin AA' en BB' de projecterende lijnen der punten A en B zijn.

Construeert men (zie § 68) het punt S , waar de gegevene lijn het horizontale vlak ontmoet, dan zal dit punt, omdat het in de horizontale projectie der gegevene lijn ligt, bij het neerslaan op zijne plaats blijven, en dus almede in de neergeslagene lijn moeten liggen; deze kan dus eenigzins gemakkelijker verkregen worden, door nevens het punt S slechts één willekeurig punt der lijn, zooals (A' , A'') of (B' , B'') te gebruiken. Dien korteren weg volgt men gewoonlijk, tenzij men de lijnen, die tot verkrijging van het ontmoetingspunt S moeten dienen, te ver zou moeten verlengen.

Nemen wij in het neergeslagen vlak willekeurige punten aan, hetzij in de neergeslagene lijn, zooals P , Q en R , hetzij daar-

buiten, zooals T en U; laten wij uit deze punten loodlijnen PP' , QQ' , RR' , TT' en UU' op de horizontale projectie der gegevene lijn neder, zoo zullen deze loodlijnen, als het neergeslagen vlak in zijn vorigen stand wordt gebracht, loodrecht op het horizontale vlak komen; hierdoor worden dan deze loodlijnen de horizontaal-projecterende lijnen, en hare voetpunten P' , Q' , R' , T' en U' de horizontale projectiën, van de punten P, Q, R, T en U; terwijl voorts deze loodlijnen voor elk punt aanwijzen, op welke hoogte of diepte het boven of onder het horizontale vlak ligt. Wat de punten P, Q en R betreft, worden nu de verticale projectiën P'' , Q'' en R'' gevonden, door uit de horizontale projectiën loodlijnen door de as te trekken, tot dat zij de verticale projectie der gegevene lijn ontmoeten; hierdoor zal $pP'' = PP'$, $qQ'' = QQ'$ en $rR'' = RR'$ worden. Wat de punten T en U aangaat, worden de verticale projectiën T'' en U'' gevonden, door op de loodlijnen, uit T' en U' op de as getrokken, $tT'' = TT'$ en $uU'' = UU'$ te nemen. Nadat dus het neergeslagen vlak weer opgericht is, zijn (P', P'') , (Q', Q'') , (R', R'') , (T', T'') en (U', U'') de willekeurig aangenomen punten P, Q, R, T en U van dat vlak.

Bij het neerslaan, hebben wij ons van punten (A', A'') en (B', B'') boven het horizontale vlak bediend, en men zal dit gewoonlijk kunnen doen; het is echter klaar, en wordt overigens door het voorgaande werkstuk opgehelderd, dat men zich bedienen kan van punten, die beide of een van beide onder het horizontale vlak liggen; wij laten dit aan den lezer over.

Wij behoeven overigens slechts naar § 50 te verwijzen, om te doen zien, hoe men het verticaal-projecterend vlak eener lijn om zijn verticalen doorgang op het verticale vlak kan neerslaan en weder oprigten.

Had men te doen met een projecterend vlak dat loodrecht op de as staat, dan zou men weder een derde projectievlak te baat kunnen nemen. In dit geval is echter ons werkstuk van geene toepassing, omdat al wat men dan in het neergeslagen projecterend vlak zou zien, ook onmiddellijk in het derde projectievlak te zien is.

§ 71. WERKSTUK. *Den hoek te vinden, waaronder eene gegevene lijn het horizontale vlak snijdt.*

Zij $(A'B', A''B'')$ de gegevene lijn (Fig. 40); indien men dan volgens de voorgaande § haar projecterend vlak neerslaat, zal de

hoek BSB', waaronder de neergeslagene lijn AB hare projectie A'B' snijdt, de gevraagde hoek zijn (*Meetk.* § 306).

Trekt men, uit eenig punt A' van de horizontale projectie A'B', eene lijn A'D evenwijdig met de neergeslagene AB, dan is de hoek DA'B' gelijk aan den begeerden; hiervan bedient men zich, zoo men de lijnen, die tot bepaling van het punt S vereischt worden, te ver zou moeten verlengen. De hoek DA'B' heeft echter, als hoek van de lijn met het horizontale vlak, zijn hoekpunt niet op de ware plaats.

Men zou het projecterend vlak, in plaats van het neer te slaan, zoo kunnen omwentelen en projecteren als bij de derde oplossing van het werkstuk van § 69 is verklaard. Zoo is bijv. EA''C in Fig. 37 en 39, en EsX in Fig. 39, de grootte van den hoek, waaronder de aldaar voorgestelde lijn (A'B', A''B'') het horizontale vlak snijdt.

Uit § 50 blijkt weder, hoe men ook den hoek zal kunnen bepalen, waaronder eene lijn het verticale vlak snijdt.

Ligt eene lijn in een vlak dat loodregt op de as staat, dan is hare derde projectie onmiddellijk voldoende om den begeerden hoek te vinden. Zoo maakt bijv. de lijn (A'B', A''B'') van Fig. 36, met het horizontale vlak eenen hoek gelijk aan D'''C'''O, en met het verticale vlak eenen hoek gelijk aan C'''D'''O. Hier zijn deze beide hoeken elkanders complementen, hetgeen in het algemeen niet zoo is.

§ 72. WERKSTUK. *Eene gegevene lijn van bepaalde lengte in eene gegevene reden te verdeelen.*

Zij (A'B', A''B'') de gegevene lijn (Fig. 40); indien wij dan weder haar projecterend vlak op het horizontale vlak neerslaan, kunnen wij de neergeslagene lijn AB onmiddellijk (*Meetk.* § 99) in de gegevene reden verdeelen. Zij P het hierdoor gevondene deelpunt, dan verkrijgt dit punt, zoo wij het neergeslagene vlak weder oprigten, P' en P'' tot projectiën, weshalve (P', P'') het begeerde deelpunt is.

Uit de evenwijdigheid der in de figuur voorkomende lijnen, volgt echter terstond de evenredigheid

$$A''P'' : B''P'' = A'P' : B'P' = AP : BP;$$

derhalve zal het begeerde deelpunt (P', P'') ook onmiddellijk verkregen worden, als men de projectiën der gegevene lijn, ieder in 't bijzonder, in de gegevene reden verdeelt.

§ 73. WERKSTUK. *In eene gegebene lijn een punt te vinden, dat van een gegeven punt in die lijn, op een gegeven afstand verwijderd is.*

Zij ($A'B'$, $A''B''$) de gegebene lijn, en (P' , P'') het in die lijn gegebene punt (Fig. 40); slaan wij nogmaals haar projecterend vlak op het horizontale neder, zoodat AB de neergeslagene lijn, en daarin P het gegebene punt is. Nemen wij verder, op de neergeslagene lijn, stukken PQ en PR gelijk aan den gegeven afstand, en bepalen wij de projectiën die de punten Q en R verkrijgen, wanneer het neergeslagen vlak weder opgerigt wordt, dan vinden wij dat (Q' , Q'') of (R' , R'') het gevraagde punt zal wezen.

§ 74. WERKSTUK. *De verticale projectie van eene lijn te vinden, als, behalve den hoek dien de lijn met het horizontale vlak maakt, hare horizontale projectie, en daarin haar snijpunt met het horizontale vlak, gegeven is.*

Zij $A'B'$ de gegebene horizontale projectie der lijn, en daarin S haar snijpunt met het horizontale vlak (Fig. 40); trekken wij dan uit het punt S de lijn SB zoodanig, dat de hoek $B'SB$ gelijk aan den gegeven hoek is; nemen wij verder in de lijn SB een willekeurig punt B aan, en bepalen wij de projectiën B' en B'' die dit punt verkrijgt, wanneer de hoek $B'SB$ om het been $B'S$ wordt gewenteld, tot dat zijn vlak loodregt op het horizontale is; laten wij eindelijk uit S eene loodlijn SS'' op de as neder en trekken wij $S''B''$, dan is dit de begeerde verticale projectie. Dit alles blijkt uit het werkstuk van § 70 zoo duidelijk, dat het geene verdere opheldering behoeft.

Het is klaar, dat men uit het punt S nog eene tweede lijn kan trekken, die met SB' den gegeven hoek maakt; hierdoor zal men een tweede antwoord verkrijgen, dat wij echter in de figuur, om hare duidelijkheid te bewaren, niet hebben aangewezen.

Was de gegebene projectie evenwijdig met de as, dan zon de begeerde projectie den gegeven hoek met de as maken, en dus na het neerlaten der loodlijn SS'' , onmiddellijk kunnen getrokken worden.

Was de gegebene horizontale projectie loodregt op de as, dan zou de begeerde verticale projectie in hetzelfde punt loodregt op de as staan, en men zou om de lijn te bepalen een derde projectievlak moeten gebruiken.

X § 75. STELLING. *Wanneer twee lijnen elkander in de ruimte snijden, zullen hare gelijknamige projectiën of elkander snijden of in elkander vallen.*

Volgens de stelling van § 62 namelijk, moet de projectie van het snijpunt der lijnen, zoowel in de gelijknamige projectie van de eene, als in die van de andere lijn liggen; en dit is onmogelijk, tenzij die gelijknamige projectiën een punt gemeen hebben. Hiertoe nu wordt gevorderd: of dat zij elkander snijden, of dat zij een en dezelfde lijn uitmaken, of dat de eene een enkel punt is dat in de andere ligt. Snijden de gelijknamige projectiën elkander, dan is haar snijpunt de gelijknamige projectie van het snijpunt der lijnen in de ruimte.

Wanneer twee lijnen elkander snijden, zal doorgaans de snijding van hare horizontale projectiën, met die van hare verticale projectiën gepaard gaan; daar dan de snijpunten der gelijknamige projectiën, de gelijknamige projectiën van het snijpunt der lijnen zijn, moeten zij voldoen aan de voorwaarde van in een en dezelfde loodlijn op de as te liggen. Hierdoor heeft men een kenmerk, waaraan men zien kan of twee lijnen, wier gelijknamige projectiën elkander snijden, elkander in de ruimte al of niet snijden. In Fig. 41 bijv. snijden de lijnen ($A'B'$, $A''B''$) en ($C'D'$, $C''D''$) elkander, omdat het snijpunt S' der horizontale projectiën, en het snijpunt S'' der verticale projectiën, in ééne loodlijn op de as liggen, en nu is (S' , S'') het snijpunt der lijnen. In Fig. 42 daarentegen snijden de lijnen ($A'B'$, $A''B''$) en ($C'D'$, $C''D''$) elkander niet, omdat de snijpunten der projectiën niet aan de genoemde voorwaarde voldoen.

Gaat, met de snijding van twee gelijknamige projectiën, een in elkander vallen van de twee andere gelijknamige projectiën gepaard, dan zullen de lijnen in de ruimte elkander altijd snijden, en wel in het punt waarvan de ééne projectie onmiddellijk door de elkander snijdende projectiën bepaald wordt. Zoo snijden de lijnen ($A'B'$, $A''B''$) en ($P'Q'$, $P''Q''$) van Fig. 42, elkander in het punt (S' , S'').

Het in elkander vallen van de horizontale projectiën van twee verschillende lijnen, kan niet met een in elkander vallen der verticale projectiën gepaard gaan, tenzij die lijnen mogten liggen in een vlak dat loodrecht op de as staat. In dit geval zullen de lijnen elkander al of niet snijden, naargelang hare projectiën op een derde vlak elkander al of niet snijden.

§ 76. STELLING. *Wanneer twee lijnen in de ruimte evenwijdig zijn, zullen hare gelijknamige projectiën (mits geene enkele punten zijnde) of evenwijdig loopen, of langs elkander vallen.*

Twee evenwijdige lijnen in de ruimte kunnen al of niet in een vlak liggen, dat loodregt op het projectievlak is. Liggen zij niet in zoodanig vlak, dan hebben zij verschillende projecterende vlakken en dus ook verschillende projectiën; zoo hebben bijv. de evenwijdige lijnen AB en CD, in Fig. 43 voorgesteld, verschillende projectiën A'B' en C'D' op het projectievlak OL; kiezen wij nu in iedere lijn een punt, bijv. de punten A en C, dan hebben deze punten projecterende lijnen AA' en CC' die evenwijdig zijn (*Meetk.* § 308); de projecterende vlakken der lijnen AB en CD, waarvan het eene door AB en AA', het andere door CD en CC' gaat, zijn dus almede evenwijdig (*Meetk.* § 331), en hieruit volgt dan weder de evenwijdigheid der projectiën A'B' en C'D' (*Meetk.* § 327). Liggen echter de evenwijdige lijnen in de ruimte in een vlak dat loodregt op het projectievlak is, zonder zelve loodregt op het projectievlak te zijn, dan is het genoemde loodrechte vlak gelijktijdig beider projecterend vlak, zoodat dan hare projectiën langs elkander vallen. Staan de evenwijdige lijnen in de ruimte, loodregt op het projectievlak, dan zijn hare projectiën enkele punten.

Uit de evenwijdigheid der projectiën op één projectievlak, mag men niet omgekeerd tot de evenwijdigheid der lijnen in de ruimte besluiten; uit de evenwijdigheid der projectiën volgt slechts de evenwijdigheid der projecterende vlakken.

Wanneer twee lijnen in de ruimte evenwijdig zijn, zal doorgaans de evenwijdigheid van hare horizontale projectiën met die van hare verticale projectiën gepaard gaan. Met uitzondering van het geval, dat eene lijn door hare beide projectiën niet bepaald wordt, mag men omgekeerd tot de evenwijdigheid van twee lijnen in de ruimte besluiten, indien de evenwijdigheid der horizontale projectiën gepaard gaat met die van de verticale; want uit de evenwijdigheid der projectiën volgt dan de evenwijdigheid van elk paar gelijknamige projecterende vlakken; de vlakken van het eene paar snijden die van het andere paar, volgens een stelsel van vier evenwijdige lijnen (*Meetk.* § 327); en twee van deze vier lijnen zijn de lijnen in de ruimte, waartoe de projectiën behooren.

Gaat met de evenwijdigheid van twee gelijknamige projectiën, een langs elkander vallen van de andere gelijknamige projectiën gepaard, dan zijn de lijnen in de ruimte mede evenwijdig; want zij zijn dan de doorsneden van twee evenwijdige vlakken door een derde.

Staan de horizontale en verticale projectiën van twee lijnen allen loodrecht op de as, dan verkeert men in het bovengenoemde geval van uitzondering; en hetzij nu de projectiën van de eene lijn evenwijdig zijn met die van de andere, hetzij zij er langs vallen, zullen de lijnen al of niet evenwijdig zijn, naargelang hare projectiën op een derde vlak evenwijdig zijn of niet.

§ 77. Uit de beide voorgaande stellingen volgt onmiddellijk, hoe men, in eene constructiefiguur, zien kan of twee gegevene lijnen elkander snijden, elkander kruissen, dan wel met elkander evenwijdig loopen. Voldoen namelijk de projectiën der lijnen niet aan de kenmerken, die wij voor hare snijding of voor hare evenwijdigheid leerden kennen, dan kruissen de lijnen elkander.

§ 78. *WERKSTUK. Den hoek te construeren, waaronder twee gegevene lijnen elkander snijden.*

Laten ($A'B'$, $A''B''$) en ($C'D'$, $C''D''$) de gegevene lijnen zijn, die elkander in het punt (S' , S'') snijden (Fig. 41). Indien men dan in elke lijn nog een punt, bijv. de punten (P' , P'') en (Q' , Q'') aanneemt, en de lijn ($P'Q'$, $P''Q''$) trekt, zijn $P'S'Q'$ en $P''S''Q''$ de projectiën van een driehoek; construeert men dus, volgens § 69, de werkelijke lengte van elk zijner zijden, en stelt men daaruit een driehoek zamen, dan vindt men in dien driehoek, over de zijde die de lengte van ($P'Q'$, $P''Q''$) heeft, den begeerden hoek. Neemt men de punten (P' , P'') en (Q' , Q'') even hoog boven het horizontale vlak (zie § 65), dan bespaart men zich de moeite om de lengte van ($P'Q'$, $P''Q''$) te construeren, dewijl in dat geval die lengte gelijk aan de horizontale projectie $P'Q'$ is.

De uitvoering van deze constructiën aan den lezer overlatende, zullen wij ons bepalen tot het aanwijzen eener constructie, die nog eenvoudiger is, en altijd kan toegepast worden, wanneer de gegevene lijnen het horizontale vlak snijden in punten, die niet buiten de grenzen der teekening vallen.

Wij construeren dan vooreerst volgens § 68 de genoemde snijpunten E' en F' , en trekken de lijn $E'F'$; verder construeren wij, volgens § 69, de werkelijke lengten der lijnen ($E'S'$, $E''S''$) en

($F'S'$, $F''S''$), en beschrijven uit E' en F' , met die gevondene lengten als stralen, cirkelboogjes, die elkander ergens in S zullen snijden. Alnu is $E'SF'$ de ware gedaante van den driehoek, die $E'SF'$ en $E''S''F''$ tot projectiën heeft, en derhalve $E'SF'$ de gevraagde hoek.

De geconstrueerde driehoek $E'SF'$ is eigenlijk de stand, dien de driehoek ($E'SF'$, $E''S''F''$) aanneemt, wanneer hij om de lijn $E'F'$ wordt gewenteld tot dat hij op het horizontale vlak komt te liggen. Bij die wenteling bleven de punten E' en F' op hunne plaats, en wij behoefden dus slechts de plaats van het punt S te bepalen. Trekken wij, in den neergeslagen driehoek, uit het punt S eene lijn, die $E'F'$ ergens in G' ontmoet, en brengen wij den driehoek dan weder in zijn oorspronkelijken stand, zoo blijft het punt G' op zijne plaats, terwijl het punt S in (S' , S'') komt; zoo wij dus, na $G'G''$ loodregt op de as te hebben neergelaten, de lijnen $S'G'$ en $S''G''$ trekken, zijn dit de projectiën die de lijn SG' verkrijgt nadat de driehoek $E'SF'$ in den stand ($E'SF'$, $E''S''F''$) is teruggebracht.

X Was er gevraagd *den hoek van twee gegevene lijnen middendoor te deelen*, dan zou men blijkbaar slechts de bovenstaande constructie behoeven te volgen en daarbij de lijn SG' zóó moeten trekken, dat de hoek $E'SF'$ middendoorgedeeld werd; hierdoor zouden dan $S'G'$ en $S''G''$ de projectiën der begeerde deellijn worden.

§ 79. WERKSTUK. *Door een gegeven punt, eene lijn evenwijdig met eene gegevene lijn te trekken.*

De oplossing van dit werkstuk is, naar aanleiding van de in § 76 bewezene stelling, zoo eenvoudig, dat wij haar aan den lezer mogen overlaten. Was de gegevene lijn door de projectiën van twee harer punten bepaald, terwijl de projectiën der lijn zelf loodregt op de as waren, dan zou men de hulp van een derde projectievlak inroepen. Om bijv. door het punt (D' , D'') van Fig. 31 eene lijn te trekken, evenwijdig met de dáár voorkomende lijn ($A'B'$, $A''B''$), zou men eerst de derde projectiën D''' en $A'''B'''$ bepalen, en vervolgens door D''' eene lijn evenwijdig met $A'''B'''$ trekken; uit de hierdoor verkregene derde projectie der begeerde lijn en hare door D' en D'' loodregt op de as getrokken horizontale en verticale projectiën, kan men dan verder, van zooveel harer punten als men goedvindt, de horizontale en verticale projectiën naar aanleiding van § 54 bepalen.

§ 80. STELLING. *Wanneer twee vlakken evenwijdig zijn, zullen ook hunne gelijknamige doorgangen evenwijdig loopen.*

Want deze gelijknamige doorgangen zijn de doorsneden van het gelijknamige projectievlak met twee evenwijdige vlakken, en van zulke doorsneden is het bekend dat zij evenwijdig zijn (*Meetk.* § 327).

Tot de evenwijdigheid van twee vlakken wordt dus de evenwijdigheid, en van hunne horizontale, en van hunne verticale doorgangen gevorderd; zijn dan ook de horizontale doorgangen evenwijdig, maar de verticale niet, of omgekeerd, dan zijn de vlakken niet evenwijdig en zij moeten elkander derhalve snijden.

Gaat de evenwijdigheid der verticale doorgangen met die der horizontale gepaard, en loopen de doorgangen niet evenwijdig met de as, zoodat de beide doorgangen van hetzelfde vlak een punt met de as gemeen hebben, dan mag men tot de evenwijdigheid der vlakken besluiten (*Meetk.* § 331).

Loopen echter de doorgangen van twee vlakken allen evenwijdig met de as, dan kunnen die vlakken even goed elkander snijden als evenwijdig zijn; de beschouwing der perspectievische figuren 44 en 45 zal voldoende zijn om dit te doen inzien. In deze gevallen hangt het al of niet evenwijdig zijn der vlakken blijkbaar af van het al of niet evenwijdig zijn hunner doorgangen op een derde projectievlak. Zijn de vlakken evenwijdig, zooals in Fig. 45, dan volgt uit hunne evenwijdigheid, de evenwijdigheid hunner doorgangen $A,A_{,,}$ en $B,B_{,,}$ op het derde projectievlak ON, en hieruit weder de evenredigheid

$$OA : OB = OA_{,,} : OB_{,,}$$

vlakken wier doorgangen allen evenwijdig met de as loopen, zijn dus al of niet evenwijdig, naargelang de afstanden, waarop de gelijknamige doorgangen van de as verwijderd zijn, al of niet evenredig zijn; moettende daarenboven deze afstanden aan de behoorlijke zijde van de as vallen.

§ 81. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van twee gegebene vlakken te construeren.*

Onderstellen wij in de eerste plaats, dat zoowel de horizontale als de verticale doorgangen der gegebene vlakken elkander snijden. Indien dan $(A,AA_{,,})$ en $(B,BB_{,,})$ de gegebene vlakken zijn (Fig. 46 of 47), is het snijpunt P' der horizontale, even als het snijpunt Q'' der verticale doorgangen, een punt dat aan de beide

vlakken gemeen is; en deze punten zijn dus punten van de begeerde gemeene doorsnede. Van het punt P' , dat in het horizontale vlak ligt en dus zelf zijne horizontale projectie is, wordt de verticale projectie P'' gevonden door $P'P''$ loodregt op de as te trekken; evenzoo vindt men de horizontale projectie Q' van het punt Q'' , dat zelf zijne verticale projectie is. Daar dan nu twee punten (P' , P'') en (Q' , Q'') van de begeerde doorsnede bekend zijn, wordt ook (zie § 63) die lijn zelf bekend; weshalve de onbepaaldelijk verlengde lijn ($P'Q'$, $P''Q''$) de gevraagde gemeene doorsnede der vlakken ($AA_{,,}$) en ($BB_{,,}$) is.

De beschouwing van Fig. 48, waar ($AA_{,,}$) en (B, B_1, B_2, B_3) de gegeven vlakken verbeelden, zal toereikend zijn om te doen inzien, dat de bovenstaande constructie geene verandering ondergaat, indien de doorgangen van een der gegeven vlakken evenwijdig met de as loopen.

Onderstellen wij *in de tweede plaats*, dat van de gegeven vlakken ($AA_{,,}$) en ($BB_{,,}$) slechts de verticale doorgangen elkander snijden, terwijl de horizontale evenwijdig zijn, zooals in Fig. 49 is voorgesteld. Alsdan kan men, door den boven aangewezen weg, slechts één punt (Q' , Q'') van de doorsnede vinden. Maar de vlakken gaan nu respectievelijk door de evenwijdige lijnen AA , en BB , en bijgevolg is hunne doorsnede evenwijdig met AA , en BB , (*Meetk.* § 312. *Gev.* 5°); derhalve zal eene lijn, door het punt (Q' , Q'') evenwijdig met AA , getrokken, die doorsnede zijn. Om deze lijn volgens § 79 te kunnen trekken, merke men op dat de lijn AA , zelf hare horizontale projectie is, en dat zij dus hare verticale projectie langs de as heeft; immers zoo AA , gelijk wij zullen aannemen, niet loodregt op de as staat, in welk geval hare verticale projectie een enkel punt zou wezen. Trekt men dus $Q'P'$ evenwijdig met AA , en $Q''P''$ evenwijdig met de as, zoo is ($P'Q'$, $P''Q''$) de begeerde doorsnede. Mogten hier echter AA , en BB , loodregt op de as staan, dan kwam ook de horizontale projectie der begeerde doorsnede loodregt op de as, terwijl hare verticale projectie het enkele punt Q'' zou zijn.

Voor het geval dat de horizontale doorgangen elkander snijden en de verticale evenwijdig loopen, behoeven wij slechts naar het slot van § 50 te verwijzen.

Onderstellen wij *in de derde plaats*, dat de doorgangen van de beide vlakken evenwijdig met de as loopen, dan volgt daaruit

onmiddellijk, dat ook hunne gemeene doorsnede evenwijdig met de as loopt (*Meetk.* 312), en dat dus die doorsnede gevonden zal zijn, zoodra men er slechts één punt van kent. Om dat ééne punt te vinden, neme men een derde projectievlak aan. Indien dan (A, A_1, A_2, A_3) en (B, B_1, B_2, B_3) de gegeven vlakken zijn (Fig. 50, 51 of 52), construeert men volgens § 55, na het derde projectievlak YOZ te hebben aangenomen, de derde doorgangen A_3, A_4 en B_3, B_4 der gegeven vlakken; het snijpunt P''' dier doorgangen is dan een punt van hunne gemeene doorsnede. Laat men uit dit punt eene loodlijn op YOZ vallen, dan is haar voetpunt P' de verticale projectie er van; laat men uit P''' eene loodlijn op XOY vallen en brengt men haar voetpunt p' van de eene OY op de andere OY over in P' , dan is P' de horizontale projectie van het punt P''' . Trekt men dus verder door het gevondene punt (P', P'') eene lijn evenwijdig met de as, dan verkrijgt men de gevraagde gemeene doorsnede $(P'Q', P''Q'')$ der gegeven vlakken.

Mogten bij deze constructie de derde doorgangen evenwijdig worden, dan zou er volgens de voorgaande § uit blijken, dat de gegeven vlakken evenwijdig waren.

Onderstellen wij *in de vierde plaats*, dat een der vlakken slechts een enkelen, bijv. een horizontalen, doorgang heeft, die door den gelijknamigen doorgang van het andere vlak gesneden wordt. Indien dan (A, A_1) en (B, BB_1) de gegeven vlakken zijn (Fig. 53), kent men weder dadelijk één punt (P', P'') van hunne gemeene doorsnede; maar die doorsnede is (*Meetk.* § 327) evenwijdig met BB_1 ; derhalve zal eene lijn, door het punt (P', P'') evenwijdig met BB_1 getrokken, de begeerde zijn. Staat, zooals in onze figuur, BB_1 schuin op de as, dan valt, van die te trekken lijn, de horizontale projectie $P'Q'$ langs A, A_1 , terwijl hare verticale projectie $P''Q''$ evenwijdig met BB_1 , en dus $(P'Q', P''Q'')$ de doorsnede der vlakken (A, A_1) en (B, BB_1) is. Stond echter BB_1 loodrecht op de as, dan zou de horizontale projectie der gevraagde doorsnede het enkele punt P' zijn, terwijl hare verticale projectie in P'' loodrecht op de as zou staan.

Welke onderstelling men ook nopens den stand der doorgangen moge aannemen, zal altijd, wanneer één der gegeven vlakken loodrecht op het horizontale of verticale vlak is, dit gegeven vlak zelf het horizontaal- of verticaal-projecterend vlak der doorsnede, en zijn horizontale of verticale doorgang de horizontale of ver-

ticale projectie der doorsnede zijn. Heeft men dus twee vlakken, zooals $(C, CC_{,,})$ en $(D, DD_{,,})$ in Fig. 34, waarvan het eerste loodrecht op het horizontale, het tweede loodrecht op het verticale staat, zoo zijn de horizontale doorgang $CC_{,,}$ van het eerste en de verticale doorgang $DD_{,,}$ van het tweede, respectievelijk de horizontale en verticale projectiën van de gemeene doorsnede dezer vlakken. Dit komt overeen met de reeds bekende eigenschap, dat eene lijn in de ruimte de doorsnede van hare projecterende vlakken is.

§ 82. WERKSTUK. *Een vlak gegeven zijnde, begeert men eene lijn te vinden, die hetzij in dat vlak ligt, hetzij met dat vlak evenwijdig loopt.*

Daar de begeerde lijn door de opgaaf niet volkomen bepaald wordt, zal men in het algemeen ééne van hare projectiën willekeurig mogen aannemen. Laat dan $(A, AA_{,,})$ het gegeven vlak zijn (Fig. 54 of 55), en $B'Q'$ de willekeurig aangenomene horizontale projectie der begeerde lijn; construeren wij nu eerst volgens § 67 haar projecterend vlak $(B'Q'B_{,,})$, daarna volgens de voorgaande § de verticale projectie $B''Q''$ van de gemeene doorsnede der vlakken $(A, AA_{,,})$ en $(B'Q'B_{,,})$, en trekken wij eindelijk in het verticale vlak eene lijn $C''R''$ evenwijdig met $B''Q''$, dan zijn volgens § 76, $(B'Q', B''Q'')$ en $(B'Q', C''R'')$ twee evenwijdige lijnen, die beide in het vlak $(B'Q'B_{,,})$ liggen, maar waarvan alleen de eerste, als doorsnede der vlakken $(A, AA_{,,})$ en $(B'Q'B_{,,})$ in het vlak $(A, AA_{,,})$ ligt. Derhalve is $(B'Q', B''Q'')$ eene lijn in, en $(B'Q', C''R'')$ eene lijn evenwijdig met het gegeven vlak (Meetk. § 312).

Waren de doorgangen van het gegeven vlak evenwijdig met de as, zoo zou de opgegevene constructie onveranderd blijven.

Stond het gegeven vlak loodrecht op het horizontale, zoo zou men de horizontale projectie der begeerde lijn langs, of evenwijdig met, den horizontalen doorgang moeten aannemen, naargelang de lijn in het gegeven vlak moest liggen of er evenwijdig mede moest zijn, terwijl dan de verticale projectie willekeurig zou wezen. De verklaring, die wij van de leerwijze der projectiën gegeven hebben, zal voldoende zijn om alle bijzonderheden hieromtrent te doen inzien.

§ 83. WERKSTUK. *Het snijpunt van eene gegevene lijn met een gegeven vlak te vinden.*

Het gevraagde snijpunt ligt voor eerst in het gegeven vlak; ten

andere ligt het, als een punt van de gegeven lijn, in elk harer projecterende vlakken; de doorsnede van een dier projecterende vlakken met het gegeven vlak is alzoo geschikt, om het gevraagde punt in de gegeven lijn aan te wijzen. Is dus $(A, AA_{,,})$ het gegeven vlak en $(P'Q', P''Q'')$ de gegeven lijn (Fig. 56), zoo construeert men eerst (zie § 67) een van de projecterende vlakken der lijn, bijv. het horizontaal-projecterend vlak $(P'BB_{,,})$, en daarna (zie § 81) de gemeene doorsnede $(R'B, R''B'')$ der vlakken $(A, AA_{,,})$ en $(P'BB_{,,})$; daar nu de horizontale projectiën der lijnen $(P'Q', P''Q'')$ en $(R'B, R''B'')$ langs elkander vallen, wijst het snijpunt S'' der verticale projectiën, volgens § 75, onmiddellijk het snijpunt (S', S'') der lijnen zelve aan; en dit punt is dan tevens het gevraagde punt. Immers het is een punt van de lijn $(P'Q', P''Q'')$, en ook is het, omdat het in de lijn $(R'B, R''B'')$ ligt, een punt van het vlak $(A, AA_{,,})$, in hetwelk de lijn $(R'B, R''B'')$ gelegen is.

Was de lijn zoodanig gegeven, dat hare verticale projectie $P''Q''$ niet door de geconstrueerde $R''B''$ gesneden werd, dan zou de gegeven lijn het gegeven vlak niet snijden; maar zij zou in dat vlak liggen of er evenwijdig mede loopen, naargelang $R''B''$ langs $P''Q''$ viel of evenwijdig met $P''Q''$ werd, hetgeen uit de voorgaande § duidelijk is.

Wij laten aan den lezer over de constructie ook door het verticaal-projecterend vlak der gegeven lijn uit te voeren, en willen alleen opmerken, dat men in voorkomende gevallen altijd dat projecterend vlak gebruiken moet, waardoor de teekening het minst in duidelijkheid of beknoptheid verliest.

Staat de gegeven lijn loodregt op het horizontale vlak, zooals de lijn $(P', P''Q'')$ in Fig. 57, waar wederom $(A, AA_{,,})$ het gegeven vlak verbeeldt, dan heeft zij geen horizontaal-projecterend vlak, en kan haar verticaal-projecterend vlak niet dienen om de constructie op de boven aangewezen manier te verrigten. In dit geval neemt men een overigens willekeurig vlak $(B, BB_{,,})$ aan, waarvan de horizontale doorgang door P' gaat, en dat loodregt op het horizontale staat; daar dan de lijn $(P', P''Q'')$ in dat vlak ligt, zal wederom de doorsnede $(R'B, R''B'')$ der vlakken $(A, AA_{,,})$ en $(B, BB_{,,})$ de verticale projectie S'' van het begeerde snijpunt aanwijzen, dat zijne horizontale projectie in P' heeft, zoodat nu (P', S'') het gevraagde snijpunt is.

Uit het slot van § 50 is het nu weder duidelijk, hoe men

te handelen heeft, als de gegevene lijn loodregt op het verticale vlak staat (*).

Bij de oplossing van dit werkstuk, zou het overigens niets ter zake doen, indien de doorgangen van het gegeven vlak evenwijdig met de as mogten loopen. Stond echter het gegeven vlak (A, AA''), zooals in Fig. 58, loodregt op het horizontale, dan zou blijkbaar het snijpunt S' van den horizontalen doorgang met de horizontale projectie der gegevene lijn ($P'Q', P''Q''$), onmiddellijk en zonder eenige constructie, het snijpunt (S', S'') van de lijn met het vlak aanwijzen.

§ 84. WERKSTUK. *Het snijpunt van drie gegeven vlakken te vinden.*

Van deze vlakken, waaronder geene evenwijdige ondersteld worden, kiese men er twee naar welgevallen, en construeere volgens § 81 hunne gemeene doorsnede; daarna construeere men volgens de voorgaande § het snijpunt van deze doorsnede met het derde vlak; dan zal blijkbaar dit punt het snijpunt der drie gegevene vlakken zijn. Deze constructie is zoo eenvoudig, dat wij het onnoodig achten haar door eene figuur op te helderen, en wij laten dit alzoö aan den lezer tot eigene oefening over.

Mogt men bij de constructie bevinden, dat de doorsnede van de twee eerstgebruikte vlakken in het derde lag, dan zou hieruit blijken, dat de drie vlakken elkander volgens eene en dezelfde lijn sneden. Mogt men bevinden, dat de eerstgenoemde doorsnede evenwijdig met het derde vlak was, dan zou daaruit blijken, dat de drie vlakken elkander twee aan twee volgens drie evenwijdige lijnen sneden (*Meetk.* § 312 *Gev.* 4°).

Tot de oplossing van dit werkstuk kan men ook volgens § 81 de gemeene doorsneden der drie gegevene vlakken twee aan twee construeren; deze drie gemeene doorsneden zullen dan of elkander in één punt snijden, of langs elkander vallen, of alle drie evenwijdig loopen, naargelang de gegevene vlakken elkander of in een punt, of volgens eene en dezelfde lijn of volgens drie evenwijdige lijnen snijden. In elk dezer gevallen is het voldoende de *beide* projectiën van een der drie genoemde doorsneden, en nog *eene* projectie van eene andere te construeren; het snijpunt van de ge-

(*) Korthedshalve zullen wij ons in het vervolg van eene dergelijke verwijzing naar § 50 onthouden; en aan den lezer overlaten, zelf de constructien op te merken en uit te voeren, die uit eene verwisseling der beide projectievlakken kunnen voortvloeijen.

construeerde gelijknamige projectiën zal dan het snijpunt der drie vlakken aanwijzen, terwijl uit het langs elkander vallen of evenwijdig worden dier gelijknamige projectiën blijken zal, dat de vlakken elkander volgens eene en dezelfde lijn of volgens drie evenwijdige lijnen snijden. Dit alles volgt uit de kenmerken, die wij in § 75 en § 76 opgaven, gepaard met de omstandigheid, dat onder de drie doorsneden, van drie vlakken twee aan twee, nimmer twee elkander kruissende lijnen kunnen voorkomen.

Heeft men, ingeval de drie vlakken elkander in één punt snijden, hunne doorsneden twee aan twee alle drie geconstrueerd, dan heeft men blijkbaar de projectiën gevonden van de ribben der acht drievlakkige hoeken, die door de snijding der drie gegeven vlakken gevormd worden.

§ 85. WERKSTUK. *De verticale projectie te vinden van een punt, dat in een gegeven vlak ligt, indien de horizontale projectie van dat punt naar welgevallen is aangenomen.*

Hier moet het gegeven vlak een schuinen stand ten opzichte van het horizontale vlak hebben; immers bij loodregten stand zou de horizontale projectie van een punt des vlaks niet naar welgevallen kunnen worden aangenomen; terwijl bij evenwijdigen stand, de verticale projectie onmiddellijk zichtbaar zou zijn.

Laat dan $(A, AA_{//})$ het gegeven vlak zijn (Fig. 59 of 60), en zij P' de aangenomene horizontale projectie van een punt in dat vlak, dan zal dit punt blijkbaar het snijpunt zijn van het gegeven vlak, met eene lijn, die in P' loodrecht op het horizontale vlak staat; hierdoor is alzoo ons werkstuk tot dat van § 83 teruggebracht, en wel tot het bijzondere geval dat wij in Fig. 57 beschouwden. In plaats echter van, zooals in Fig. 57, aan het vlak, dat loodrecht op het horizontale door P' gaat, eenen overigens willekeurigen stand $(B, BB_{//})$ te geven, neemt men hier gewoonlijk dit vlak zoodanig aan, dat zijn horizontale doorgang evenwijdig met $AA_{//}$ of met OX wordt. In het eerste geval, zooals in Fig. 59 is voorgesteld, wordt de doorsnede der vlakken $(A, AA_{//})$ en $(B, BB_{//})$ evenwijdig met $AA_{//}$, en dus hare verticale projectie $B''P''$ evenwijdig met de as (zie § 81, 2^{de} onderst.); het trekken der lijnen $P'B$, BB'' en $B''P''$ is dus genoegzaam, om de begeerde verticale projectie P'' te vinden. In het tweede geval, zooals in Fig. 60 is voorgesteld, wordt de doorsnede der vlakken $(A, AA_{//})$ en $(B, B_{//})$ evenwijdig met $AA_{//}$, en dus hare

verticale projectie $B''P''$ almede evenwijdig met $AA_{,,}$ (zie § 81, 4^{de} onderst.); zoodat nu het trekken der lijnen $P'B'$, $B'B''$ en $B''P''$ voldoende is, om de begeerde verticale projectie P'' te verkrijgen.

Vergelijkt men de figuren 59 en 60 met elkander, dan ziet men dadelijk, dat men, door de horizontale en verticale vlakken met elkander te verwisselen, juist van de eene figuur tot de andere overgaat.

In Fig. 59 en 60 is de projectie P' aan dezelfde zijde van $AA_{,,}$ aangenomen als waar $AA_{,,}$ naar toe helt, en ten gevolge daarvan viel de verticale projectie P'' boven de as, of het punt (P', P'') boven het horizontale vlak. Neemt men echter, aan de andere zijde van $AA_{,,}$, de horizontale projectie Q' van een punt des vlaks (Fig. 59) willekeurig aan, dan zal men, om zijne verticale projectie Q'' te vinden, slechts den verlengden doorgang $AA_{,,}$ moeten gebruiken, maar overigens den aangewezen weg kunnen volgen, zooals in de figuur te zien is; hier vindt men nu Q'' beneden de as, zoodat het punt (Q', Q'') onder het horizontale vlak ligt.

Waren de doorgangen van het gegeven vlak ($A, A_{,,}, A_{,,}A_{,,}$) evenwijdig met de as, zooals in Fig. 61, dan zou men, om den boven aangewezen weg te kunnen volgen, een derde projectievlak moeten aannemen; na dan den derden doorgang $A_{,,}A_{,,}$ van het gegeven vlak geconstrueerd te hebben, zal men, uit de horizontale projectie P' van een punt in dat vlak, eerst de derde projectie P''' , en daarna de verticale projectie P'' van dat punt kunnen afleiden. Het zal hier echter gemakkelijker zijn, zich van een dergelijk vlak ($B, BB_{,,}$) als in Fig. 57 te bedienen.

Uit het behandelde werkstuk volgt onmiddellijk: hoe men in een gegeven vlak een punt kan aannemen; of ook hoe men onderzoeken kan of een gegeven punt al dan niet in een gegeven vlak ligt: en eindelijk nog hoe men, als van een vlak slechts één der beide doorgangen, benevens een punt in het vlak, gegeven is, den anderen doorgang kan vinden.

§ 86. WERKSTUK. *Door een gegeven punt een vlak te brengen, dat evenwijdig is met een gegeven vlak.*

Trekt men door het gegevene punt eene lijn, evenwijdig met eene lijn in het gegevene vlak, dan zal de alzoo getrokken lijn in het gevraagde vlak liggen (*Meetk.* § 312); en door dan het ontmoetingspunt van die lijn met een der projectievlakken te construeren, verkrijgt men dadelijk een punt van een der doorgangen

van het gevraagde vlak; want het is klaar, dat, zoo eene lijn in een vlak ligt, de ontmoetingspunten van die lijn met de projectievlakken in de doorgangen van het vlak zullen liggen. Voor de lijn in het gegebene vlak, waarmede de te trekken lijn evenwijdig zal loopen, neemt men hier gemakshalve een van de beide doorgangen. Indien bijv. (P', P'') het gegebene punt en $(C, CC_{,,})$ het gegebene vlak is (Fig. 59 of 60), trekt men door het punt (P', P'') , of zooals in Fig. 59 eene lijn $(BP', B''P'')$ evenwijdig met $CC_{,,}$, of zooals in Fig. 60 eene lijn $(B'P', B''P'')$ evenwijdig met $CC_{,,}$; construeert men verder in Fig. 59 het punt B'' , waar de getrokken lijn het verticale vlak ontmoet, dan is dit punt een punt van den verticalen doorgang van het gevraagde vlak; construeert men in Fig. 60 het punt B' , waar de getrokken lijn het horizontale vlak ontmoet, dan is dit punt een punt van den horizontalen doorgang des gevraagden vlaks. Daar men nu weet, dat de doorgangen van het gevraagde vlak evenwijdig met de doorgangen van het gegeven vlak moeten loopen (zie § 80), kan men in Fig. 59 door B'' eerst $A_{,,}A$ evenwijdig met $C_{,,}C$, en daarna $AA_{,,}$ evenwijdig met $CC_{,,}$ trekken, om het gevraagde vlak $(A, AA_{,,})$ te bekomen; terwijl men in Fig. 60 het gevraagde vlak $(A, AA_{,,})$ verkrijgt, indien men door B' eerst $A_{,,}A$ evenwijdig met $C_{,,}C$, en daarna $AA_{,,}$ evenwijdig met $CC_{,,}$ trekt. Mogt men zich nog nader willen overtuigen, dat het vlak $(A, AA_{,,})$, door elk dezer constructien gevonden, werkelijk het begeerde is, zoo merke men slechts op, dat volgens het voorgaande werkstuk het punt (P', P'') in het vlak $(A, AA_{,,})$ ligt; en dat volgens het kenmerk van § 80 de vlakken $(A, AA_{,,})$ en $(C, CC_{,,})$ evenwijdig zijn.

Waren de doorgangen van het gegebene vlak $(C, C_{,,}, C_{,,}C_{,,})$ evenwijdig met de as, zooals in Fig. 61, dan zou men een derde projectievlak moeten aannemen, en niet alleen den derden doorgang $C_{,,}C_{,,}$ van het gegeven vlak, maar ook de derde projectie P''' van het gegeven punt (P', P'') moeten bepalen. De derde doorgang van het gevraagde vlak, zal nu niet slechts volgens § 80 evenwijdig met $C_{,,}C_{,,}$ moeten zijn, maar ook door P''' moeten gaan, omdat dit vlak, even als het gegeven vlak, loodrecht op het derde projectievlak zal zijn; die derde doorgang $A_{,,}A_{,,}$ kan dus onmiddellijk getrokken worden, en daaruit kan men terstond de horizontale en verticale doorgangen $A, A_{,,}$ en $A_{,,}A_{,,}$ afleiden, zoodat dan $(A, A_{,,}, A_{,,}A_{,,})$ het gevraagde vlak is.

§ 87. WERKSTUK. *Den standhoek te construeren van een gegeven vlak met het horizontale.*

Dit werkstuk kan slechts te pas komen, indien het gegeven vlak Aa , dat wij in Fig. 62 door eene perspectievische afbeelding hebben voorgesteld, eenen schuinen stand ten opzichte van het horizontale vlak OL heeft. Laat P' de horizontale projectie zijn van een punt P , dat in het vlak Aa willekeurig is aangenomen; indien men dan uit P' op den horizontalen doorgang AA , eene loodlijn $P'H$ nederlaat, en haar voetpunt H met P vereenigt, is ook PH loodregt op AA , (*Meetk.* § 307) en dus PHP' de bedoelde standhoek; verbeeldt men zich verder dat de driehoek $P'HP$, die in P' regthoekig is, om de zijde $P'H$ wordt gewenteld, tot dat hij op het horizontale vlak OL komt te liggen, dan is, ook in dien neergewentelden driehoek, $P'HP$ de bedoelde standhoek, terwijl de driehoek regthoekig in P' is gebleven. Deze neergewentelde regthoekige driehoek, en dus ook de begeerde standhoek, kan nu in eene constructiefiguur onmiddellijk geconstrueerd worden, nadat men een punt P in het gegeven vlak heeft aangenomen; want de lijn $P'H$, die loodregt op AA , staat, ligt reeds in het horizontale vlak, en de lengte van $P'P$ staat dan op het verticale vlak afgeteeekend. Indien dus $(A, AA,)$ het gegeven vlak is (Fig. 63, neemt men daarin, volgens § 85, een willekeurig punt (P', P'') aan, trekt $P'H$ loodregt op AA , stelt $P'P = pP''$ loodregt op $P'H$, en trekt PH , dan is $P'HP$ de begeerde standhoek.

Bij deze constructie is de verticale doorgang AA , niet anders dan tot het aannemen van het punt (P', P'') gebruikt. Was dus het vlak alleen door zijn horizontalen doorgang AA , en door een in het vlak gelegen punt (P', P'') gegeven, dan zou het, om den standhoek te vinden, overtollig zijn vooraf den verticalen doorgang te construeren.

Zijn echter de beide doorgangen gegeven, dan kan men voor het punt, dat in het vlak moet aangenomen worden, gemakshalve een punt in den verticalen doorgang nemen, waardoor de constructie eenigzins eenvoudiger wordt. Neemt men bijv. in den verticalen doorgang (Fig. 63) het punt Q'' aan, waarvan de horizontale projectie Q' in de as ligt, dan moet men, om den aangewezen weg te volgen, $Q'I$ loodregt op AA , neerlaten, $Q'Q = Q'Q''$ loodregt op $Q'I$ stellen, en daarna IQ trekken, als wanneer $Q'IQ$ de begeerde standhoek zal wezen. Deze standhoek staat in I ,

de eerstgeconstrueerde standhoek $P'HP$ staat in H , loodregt op AA_1 ; maar zij verschillen niet in grootte, daar blijkbaar de driehoeken $Q'IQ$ en $P'HP$ gelijkvormig zijn; immers uit de figuur volgt:

$$P'H : Q'I = AB : AQ' = BB'' : Q'Q'' = P'P : Q'Q.$$

Staat de horizontale doorgang van het gegeven vlak loodregt op de as, dan is de hoek van den verticalen doorgang met de as, de begeerde standhoek.

Loopen de beide doorgangen van het vlak evenwijdig met de as, dan levert het aannemen van een derde projectievlak, en het construeren van den derden doorgang, onmiddellijk den begeerden standhoek op; zoo is bijv. in Fig. 50 de hoek $A_{11}A_{11}O$ de standhoek van het vlak $(A_1A_1, A_{11}A_{11})$ met het horizontale.

§ 88. Neemt men in Fig. 63 op de as een stuk $ph = P'H$, en trekt men $P'h$, dan is ook phP'' de grootte van den standhoek, dien het vlak (A_1AA_{11}) met het horizontale maakt; want de regthoekige driehoeken $P'HP$ en phP'' hebben gelijke regthoeks-zijden en zijn dus gelijk en gelijkvormig, zoodat de hoek phP'' gelijk is aan den hoek $P'HP$. Verbeeldt men zich: dat de neergeslagen driehoek $P'HP$, om de zijde $P'H$, weder opgerigt wordt, tot dat de zijde $P'P$ loodregt op het horizontale vlak staat; dat daarna die driehoek om de zijde $P'P$ wordt gewenteld, tot dat zijn vlak evenwijdig met het verticale is; en dat eindelijk de driehoek, na in dien evenwijdigen stand gekomen te zijn, op het verticale vlak wordt geprojecteerd, dan zal blijkbaar phP'' deze projectie zijn. De laatste constructie verschilt dus van de eerstbeschrevene eigenlijk daardoor, dat men aan het standvlak (door *standvlak* het vlak te verstaan waarin de standhoek ligt) eene andere beweging heeft gegeven, om het in de constructiefiguur in zijne ware gedaante te bekomen.

§ 89. WERKSTUK. *Den verticalen doorgang van een vlak te construeren, indien zijn horizontale doorgang en zijn standhoek met het horizontale vlak gegeven zijn.*

Hoe dit geschieden kan is uit het voorgaande werkstuk duidelijk. Is namelijk AA_1 de gegeven doorgang (Fig. 63), zoo neemt men in de as een willekeurig punt Q' aan, trekt daaruit $Q'I$ loodregt op AA_1 , maakt hoek $Q'IQ$ gelijk aan den gegeven standhoek, en stelt uit Q' eene loodlijn op $Q'I$, tot dat zij het tweede been van den standhoek in Q ontmoet; stelt men dan verder

uit Q' eene loodlijn $Q'Q'' = Q'Q$ op de as, zoo kan de begeerde verticale doorgang uit A door Q'' getrokken worden.

Zal echter de vraag bepaald zijn, dan moet er nog gegeven zijn aan welke zijde het vlak den gegeven hoek met het horizontale vlak moet maken. Is dit niet gegeven, dan kan men den gegeven standhoek aan weerszijden van $Q'I$ uitzetten; hiermede stemt dan overeen, dat de loodlijn op de as, die gelijk aan $Q'Q$ genomen wordt, ook aan weerszijden van de as kan opgericht worden, waardoor men twee punten Q'' of q'' verkrijgt, waardoor de begeerde verticale doorgang uit A kan worden getrokken. Het vlak $(A, AA_{,,})$ maakt dan aan den eenen, het vlak $A, Aa_{,,}$ aan den anderen kant, den gegeven standhoek met het horizontale vlak.

Het zal wel onnoodig zijn, hier nog over de bijzondere gevallen uit te weiden, dat de gegeven horizontale doorgang loodregt op, of evenwijdig met de as mogt wezen.

† § 90. WERKSTUK. *Een gegeven vlak om zijn horizontalen doorgang op het horizontale vlak neer te slaan, en daarna weder op te rigten.*

Voor zooverre het gegevene vlak loodregt op het horizontale mogt staan, hebben wij dit werkstuk reeds in § 70 leeren oplossen; derhalve hebben wij ons nu te bepalen tot een vlak, dat schuin op het horizontale staat.

Het neerslaan heeft wederom ten doel, om te vinden, waar de punten, die men in het gegeven vlak heeft verkiesen aan te nemen, op het horizontale vlak komen te liggen, als het gegeven vlak om den doorgang neergewenteld wordt; het oprigten heeft ten doel, om te vinden, waar zekere punten, die zich in het neergeslagen vlak bevinden, hunne projectiën verkrijgen, als het vlak in zijn oorspronkelijken stand wordt teruggebragt.

Wanneer een vlak, zooals het vlak Aa in Fig. 62 afgebeeld, om zijn horizontalen doorgang AA , gewenteld wordt, beschrijft eenig punt P van dat vlak eenen in de figuur voorgestelden cirkelboog, die de loodlijn PH, uit P op den doorgang AA , neergelaten, tot straal, en het voetpunt H van die loodlijn tot middelpunt heeft. De projectie P'H van deze loodlijn staat almede in H loodregt op AA ; wordt dus het vlak Aa om AA , op het horizontale vlak OL neergeslagen, dan komt het punt P, den genoemden cirkelboog volgende, in het verlengde van HP' , en wel aan deze of gene zijde van AA , naargelang men het vlak Aa vóór- of

achterover neerslaat. Is nu P_n het aan deze of gene zijde neergeslagen punt, dan is $HP_n = HP$.

Daar nu in § 87 reeds gebleken is, hoe men in eene constructiefiguur, uit de projectiën van het punt P , onmiddellijk het punt H en de lengte van HP vinden kan, is het ook terstond duidelijk, hoe men in de constructiefiguur het neergeslagen punt P_n verkrijgt.

Laat bijv. AA , de horizontale doorgang zijn (Fig. 64 of 65) van het gegeven vlak, waarin het punt (P', P'') gelegen is; construeert men dan volgens § 87 het neergeslagen standvlak $P'HP$, en maakt men, op HP' of haar verlengde, $HP_n = HP$, dan is P_n het neergeslagen punt; in Fig. 64 wanneer het vlak vóórover, in Fig. 65 wanneer het achterover wordt neergeslagen. Stelt men zich voor, dat de vlakke figuur P_nHPP' om de lijn P_nH gewenteld wordt, tot dat zij loodregt op het horizontale vlak komt te staan, dan wordt de cirkelboog PP_n , dien wij in de figuren gebruikten om het gelijknemen van HP_n aan HP te kenmerken, de werkelijke boog, dien het punt (P', P'') beschrijft, bij het neerslaan van het vlak om den doorgang AA .

Het beschouwde punt (P', P'') lag boven het horizontale vlak; neemt men echter in het vlak (A, AA_n) een punt (Q', Q'') , dat onder het horizontale vlak ligt (zie § 85 en Fig. 59), dan vindt men (Fig. 64) de plaats Q_n , die het punt (Q', Q'') na het neerslaan verkrijgt, volkomen op dezelfde wijze, namelijk door $Q'I$ loodregt op AA , te trekken, $Q'Q = Q'Q''$ loodregt op $Q'I$ te stellen, IQ te trekken en $IQ_n = IQ$ te nemen. Daar de punten (P', P'') en (Q', Q'') in het vlak (A, AA_n) aan weerszijden van AA , liggen, zullen zij blijkbaar, ook na het neerslaan des vlaks, in P_n en Q_n aan weerszijden van AA , vallen. Overigens zijn hier de driehoeken $HP'P$ en $IQ'Q$ aan den tegengestelden kant hunner zijden HP' en IQ' geteekend, omdat men dan die driehoeken in denzelfden zin om hunne zijden HP' en IQ' moet laten wentelen, wanneer men door die wenteling beide loodregt op het horizontale vlak, doch $HP'P$ bovenwaarts en $IQ'Q$ nederwaarts, wil brengen, ten einde daardoor de punten P en Q weder op hunne ware plaats in de ruimte, en dus de lijnen HP en IQ in het vlak (A, AA_n) te doen komen.

Kent men van het punt dat neergeslagen moet worden de beide projectiën, dan heeft men tot dit neerslaan den verticalen door-

gang van het vlak niet noodig; in Fig. 65 is dan ook het punt P_n geconstrueerd, zonder dat in die figuur de verticale doorgang van het vlak voorkomt. Kent men den standhoek van het vlak met het horizontale, en slechts de horizontale projectie van het punt, dan heeft men tot het neerslaan, noch den verticalen doorgang van het vlak, noch de verticale projectie van het punt noodig; in Fig. 65 is dan ook noch die doorgang, noch die projectie gebruikt, om de plaats Q_n te construeren, waar na het neerslaan het punt des vlaks zal komen, dat zijne horizontale projectie in Q' heeft. Hier is namelijk $Q'I$ loodregt op AA , getrokken, $Q'IQ$ gelijk aan den bekenden standhoek gemaakt, $Q'Q$ loodregt op $Q'I$ gesteld, waardoor de diepte $Q'Q$ van het punt beneden het horizontale vlak gevonden werd; en verder is, op het verlengde van IQ' , $IQ_n = IQ$ genomen.

Uit deze constructie van het punt Q_n blijkt tevens, dat het niets ter zake zou doen, indien de doorgang AA , evenwijdig met de as mogt loopen; zoodra men slechts op de eene of andere wijze den standhoek gevonden heeft.

Wat het weder oprigten van het vlak betreft, merken wij op, dat dit eerst na een voorafgegaan neerslaan te pas komt, als wanneer door dit neerslaan de standhoek bekend is geworden. Hieruit volgt, dat men tot het oprigten onmiddellijk den weg, tot het neerslaan aangewezen, in een tegengestelden zin zal kunnen volgen. Is namelijk P_n het punt in het neergeslagen vlak, dan trekt men (Fig. 64 of 65) P_nH loodregt op den doorgang AA ; zet op deze loodlijn of haar verlengde den bekenden standhoek uit; maakt, op het daardoor verkregen tweede been van dien hoek, $HP = HP_n$; laat uit P eene loodlijn PP' op HP_n of haar verlengde neder; trekt uit haar voetpunt P' eene lijn regthoekig door de as, en neemt op die lijn $pP'' = PP'$, dan zijn P' en P'' de projectiën, die het neergeslagen punt P_n verkrijgt, nadat het vlak weder opgerigt is.

Bij de toepassingen, die men van dit werkstuk maken kan, is het verkiesselijk, tusschen een vóór- of achteroverslaan van het vlak eene zoodanige keuze te doen, dat de neergeslagene punten zich zoo min mogelijk met het overige deel der teekening vermengen.

§ 91. Staat het vlak, dat neergeslagen en weder opgerigt moet worden, loodregt op het verticale, dan wordt het onnoodig, voor

het punt dat men neerslaan of oprigten wil, een bijzonder standvlak te construeren; en wel, omdat in dit geval zulk een standvlak evenwijdig met het verticale is, en zich dus (zie § 20) op het verticale vlak in zijne ware gedaante projecteert; terwijl elk punt van het vlak zijne verticale projectie in den verticalen doorgang heeft.

Moet bijv. het vlak $(A, AA_{//})$, welks horizontale doorgang (Fig. 66) loodrecht op de as staat, voorover neergeslagen worden, en wil men de plaats vinden, die de punten (P', P'') en (Q', Q'') van dit vlak na het neerslaan verkrijgen, dan trekt men $P'H$ en $Q'I$ loodrecht op $AA_{//}$, en neemt op die loodlijnen $HP_n = AP''$ en $IQ_n = AQ''$, als wanneer P_n en Q_n de neergeslagen punten zijn. De cirkelbogen die in de figuur, uit A als middelpunt beschreven, gebezigd zijn om de gelijkheid van HP_n met AP'' en van IQ_n met AQ'' aan te wijzen, zijn hier de verticale projectiën en tevens de ware gedaanten van de bogen, die door de punten (P', P'') en (Q', Q'') bij het neerslaan, om H en I als middelpunten, beschreven worden.

§ 92. De meerdere eenvoudigheid der constructie, in het geval der voorgaande §, kan ook verkregen worden bij een vlak dat niet loodrecht op het verticale staat. Om namelijk een vlak met verschillende daarin gelegene punten neer te slaan, is het niet noodig voor al die punten verschillende standvlakken in de teekening te brengen, zooals dit in Fig. 64 en 65 voor de punten (P', P'') en (Q', Q'') is geschied. Immers men kan zich voorstellen, dat al die standvlakken evenwijdig met zich zelf naar een en hetzelfde punt van den horizontalen doorgang verschoven worden, en dáár een enkel standvlak uitmaken. Door lijnen, evenwijdig met den horizontalen doorgang, kan men dan de punten vóór het neerslaan, op dat standvlak, en ná het neerslaan, weder op de behoorlijke plaats, overbrengen. Hierdoor ontgaat men de verwarring, die anders de menigte van lijnen in de teekening zou kunnen veroorzaken.

Om het genoemde enkele standvlak in zijn neergeslagen toestand te verkrijgen, is het almede niet noodig een der punten te bezigen die men heeft neer te slaan; in plaats daarvan kan men een punt van den verticalen doorgang van het vlak gebruiken.

Wil men bijv. het in Fig. 67 voorgestelde vlak $(A, AA_{//})$, met de daarin door hunne horizontale projectiën P' , Q' en R' bepaalde punten, om den doorgang $AA_{//}$ neerslaan, dan trekt men eene

lijn O_1X_1 die AA , ergens in a regthoekig snijdt; voorts neemt men in AA , een punt B'' , trekt eerst $B''B'$ loodregt op OX , daarna $B'b''$ evenwijdig met AA , en neemt $b'b'' = B'B''$, dan zal, als men uit a eene lijn aa , door b'' trekt, het standvlak van het punt a des doorgangs, in zijn neergeslagen toestand om O_1X_1 , door X_1aa , worden voorgesteld. Mogt men zich hiervan nog nader willen overtuigen, dan merke men op, dat de constructie van den standhoek in a , volgens § 87, eenen driehoek $aB'B$ oplevert, die met den driehoek $ab'b''$ gelijk en gelijkvormig is.

Na dit standvlak X_1aa , geconstrueerd te hebben, trekt men uit P' , Q' en R' lijnen evenwijdig met AA ; deze bepalen dan, door hare snijding met aa , de op het standvlak vallende projectiën p'' , q'' en r'' der punten die neergeslagen moeten worden; na dus verder uit P' , Q' en R' loodlijnen op AA , getrokken te hebben, zet men op die loodlijnen, van AA , af, stukken uit die respectievelijk gelijk zijn aan ap'' , aq'' en ar'' , zooals dit in de figuur door cirkelbogen en met AA , evenwijdige lijnen is aangegeven; de uiteinden P_n , Q_n en R_n dezer uitgezette stukken wijzen dan de plaatsen aan, waar de punten des vlaks, door de projectiën P' , Q' en R' bepaald, zullen gelegen zijn, als het vlak neergeslagen is.

Men zal gereedelijk inzien, dat de thans aangewezen constructie eigenlijk daarop neerkomt, dat men, na O_1X_1 als eene nieuwe as van projectie en het neergeslagene standvlak als een nieuw verticaal vlak beschouwd te hebben, de handelwijze volgt, die wij in de voorgaande § verklaarden. Ten opzichte van deze nieuwe as zou dan a,aa , het gegeven vlak zijn.

Voorts zal het wel geene aanwijzing behoeven, hoe men hetzelfde standvlak X_1aa , gebruiken kan, om de projectiën te vinden die eenig punt van het neergeslagen vlak zal verkrijgen, als het weder opgerigt wordt. Hoezeer wij, om geene uitgebreide teekening te verkrijgen, het punt B'' vrij dicht bij het punt A namen, zal men, om eene naauwkeurige constructie te verkrijgen, wèl doen een punt te bezigen, dat tamelijk ver van A ligt.

§ 93. Het is klaar, dat men evenzoo een vlak om zijn verticalen doorgang op het verticale vlak kan neerslaan. Door het verklaarde werkstuk leert men alzoo de ware gedaante en grootte van eene vlakke figuur kennen, als een van hare beide projec-

tiën, benevens de doorgangen van haar vlak, gegeven zijn. Waren bijv. P' , Q' en R' in Fig. 67, de projectiën van de hoekpunten van eenen driehoek in het vlak $(A, AA_{//})$ gelegen, dan zou men slechts de neergeslagen punten P_n , Q_n en R_n door regte lijnen moeten vereenigen, om dien driehoek in zijne ware gedaante en grootte te verkrijgen. Voor eene andere regtlijnige figuur, zou men al de hoekpunten of voornaamste punten dier figuur moeten neerslaan; en voor eene kromlijnige figuur, zoovele van hare punten, dat men haar, door die neergeslagen punten, met eene genoegzame naauwkeurigheid uit de hand kon afteekenen.

§ 94. Om eene in het vlak gelegene lijn neer te slaan, kan men in het algemeen twee punten van die lijn neerslaan, en de lijn zelf door die neergeslagene punten trekken. Wanneer echter eene lijn in het vlak Aa gelegen (Fig. 62), zooals bijv. de lijn PC , den doorgang in eenig punt C snijdt, blijft bij het neerslaan dat punt op zijne plaats; daar nu dit punt C , als snijpunt van de lijn met het horizontale vlak, in eene constructiefiguur dadelijk geconstrueerd kan worden, is de constructie van het neergeslagene punt P_n voldoende, om ook dadelijk de neergeslagene lijn CP_n te vinden. Bevond zich in het vlak Aa eene lijn, die door P evenwijdig met den doorgang AA , liep, dan zou die lijn neergeslagen ook door P_n evenwijdig met AA , loopen, zoodat weder het neerslaan van het enkele punt P toereikend is, om de neergeslagene lijn te bekomen.

+ § 95. WERKSTUK. *Den afstand van twee evenwijdige vlakken te construeren.*

Laten $(A, AA_{//})$ en $(B, BB_{//})$ de twee evenwijdige vlakken zijn (Fig. 68), wier afstand gevraagd wordt; dan construeert men volgens § 87 den standhoek $P'HP$ van het vlak $(A, AA_{//})$ met het horizontale, verlengt $P'H$ tot aan den doorgang BB , in I , en trekt IQ evenwijdig met HP , zoo is, wegens de evenwijdigheid der vlakken, $P'IQ$ de standhoek van het vlak $(B, BB_{//})$ met het horizontale vlak (*Meetk.* § 327, *Gev.*). Trekt men nu HK loodregt op IQ , dan is dit de gevraagde afstand; want verbeeldt men zich, dat het neergeslagene gemeenschappelijke standvlak $PP'HIQ$, om de lijn $P'I$ weder opgerigt wordt, dan komt de lijn HK in H en K loodregt op de vlakken $(A, AA_{//})$ en $(B, BB_{//})$ te staan. Na de oprigting toch, komen de lijnen HP en IQ in die vlakken; het standvlak en dus ook de lijn HK komen loodregt op AA ,

terwijl HK reeds loodregt op HP zijnde, dan loodregt op de beide in het vlak (A,AA,,) liggende lijnen AA, en HP staat.

Het is duidelijk dat eene loodlijn CD, ergens anders tusschen HP en IQ getrokken, almede de afstand der beide vlakken is.

Mogten de vlakken loodregt op eenig projectievlak staan, hetzij dan op het horizontale, op het verticale, of op het derde projectievlak, dan zou blijkbaar de afstand hunner horizontale, verticale of derde doorgangen tevens de afstand der vlakken zijn.

§ 96. WERKSTUK. *Een vlak gegeven zijnde, begeert men een daarmede evenwijdig vlak te vinden, dat er op een gegeven afstand van verwijderd is.*

De oplossing van dit werkstuk kan dadelijk bij omkeering uit het voorgaande afgeleid worden. Is namelijk (A,AA,,) het gegeven vlak (Fig. 68), dan construeert men zijn standhoek P'HP met het horizontale; trekt, op den gegeven afstand, eene lijn KQ evenwijdig met HP; door het snijpunt I van KQ met P'H, trekt men voorts B,B evenwijdig met A,A, en daarna uit B, BB,, evenwijdig met AA,,. Dan zal (B,BB,,) het gevraagde vlak zijn.

Door aan de andere zijde van HP eene lijn op den gegeven afstand evenwijdig met HP te trekken, zal men blijkbaar een tweede antwoord op de vraag bekomen.

§ 97. WERKSTUK. *Door twee elkander snijdende lijnen een vlak te brengen.*

Wanneer eene lijn in een vlak ligt, zijn de ontmoetingspunten van die lijn met het horizontale en verticale vlak, blijkbaar punten van den horizontalen en verticalen doorgang des vlaks. Door dus de ontmoetingspunten van de gegevene lijnen met de projectievlakken, volgens § 68, te construeren, verkrijgt men dadelijk twee punten van den horizontalen en twee punten van den verticalen doorgang. Daar echter de beide doorgangen elkander in 't algemeen in één punt van de as moeten snijden, heeft men van de vier genoemde punten er slechts drie noodig, om de doorgangen van het gevraagde vlak te kunnen trekken; alleen wanneer hun snijpunt met de as buiten de teekening mogt vallen, zou men zich van alle vier de bedoelde punten bedienen.

Mogten sommige der te construeren ontmoetingspunten buiten de teekening vallen, dan kan men in ieder der lijnen een willekeurig punt aannemen en door deze twee punten eene nieuwe lijn trekken. Daar dan ook deze nieuwe lijn in het te vinden vlak

ligt, zullen almede hare ontmoetingspunten met de projectievlakken punten der begeerde doorgangen zijn, en dus tot constructie van het vlak kunnen dienen. Dit hulpmiddel zou men bijv. kunnen aanwenden, als van de gegeven lijnen de eene evenwijdig met het horizontale, de andere evenwijdig met het verticale vlak was. Wij merken echter op, dat zoo een der lijnen evenwijdig met een projectievlak is, ook de begeerde doorgang en de projectie van de lijn, op dat projectievlak evenwijdig zullen loopen. Is een der lijnen evenwijdig met de as, dan is ook het begeerde vlak, en dus elk zijner beide doorgangen, evenwijdig met de as.

Slaat men het vlak, door de elkander snijdende lijnen gebragt, om den horizontalen doorgang neer, dan verkrijgt men eene andere oplossing van de vraag *om den hoek van twee lijnen te vinden*, dan reeds in § 78 gegeven is.

Laten bijv. $(A'B', A''B'')$ en $(C'D', C''D'')$ de elkander in (S', S'') snijdende lijnen zijn (Fig. 69); construeert men dan volgens § 68 de punten E en F, waar deze lijnen het horizontale vlak ontmoeten, dan is EF de horizontale doorgang van het vlak, dat door de twee lijnen gaat. Evenzoo kan men den verticalen doorgang construeren, dien wij echter hier zullen achterwege laten. Wil men nu dit vlak, om zijn horizontalen doorgang EF, achterover neerslaan, dan gaat men volgens § 90, om te vinden waar het punt (S', S'') neerkomt, aldus te werk: trek $S'H$ loodregt op EF, stel op $S'H$ eene loodlijn $S'S = S''$, trek HS en neem, op het verlengde van $S'H$, $HS_n = HS$, dan is S_n het neergeslagen punt (S', S'') . De punten E en F blijven bij het neerslaan, zooals wij in § 94 opmerkten, op hunne plaats; trekt men dus ES_n en FS_n , dan zijn dit de neergeslagene lijnen, en bijgevolg is $ES_n F$ de hoek, waaronder de lijnen $(A'B', A''B'')$ en $(C'D', C''D'')$ elkander snijden.

§ 98. WERKSTUK. *Door twee evenwijdige lijnen een vlak te brengen.*

Op grond van hetgeen in de oplossing van het voorgaande werkstuk gezegd is, zal men ook hier slechts de ontmoetingspunten van die lijnen met de projectievlakken behoeven te construeren, om onmiddellijk zoovele punten van de doorgangen des begeerden vlaks te bekomen. Mogten sommige ontmoetingspunten buiten de teekening vallen, dan kan men weder het in de voorgaande oplossing aangewezen hulpmiddel gebruiken. Loopen de gegeven lijnen

evenwijdig met de as, dan zal men, hetzij dit hulpmiddel, hetzij een derde projectievlak kunnen aanwenden, om de doorgangen van het te vinden vlak te bekomen.

Slaat men het vlak, door de beide lijnen gebragt, om den horizontalen doorgang neer, zoo leert men daardoor gemakkelijk *den afstand van twee evenwijdige lijnen vinden*. Laten bijv. $(A'B', A''B'')$ en $(C'D', C''D'')$ twee gegevene evenwijdige lijnen zijn (Fig. 70); bepalen wij dan de punten E en F, waar deze lijnen het horizontale vlak ontmoeten, zoo is EF de horizontale doorgang van het vlak, dat door de gegevene evenwijdige lijnen gaat, en waarvan wij den verticalen doorgang tot ons oogmerk niet noodig hebben. Nemen wij in een der lijnen, bijv. in $(C'D', C''D'')$, een willekeurig punt (P', P'') aan, en construeren wij volgens § 90 dit punt in zijn neergeslagen toestand P_n , dan is, daar de punten E en F bij het neerslaan op hunne plaats blijven en omdat de lijnen evenwijdig zijn, FP_n de neergeslagene $(C'D', C''D'')$, terwijl EQ_n , evenwijdig met FP_n getrokken, de neergeslagene $(A'B', A''B'')$ zal zijn. Trekken wij dus tusschen deze neergeslagene lijnen eene loodlijn GH, zoo is dit de afstand der evenwijdige lijnen $(A'B', A''B'')$ en $(C'D', C''D'')$.

§ 99. WERKSTUK. *Door eene gegevene lijn en een gegeven punt een vlak te brengen.*

Trekt men, uit een willekeurig punt van de gegevene lijn, eene andere lijn, die door het gegevene punt gaat, zoo heeft men twee lijnen, die in het te vinden vlak moeten liggen. Zoo men dus volgens § 97 een vlak door deze beide lijnen brengt, zal dit vlak blijkbaar het begeerde zijn.

Ook kan men, en dit is dikwijls dienstiger tot de duidelijkheid der teekening, door het gegevene punt eene lijn evenwijdig met de gegevene lijn trekken, en door die evenwijdige lijnen een vlak brengen; dit zal dan blijkbaar almede het gevraagde vlak zijn.

Slaat men het vlak, dat door eene lijn en een punt gebragt is, om den horizontalen doorgang neder, zoo leidt dit tot de oplossing der vraag, *om uit een gegeven punt eene lijn te trekken, die eene gegevene lijn onder een gegeven hoek snijdt*. Laat bijv. $(A'B', A''B'')$ de gegevene lijn en (P', P'') het gegevene punt zijn (Fig. 71); bepalen wij dan eerst het ontmoetingspunt A' van de gegevene lijn met het horizontale vlak, vervolgens het punt C, waar het horizontale vlak ontmoet wordt door eene lijn uit (P', P'') evenwijdig

met ($A'B'$, $A''B''$) getrokken, en trekken wij daarna eene lijn door A' en C , dan is dit de horizontale doorgang van het vlak, dat door ($A'B'$, $A''B''$) en (P' , P'') kan gebragt worden. Wordt nu dit vlak om dien doorgang neergeslagen, dan komt volgens § 90 het punt (P' , P'') in P_n te liggen, terwijl blijkens het voorgaande werkstuk eene lijn $A'B_n$ uit A' evenwijdig met de rigting van C naar P_n getrokken, de neergeslagene lijn ($A'B'$, $A''B''$) zal zijn. In dit neergeslagen vlak, kan men zooals in de gewone Meetkunst geleerd is onmiddellijk de lijn P_nQ_n trekken, die $A'B_n$ onder den gegeven hoek α snijdt, en er blijft slechts over te vinden, waar de projectiën van het punt Q_n der lijn komen zullen, als het vlak wordt opgericht. Dit nu is zeer gemakkelijk; want volgens hetgeen wij over het neerslaan en oprigten van een vlak verklaard hebben, moet de horizontale projectie van Q_n in de loodlijn liggen, die men uit Q_n op den doorgang $A'C$ kan neerlaten; maar die horizontale projectie moet ook in $A'B'$ liggen, omdat Q_n een punt van de lijn is; trekken wij dus uit Q_n eene lijn regthoekig door $A'C$, dan is haar snijpunt Q' met $A'B'$ de begeerde horizontale projectie en dus Q'' de verticale projectie van het punt Q_n na de oprigting. Vereenigen wij dus eindelijk de punten (P' , P'') en (Q' , Q''), dan is ($P'Q'$, $P''Q''$) de gevraagde lijn.

Uit P_n kan men twee lijnen trekken, die met $A'B_n$ den gegeven hoek α maken, en van het tweede snijpunt worden de projectiën even als die van Q_n gevonden. Duidelijkheidshalve hebben wij die tweede lijn in onze figuur weggelaten.

§ 100. WERKSTUK. *Door drie geveene punten een vlak te brengen.*

Vereenigt men de geveene punten twee aan twee, of vereenigt men slechts twee punten en trekt men door het derde eene lijn, die evenwijdig met de vereenigingslijn loopt, dan moeten al deze lijnen in het gevraagde vlak liggen, hetwelk diensvolgens door toepassing van een der voorgaande werkstukken onmiddellijk gevonden wordt.

Begeerde men een punt te vinden, dat in het vlak van drie geveene punten een bepaalden stand ten opzichte van die punten had, zooals bijv.: *het middelpunt van den cirkel die door de geveene punten gaat; het snijpunt van de loodlijnen in den driehoek die de geveene punten tot hoekpunten heeft; het middelpunt van den in dien driehoek beschreven cirkel;* dan zou men door die drie

punten een vlak brengen; dit vlak, met die punten er in, om zijn horizontalen doorgang neerslaan; in het neergeslagen vlak het vierde punt, volgens het geleerde in de gewone Meetkunst, construeren; en eindelijk de projectiën bepalen, die het vierde punt verkrijgt, als het neergeslagen vlak weder in zijn vorigen stand gebragt wordt. Wij laten het verrigten van dergelijke constructiën aan den lezer over.

§ 101. WERKSTUK. *Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat evenwijdig is met eene andere gegevene lijn, die de eerste kruist.*

Trekt men, door een willekeurig gekozen punt van de eerste lijn, eene nieuwe lijn, evenwijdig met de andere gegevene, dan heeft men twee lijnen, die elkander in het gekozen punt snijden. Brengt men nu volgens § 97 door deze twee lijnen een vlak, zoo is dat vlak blijkbaar het gevraagde (*Meetsk.* § 312).

Voor het te kiezen punt in de eerste lijn, kan men gemakshalve haar ontmoetingspunt met een der projectievlakken nemen. Moet bijv. door de lijn ($A'B'$, $A''B''$) een vlak gebragt worden (Fig. 72), dat evenwijdig met de lijn ($C'D'$, $C''D''$) is; bepaalt men dan vooreerst de ontmoetingspunten A' en B'' van de lijn ($A'B'$, $A''B''$) met de projectievlakken; trekt men vervolgens door het punt (B' , B'') eene lijn ($B'E'$, $B''E''$) evenwijdig met ($C'D'$, $C''D''$), en bepaalt men haar ontmoetingspunt E' met het horizontale vlak, dan kan men door de punten A' , E' en B'' onmiddellijk de doorgangen van het begeerde vlak (FF'') trekken.

+ § 102. STELLING. *Wanneer eene lijn en een vlak loodregt op elkander staan, zullen ook de projectiën der lijn loodregt op de gelijknamige doorgangen van het vlak zijn.*

Laat eene lijn QR , zooals in Fig. 73 door eene perspectievische afbeelding is voorgesteld, in het punt P loodregt op het vlak Aa zijn; zij voorts $Q'R'$ de projectie van de lijn, en AA , de doorgang van het vlak, beide op hetzelfde projectievlak OL genomen. Alsdan is het projecterend vlak $QRR'Q'$ niet alleen loodregt op het projectievlak OL (zie § 18), maar ook op het vlak Aa , en wel omdat het door de lijn QR gaat (*Meetsk.* § 321); hieruit volgt (*Meetsk.* § 323, *Gev.* 3^o) dat het vlak $QRR'Q'$ loodregt is op de gemeene doorsnede AA , der vlakken OL en Aa ; daar alzoo AA , loodregt op het vlak $QRR'Q'$ is, is AA , alnede loodregt op de in dat vlak gelegene lijn $Q'R'$. Dat is: de projectie $Q'R'$ van de lijn, is loodregt op den gelijknamigen doorgang AA , van het vlak.

Trok men in het vlak $QRR'Q'$ eene lijn, die niet loodregt op het vlak Aa stond, dan zou de projectie van die lijn desniettemin langs $Q'R'$ vallen en dus almede loodregt op AA , zijn; uit de onderlinge regthoekigheid van de projectie $Q'R'$ met den doorgang AA , mag men dus niet omgekeerd besluiten, dat de lijn en het vlak, waartoe deze projectie en doorgang behooren, loodregt op elkander zijn. Uit de regthoekigheid van $Q'R'$ met AA , volgt echter, dat het projecterend vlak $QRR'Q'$ loodregt op het vlak Aa is, hetgeen men aldus bewijzen kan: het projectievlak OL en het projecterend vlak $QRR'Q'$ staan loodregt op elkander; de lijn AA , die in het eene vlak OL loodregt op de gemeene doorsnede $Q'R'$ is, staat dus loodregt op het andere vlak $QRR'Q'$ (*Meeth.* § 322, 1°); maar het vlak Aa gaat door de lijn AA , en staat dus ook loodregt op het vlak $QRR'Q'$ (*Meeth.* § 321), weshalve dan ook het vlak $QRR'Q'$ loodregt op het vlak Aa is.

Staan de horizontale en verticale projectiën van eene lijn, ieder in het bijzonder, loodregt op de gelijknamige doorgangen van een vlak, dan staan, volgens het bewezene, ook de beide projecterende vlakken der lijn loodregt op het vlak, en de lijn in de ruimte zal dus, als doorsnede van hare projecterende vlakken, almede loodregt op het vlak zijn; mits slechts die projecterende vlakken elkander snijden. Met uitzondering van het bijzondere geval, dat de projecterende vlakken eener lijn elkander mogten bedekken (zie § 29), mag men dus besluiten: *dat eene lijn en een vlak loodregt op elkander staan, indien de beide projectiën der lijn loodregt op de gelijknamige doorgangen van het vlak zijn.*

Het genoemde geval van uitzondering heeft blijkbaar dan, en ook alleen dan, plaats, wanneer de doorgangen van het vlak evenwijdig met de as loopen. Zijn de projectiën eener lijn loodregt op deze doorgangen, dan volgt er niet uit, dat de lijn loodregt op het vlak is.

§ 103. WERKSTUK. *Door een gegeven punt een vlak te brengen, dat loodregt op eene gegevene lijn is.*

Laat ($A'B'$, $A''B''$) de gegevene lijn en (P' , P'') het gegevene punt zijn (Fig. 74). Trekt men dan uit een willekeurig punt D van de as , lijnen DD' , en DD'' , loodregt op de projectiën $A'B'$ en $A''B''$, zoo verkrijgt men een vlak (D, DD''), dat volgens de voorgaande stelling loodregt op de gegevene lijn is. Brengt men dus verder, volgens § 86, door het gegevene punt (P' , P'') een vlak (C, CC'') dat even-

wijdig met $(D, DD_{,,})$ is, dan is $(C, CC_{,,})$ het begeerde vlak (*Meeth.* § 328). Tot bekoming van het vlak $(C, CC_{,,})$ wordt $P'Q'$ evenwijdig met DD , getrokken, en dus $P'Q'$ loodregt op $A'B'$; hieruit volgt, dat het trekken der lijnen DD , en $DD_{,,}$ onnoodig is; immers, door $P'Q'$ loodregt op $A'B'$ te trekken, bepaalt men het punt Q'' , waardoor men eerst $C_{,,}C$ loodregt op $A''B''$ en vervolgens CC , loodregt op A,B , trekken kan.

Is de gegebene lijn $(A'B', A''B'')$ evenwijdig met het verticale vlak, zooals in Fig. 75, dan kan men de doorgangen van het gevraagde vlak $(C, CC_{,,})$ onmiddellijk trekken; want, behalve dat die doorgangen loodregt op de gelijknamige projectiën der lijn moeten wezen, moet nu de verticale doorgang door de verticale projectie van het gegebene punt (P', P'') gaan, omdat anders dit punt, wegens den loodregten stand van het vlak op het verticale, niet in het vlak zou kunnen liggen.

Zijn de projectiën der gegebene lijn loodregt op de as, maar is die lijn desniettemin, zooals in Fig. 76, bepaald door de projectiën (A', A'') en (B', B'') van twee harer punten, dan moet men tot oplossing van dit werkstuk een derde projectievlak aannemen, en daarop zoowel de projectie P''' van het gegebene punt (P', P'') , als de projectie $A'''B'''$ van de gegebene lijn construeren. De derde doorgang van het gevraagde vlak moet nu vooreerst, volgens de voorgaande stelling, loodregt op de derde projectie $A'''B'''$ van de lijn wezen; ten andere moet die derde doorgang door de projectie P''' van het punt gaan, want het gevraagde vlak moet loodregt op het derde projectievlak zijn, omdat zijne horizontale en verticale doorgangen loodregt op $A'B'$ en $A''B''$ moeten wezen. Trekt men dus door P''' eene lijn loodregt op $A'''B'''$, zoo is dit de derde doorgang $C_{,,,}C_{,,,}$ van het gevraagde vlak, waarvan dan weder op de gewone wijze de horizontale en verticale doorgangen C,C , en $C_{,,}C_{,,}$ gevonden worden.

† § 104. De meerdere eenvoudigheid der constructie, die wij in het voorgaande werkstuk voor het bijzondere geval van Fig. 75 verkregen, kan ook in het algemeen verkregen worden, door het horizontaal-projecterend vlak der gegebene lijn volgens § 70 op het horizontale vlak neer te slaan, en het gegebene punt op dat neergeslagen vlak te projecteren. Laat, bijv. in Fig. 77, wederom $(A'B', A''B'')$ de gegebene lijn en (P', P'') het gegebene punt zijn, en zij AB de volgens § 70 neergeslagene lijn $(A'B', A''B'')$;

trekken wij dan uit P' eene loodlijn door $A'B'$ en nemen wij op die loodlijn een punt p'' , dat even hoog boven $A'B'$, als P'' boven de as OX is, dan is p'' de projectie van het gegebene punt op het neergeslagen projecterend vlak. De doorgang van het gevraagde vlak met dat neergeslagen vlak, zal nu, op gelijke gronden als wij bij het laatste geval der voorgaande § aanvoerden, loodrecht op AB moeten zijn en door het punt p'' moeten gaan; die doorgang cC , kan dus onmiddellijk getrokken worden; uit haar ontmoetingspunt C , met de lijn $A'B'$, kan dan de horizontale doorgang C,C loodrecht op $A'B'$, en door het punt C , waar die doorgang de as ontmoet, de verticale doorgang CC , loodrecht op $A''B''$ getrokken worden.

Men zal gereedelijk inzien, dat de laatstaangewezen constructie eigenlijk daarop neerkomt, dat men het horizontaal-projecterend vlak der lijn als een nieuw verticaal vlak, en dus hare horizontale projectie als eene nieuwe as van projectie O_1X_1 heeft aangenomen.

Deze constructie verdient de voorkeur boven die van Fig. 74 daarom, dat zij onmiddellijk het punt S , en dus ook de projectiën S' en S'' van dat punt, aanwijst, waar de gegebene lijn door het gevraagde vlak gesneden wordt. Om dit snijpunt in Fig. 74 te vinden, zou men alweder eene afzonderlijke constructie volgens § 83 moeten verrigten.

§ 105. Bij het voorgaande werkstuk is het geheel onverschillig wáár het gegebene punt genomen wordt, zoodat de opgegevene constructiën onveranderd gevolgd kunnen worden, als het gegebene punt in de gegebene lijn ligt. Hierdoor is dan ook de vraag opgelost: *om op eene gegebene lijn, in eenig gegeven punt van die lijn, een loodrecht vlak te stellen.*

§ 106. WERKSTUK. *Uit een gegeven punt eene loodlijn op eene gegebene lijn neer te laten, en de lengte van die loodlijn te vinden; of met andere woorden, den afstand van een gegeven punt tot eene gegebene lijn te construeren*

Brengt men, volgens het voorgaande werkstuk, door het gegebene punt een vlak loodrecht op de gegebene lijn, en bepaalt men volgens § 83 het snijpunt van dat vlak met de lijn, dan is blijkbaar dit snijpunt het voetpunt van de loodlijn. De lijn, die het gegebene punt met het gevondene snijpunt vereenigt, is dan de loodlijn zelf, wier lengte volgens § 69 geconstrueerd kan worden.

Laten bijv. in Fig. 77, ($A'B'$, $A''B''$) de gegebene lijn en (P' , P'')

het gegevene punt zijn, dan vindt men volgens § 104 het snijpunt (S', S'') van de lijn ($A'B', A''B''$) met het vlak, dat men door (P', P'') loodregt op die lijn kan brengen; derhalve zal ($P'S', P''S''$) de begeerde loodlijn zijn, die haar voetpunt in (S', S'') heeft. Hoezeer het vinden van de lengte dier loodlijn volgens § 69 eenvoudig genoeg is, zou men hier het vlak (C, CC_{11}), waarin de punten (P', P'') en (S', S'') gelegen zijn, om den horizontalen doorgang volgens § 90 kunnen neerslaan; hierdoor de neergeslagene punten P_n en S_n gevonden hebbende, heeft men ook de lengte $P_n S_n$ van de loodlijn.

Het is duidelijk, dat men dit werkstuk ook door dat van § 99 kan oplossen. Trekt men namelijk in Fig. 71 de lijn $P_n Q_n$ zoodanig, dat de aldaar gebezigde hoek α een regte hoek wordt, dan zal $P_n Q_n$ de werkelijke lengte zijn van de loodlijn ($P'Q', P''Q''$), uit het punt (P', P'') op de lijn ($A'B', A''B''$) neergelaten.

Ligt de gegevene lijn in een vlak, dat loodregt op de as van projectie is, dan zal men wederom een derde projectievlak te baat kunnen nemen. Moet bijv. in Fig. 76, uit (P', P'') eene loodlijn op ($A'B', A''B''$) worden neergelaten, dan vindt men, door $P'''Q'''$ loodregt op $A'''B'''$ te trekken, onmiddellijk de derde projectie Q''' van het voetpunt, welks horizontale en verticale projectiën Q' en Q'' nu mede terstond bekend worden. Door hier eene lijn $P'''P$, zoo lang als de afstand van P'' tot $A''B''$, loodregt op $P'''Q'''$ te stellen, vindt men PQ''' voor de lengte der loodlijn.

+ § 107. WERKSTUK. *Uit een gegeven punt van een gegeven vlak eene loodlijn op dat vlak op te rigten.*

Indien slechts een van de beide projectiën van het punt bekend is, bepaalt men volgens § 85 de andere projectie van dat punt, en vervolgens trekt men uit elk dezer projectiën eene loodlijn op den gelijknamigen doorgang van het vlak. De alzoo getrokken lijnen zullen dan, volgens de stelling van § 102, de projectiën der begeerde loodlijn zijn.

Mogten de doorgangen van het gegeven vlak evenwijdig met de as loopen, dan zou men de begeerde loodlijn slechts door middel van een derde projectievlak kunnen bepalen.

x § 108. WERKSTUK. *Uit een gegeven punt buiten een gegeven vlak, eene loodlijn op dat vlak neer te laten, en de werkelijke lengte van die loodlijn te vinden; of met andere woorden: den afstand van een gegeven punt tot een gegeven vlak te vinden.*

Laat $(A, AA_{,,})$ het gegeven vlak en (P', P'') het gegeven punt zijn (Fig. 78); trekt men dan de lijnen $P'Q'$ en $P''Q''$ respectievelijk loodrecht op $AA_{,}$ en $AA_{,,}$, zoo is $(P'Q', P''Q'')$ volgens § 102 eene lijn, die loodrecht op het vlak $(A, AA_{,,})$ is; bepaalt men verder volgens § 83 het punt (S', S'') waar het vlak $(A, AA_{,,})$ door de lijn $(P'Q', P''Q'')$ gesneden wordt, zoo is (S', S'') het voetpunt der begeerde loodlijn $(P'S', P''S'')$, waarvan de lengte PS volgens § 69 gevonden wordt.

Indien het gegeven vlak $(A, AA_{,,})$, zooals in Fig. 79, loodrecht op het verticale is, en dus de lijn $(P'Q', P''Q'')$, uit het gegevene punt (P', P'') loodrecht op dat vlak getrokken, evenwijdig met het verticale loopt, wordt haar snijpunt (S', S'') met het vlak $(A, AA_{,,})$ onmiddellijk door de snijding van de projectie $P''Q''$ met den doorgang $AA_{,,}$ bepaald; terwijl $P''S''$ onmiddellijk de lengte van de loodlijn is. Immers alle punten van dit vlak $(A, AA_{,,})$, en dus ook het voetpunt der loodlijn, hebben hunne verticale projectiën in den doorgang $AA_{,,}$; en daar de loodlijn evenwijdig met het verticale vlak is, is zij even lang als hare projectie (zie § 23).

Zijn de doorgangen van het gegeven vlak evenwijdig met de as, dan neemt men tot oplossing van ons werkstuk weder een derde projectievlak te hulp. Moet bijv. de loodlijn geconstrueerd worden, die uit het in Fig. 76 voorgestelde punt (B', B'') op het vlak $(C, C_{,}, C_{,,} C_{,,,})$ wordt neergelaten, dan construeert men de derde projectie B''' van het punt en den derden doorgang $C_{,,,} C_{,,,,}$ van het vlak. Trekt men dan $B'''Q'''$ loodrecht op $C_{,,,} C_{,,,,}$, zoo is $B'''Q'''$ de lengte van de begeerde loodlijn, en Q''' de derde projectie van haar voetpunt, welks horizontale en verticale projectiën Q' en Q'' gelegen moeten zijn in loodlijnen uit B' en B'' op $C, C_{,}$ en $C_{,,} C_{,,,}$ getrokken, en dus terstond uit de bekende Q''' kunnen gevonden worden.

§ 109. De meerdere eenvoudigheid, die het bijzondere geval van Fig. 79 opleverde, kan wederom in het algemeen verkregen worden, indien men slechts, even als in § 92 is geschied, een standvlak, loodrecht op den horizontalen doorgang van het gegeven vlak gebragt, als nieuw verticaal vlak aanneemt en op het horizontale vlak neerslaat. Men kan dit standvlak door het gegevene punt laten gaan, of het ook ergens anders naar welgevallen nemen; het laatste is vooral te verkiezen als men met meerdere punten te doen heeft, en het is meer bepaaldelijk in dit geval, dat men het neergeslagen standvlak als een nieuw aangenomen verticaal vlak beschouwt.

Laat bijv. wederom $(A, AA_{//})$ het gegeven vlak en (P', P'') het gegeven punt zijn (Fig. 80 of 81). Na dan O, X_1 loodregt door $AA_{//}$ getrokken te hebben, construeert men, even als in § 92 en Fig. 67 is aangewezen, het neergeslagen standvlak $X_1 aa_{//}$, dat men als een nieuw verticaal vlak beschouwt; na voorts uit P' eene loodlijn door O, X_1 getrokken te hebben, neemt men op die loodlijn het punt p'' even ver boven O, X_1 als het punt P'' boven OX ligt, dan is p'' de projectie van het punt (P', P'') op het nieuwe verticale vlak. Door nu $p''s''$ loodregt op $aa_{//}$ te trekken, vindt men onmiddellijk de lengte $p''s''$ der begeerde loodlijn; alsook de nieuwe verticale projectie s'' van haar voetpunt, waarvan verder de horizontale projectie S' even als in Fig. 79 gevonden wordt. De afstand van s'' tot O, X_1 is blijkbaar de hoogte van het voetpunt boven het horizontale vlak; de projectie S'' van dat voetpunt, op het oorspronkelijke verticale vlak, moet dus op gelijke hoogte boven OX liggen. Men weet almede, dat deze projectie S'' moet liggen in eene lijn uit P'' regthoekig door $AA_{//}$ getrokken. Het punt S'' kan dus, zoo men het noodig heeft, op twee manieren gevonden worden.

Wij hebben deze constructie door twee figuren opgehelderd, ten einde de beide gevallen aanschouwelijk te maken, dat het gegeven punt aan deze of gene zijde van het gegeven vlak ligt.

Mogt men het gegeven punt (P', P'') toevalligerwijze in het vlak $(A, AA_{//})$ genomen hebben, dan zou dit onmiddellijk blijken, door dat dan de projectie p'' in den doorgang $aa_{//}$ zou komen. Bij de constructie zooals die in Fig. 78 is geschied, zou men dit ontdekken, door dat de projectie $P''Q''$ juist in het punt P'' gesneden werd, door de lijn, wier snijding met $P''Q''$ het punt S'' moest doen kennen.

§ 110. WERKSTUK. *De nieuwe projectiën van een gegeven punt te vinden, indien een gegeven vlak, dat een schuinen stand met betrekking tot het horizontale heeft, als nieuw horizontaal vlak wordt aangenomen.*

Daar men van de projectievlakken eerst dan gebruik kan maken wanneer zij door eene wenteling om hunne gemeene doorsnede op elkander zijn neergeslagen, ten einde het vlak der teekening of de constructiefiguur daar te stellen, zoo zal een gegeven vlak ook eerst dan als een nieuw aangenomen projectievlak kunnen beschouwd worden, wanneer het om zijne doorsnede met

het vlak der teekening op dat vlak is neergewenteld. Die wenteling onderging dan ook het standvlak dat wij in § 92 en § 109, zoo mede het projecterend vlak dat wij in § 104 beschouwden, ten einde die vlakken als nieuw aangenomene verticale vlakken te kunnen aanmerken

Evenzoo zal men dus, om een gegeven vlak $(A, AA_{//})$ als nieuw horizontaal vlak aan te nemen, dat vlak (Fig. 82) om zijn horizontalen doorgang AA , op het horizontale vlak moeten neerslaan. Een gegeven punt (P', P'') nu, heeft op het vlak $(A, AA_{//})$ tot projectie den voet der loodlijn uit dat punt op het vlak neergelaten; bepaalt men dus waar dat voetpunt komt te liggen, als het vlak $(A, AA_{//})$ neergeslagen wordt, dan is dat neergeslagen voetpunt de nieuwe horizontale projectie van het punt (P', P'') , als het vlak $(A, AA_{//})$ een nieuw aangenomen horizontaal vlak is. Men construeert alzoo volgens de voorgaande §, na ergens in een punt α van den doorgang AA , een standvlak gesteld te hebben, het punt s'' , waar het voetpunt der loodlijn, uit (P', P'') op $(A, AA_{//})$ vallende, zich op dat standvlak projecteert; de horizontale projectie van dat voetpunt ligt, volgens de stelling van § 102, in eene lijn door P' loodrecht op AA , getrokken; zonder die horizontale projectie zelf noodig te hebben, kan men dus volgens § 92 het punt P_1' construeren, waar dat voetpunt komt te liggen als het vlak $(A, AA_{//})$ om AA , neergeslagen wordt, en dit neergeslagen punt P_1' is dan de nieuwe horizontale projectie van het punt (P', P'') . De constructie, waardoor het punt s'' gevonden werd, heeft tevens de lengte $p''s''$ der meergenoemde loodlijn, dat is den afstand van het punt (P', P'') tot het vlak $(A, AA_{//})$, doen kennen; neemt men alzoo in het nieuw aangenomen horizontale vlak eene willekeurige lijn O_1X_1 als as van projectie aan, dan zal men slechts uit P_1' eene loodlijn door O_1X_1 te trekken, en op die loodlijn een stuk $pP_1'' = p''s''$ uit te zetten hebben, om ook de nieuwe verticale projectie P_1'' van het punt (P', P'') te bekomen.

Wij hebben in onze figuur nog van een ander punt (Q', Q'') , volkomen op dezelfde wijze, de nieuwe projectiën (Q_1', Q_1'') geconstrueerd; dit punt hebben wij opzettelijk zóó gekozen, dat de loodlijn $q''r''$ op $aa_{//}$ aan de andere zijde viel dan de loodlijn $p''s''$; de punten (P', P'') en (Q', Q'') liggen derhalve aan weerszijden van het vlak $(A, AA_{//})$, zoodat nu ook $qQ_1'' = q''r''$ aan de andere zijde van O_1X_1 moest afgezet worden dan $pP_1'' = p''s''$. Daar wij,

blijkens de teekening, het vlak (A, AA_1) voorover neergeslagen hebben, waardoor p'' boven, q'' beneden dat neergeslagen vlak kwam, hebben wij dus ook, wat de as O_1X_1 betreft, ondersteld dat het bovendeele van het nieuwe verticale vlak naar de zijde van P_1'' , het benedendeel van dat vlak naar de zijde van Q_1'' , op het nieuwe horizontale vlak neergeslagen is.

De eenvoudige beschouwing der figuur is toereikend, om in te zien, hoe men omgekeerd, uit de nieuwe projectiën van eenig punt, zoo die gegeven waren, de oude projectiën kan construeren; wij achten het dus onnoodig hierover in bijzonderheden te treden.

§ 111. Moest men de nieuwe projectiën eener gegebene lijn bepalen, dan zou men in die lijn twee punten aannemen, de nieuwe projectiën van elk dier punten construeren en door deze de begeerde nieuwe projectiën van de lijn trekken. Evenzoo zou men, wanneer een veelhoek of een veelvlakig ligchaam door zijne projectiën gegeven was, dien veelhoek of dat ligchaam op de nieuwe projectievlakken kunnen projecteren, door de nieuwe projectiën van al zijne hoekpunten te construeren.

Wilde men op de nieuwe projectievlakken de doorgangen van een vlak vinden, dan zou men in dat vlak drie punten, mits niet in eene regte lijn, kunnen aannemen, daarna de nieuwe projectiën van die drie punten bepalen, en vervolgens met betrekking tot de nieuwe projectievlakken door deze drie punten, volgens § 100, een vlak brengen. Neemt men, voor twee van deze punten, de snijpunten van de gelijknamige doorgangen van het te bepalen vlak en het vlak dat als nieuw horizontaal vlak moet worden aangenomen, dan verkrijgt men onmiddellijk den nieuwen horizontalen doorgang. Is bijv. (B, BB_1) het vlak, waarvan men den nieuwen horizontalen doorgang begeert, dan blijft bij het neerslaan van het vlak (A, AA_1) het snijpunt van BB_1 en AA_1 op zijne plaats; bepaalt men dus volgens § 92 het punt C_1 , waar het snijpunt (C', C'') van BB_1 met AA_1 komt te liggen, als dit punt, dat in het vlak (A, AA_1) ligt, met dat vlak neergeslagen wordt, dan zal men door dit punt, en door het snijpunt van BB_1 met AA_1 , onmiddellijk den nieuwen horizontalen doorgang b, b_1 van het vlak (B, BB_1) kunnen trekken. Kende men, behalve dien doorgang, ook nog den standhoek der vlakken (A, AA_1) en (B, BB_1) dan zou men, volgens het werkstuk van § 89, den nieuwen verticalen doorgang van het vlak (B, BB_1)

kunnen bepalen. Hoe die standhoek gevonden wordt, zullen wij in de volgende § aanwijzen.

Hier merken wij nog slechts op, dat het aannemen van nieuwe projectievlakken voornamelijk dient, om de constructiën van werkstukken, die in het algemeen lastig zijn, terug te brengen tot de bijzondere gevallen, waarin die constructiën eenvoudiger worden.

§ 112. WERKSTUK. *Den standhoek van twee gegeven vlakken te construeren.*

Wanneer men uit een willekeurig aangenomen punt lijnen trekt, die volgens de stelling van § 102 loodrecht op de gegeven vlakken staan, zullen deze lijnen elkander onder gelijke hoeken snijden als de gegeven vlakken (*Meetk.* § 324); en hierdoor kan dus ons werkstuk onmiddellijk tot dat van § 78 teruggebragt worden. Daar echter door de snijding der gegeven vlakken vier tweevlakkige hoeken worden gevormd, die twee aan twee gelijk, en twee aan twee elkaanders supplementen zijn, zal men, door de vraag tot § 78 terug te brengen, niet duidelijk inzien of de geconstrueerde hoek overeenkomt met den standhoek van dezen of genen der genoemde tweevlakkige hoeken. Derhalve is eene constructie te verkiezen, waarbij, even als in § 78, alle mogelijke verwarring tusschen den begeerden hoek en zijn supplement vermeden wordt.

Hiertoe brengt men, door een willekeurig punt van de gemeene doorsnede der gegeven vlakken, en loodrecht op die doorsnede, een vlak; dat vlak zal dan de gegeven vlakken volgens lijnen snijden, die den begeerden standhoek vormen, en die hoek zal dus gevonden zijn, zoodra men slechts dit vlak, met die lijnen er in, op het horizontale vlak heeft neergeslagen. Ten einde dit vlak loodrecht op de doorsnede te stellen, is het verkiesselijk den weg te volgen, dien wij in § 104 en Fig. 77 aanwezen. Laten dan ($A,AA_{,,}$) en ($B,BB_{,,}$) de gegeven vlakken zijn (Fig. 83), zoo construeren wij eerst de horizontale projectie PQ' van hunne gemeene doorsnede, en slaan het horizontaal-projecterend vlak dier doorsnede, volgens § 70, op het horizontale vlak neder; daartoe behoeven wij slechts $Q'Q=Q'Q''$ loodrecht op PQ' te stellen en PQ te trekken, als wanneer PQ de doorsnede zelf is, in haar neergeslagen projecterend vlak. Beschouwen wij dit nu als een nieuw aangenomen verticaal vlak, als wanneer PQ' de nieuwe as is; indien wij dan, uit een willekeurig aangenomen punt S

in PQ, eerst ST loodregt op PQ, en voorts door het punt T, waar PQ' door ST gesneden wordt, eene lijn CD loodregt op PQ' trekken, is volgens § 104 CD de horizontale en ST de nieuwe verticale doorgang van een vlak, door het punt S der gemeene doorsnede loodregt op die doorsnede gebragt. Wordt nu dit vlak, om den horizontalen doorgang CD, op het horizontale vlak neergeslagen, dan komt volgens § 91 en 92 het punt S in S_n te liggen, als namelijk op TP een stuk $TS_n = TS$ wordt uitgezet; maar bij dit neerslaan blijven de punten C en D, waar de doorgangen der gegevene vlakken door dien van het neergeslagen wordend vlak gesneden worden, op hunne plaats. Trekken wij dus CS_n en DS_n , dan zijn dit, in het om CD neergeslagen vlak, lijnen die zich voor dat neerslaan in de vlakken $(A, AA_{//})$ en $(B, BB_{//})$ bevonden; maar deze lijnen lagen ook in het vlak door het punt S loodregt op de gemeene doorsnede der gegevene vlakken gebragt; alzoo is $CS_n D$ de gevraagde standhoek; en wel bepaaldelijk de standhoek van den tweevlakkigen hoek, welks beide zijden of welks beide verlengde zijden de as in A en B snijden. Onder de tweevlakkige hoeken, door de snijding der vlakken $(A, AA_{//})$ en $(B, BB_{//})$ gevormd, zouden diegenen het supplement van den gevonden hoek tot standhoek hebben, waarvan slechts ééne zijde de as in A of B, en het verlengde van de andere zijde haar in B of A sneed.

Laat men uit S eene loodlijn op PQ' neder, dan is haar voetpunt de horizontale projectie van het in de doorsnede aangenomen punt, en de lengte dier loodlijn is de hoogte van dat punt boven het horizontale vlak, zoodat men des verkiezende ook de verticale projectie van dit punt zal kunnen aanwijzen.

Tot de duidelijkheid der figuur is het dikwijls te verkiezen, dat men het projecterend vlak der doorsnede, niet om PQ' op het horizontale, maar om Q'Q'' op het verticale vlak neerslaat, zooals in Fig. 84 is voorgesteld. Hier is, nadat men $Q'p = Q'P$ genomen heeft, Q''p de neergeslagen doorsnede, waarin men het punt S aanneemt; na dan St loodregt op Q''p gesteld te hebben, neemt men Q'T = Q't en $TS_n = tS$, waardoor men de punten T en S_n verkrijgt, die even als in Fig. 83 tot het trekken van de beenen CS_n en DS_n van den standhoek kunnen dienen. De eenvoudige vergelijking der figuren 83 en 84, waarin dan S hetzelfde punt der doorsnede moet verbeelden, zal toereikend zijn om dit op te helderen.

Mogt PQ' loodrecht op een der horizontale doorgangen, bijv. loodrecht op AA , zijn, dan zou de lijn, door T loodrecht op PQ' getrokken, AA , niet in eenig punt C snijden, maar evenwijdig met AA , loopen; in dat geval zou men blijkbaar de lijn S_nC , die anders naar het snijpunt C moest loopen, almede evenwijdig met AA , moeten trekken, om den begeerden hoek DS_nC te bekomen.

Mogten de horizontale doorgangen AA , en BB , met elkander evenwijdig zijn, dan zou dit in Fig. 83 eene zoodanige verandering te weeg brengen, dat de lijnen, die nu uit Q' en Q naar het snijpunt P loopen, almede evenwijdig met AA , en BB , werden; hierdoor zou ST evenwijdig met QQ' , dus ook $ST = QQ'$ en $TS_n = Q'Q''$ worden. Voor dit geval, in Fig. 85 voorgesteld, wordt alzoo de constructie zeer eenvoudig. Men construeert namelijk de horizontale projectie $Q'P$ van de doorsnede der vlakken, trekt eene lijn, die AA , BB , en $Q'P$ ergens in C , D en T regthoekig snijdt, neemt op $Q'P$ een stuk $TS_n = Q'Q''$, dan is hier wederom CS_nD de begeerde standhoek.

Mogten de horizontale doorgangen beide loodrecht op de as staan, dan is blijkbaar de hoek, waaronder de verticale doorgangen elkander snijden, tevens de standhoek der beide vlakken.

Mogten eindelijk de doorgangen allen evenwijdig met de as loopen, dan behoeft men slechts een derde projectievlak aan te nemen, om door de snijding der derde doorgangen onmiddellijk den begeerden hoek te vinden. Zoo is bijv., in Fig. 50, 51 en 52, de hoek $A_{,,,}P'''B_{,,,}$ de standhoek der vlakken $(A, A_{,,}, A_{,,,}A_{,,,})$ en $(B, B_{,,}, B_{,,,}B_{,,,})$.

§ 113. WERKSTUK. *Den hoek van twee gegevene vlakken middendoor te deelen.*

Laten $(A, AA_{,,})$ en $(B, BB_{,,})$ de gegevene vlakken zijn (Fig. 84), dan construeert men volgens de voorgaande § hunnen standhoek CS_nD , en deelt dien, door eene lijn S_nG , middendoor. Het punt G , waar deze deellijn de lijn CD snijdt, blijft op zijne plaats, wanneer men het neergeslagen vlak CS_nD van den standhoek der vlakken, door eene wenteling om CD , weder in zijnen oorspronkelijken stand brengt; maar deze deellijn ligt dan in het begeerde deelvlak, en haar punt G , dat bij de genoemde wenteling in het horizontale vlak blijft, is dus een punt van den horizontalen doorgang van

het deelvlak. Daar nu dit deelvlak, door de gemeene doorsnede der vlakken moet gaan, zijn P en Q'' respectievelijk punten van zijne horizontale en verticale doorgangen. Trekt men dus eerst I, I door P en G , en daarna II, II door Q'' , dan is (I, II, II) het begeerde deelvlak.

§ 114. WERKSTUK. *Door eene gegebene lijn in een gegeven vlak een ander vlak te brengen, dat met het gegebene eenen gegeven hoek maakt.*

De oplossing van dit werkstuk kan onmiddellijk bij omkeering uit dat van § 112 afgeleid worden. Laat bijv. (A, AA, II) het gegeven vlak en PQ' de horizontale projectie van de in dat vlak gegebene lijn zijn (Fig. 83), dan kan men even als in § 112 de punten T , C en S_n construeren. Trekt men vervolgens uit S_n eene lijn, die met CS_n den gegeven hoek maakt, dan zal deze lijn, door hare snijding met CT of haar verlengde, onmiddellijk een punt D van den horizontalen doorgang des begeerden vlaks bepalen; trekt men dus door P en D de lijn B, B , en daarna door Q'' de lijn BB, II , zoo is (B, BB, II) het gevraagde vlak.

Dit alles, alsmede de omstandigheden waartoe hier bijzondere gevallen aanleiding mogten kunnen geven, zijn uit de in § 112 gegebene verklaringen zoo duidelijk, dat eene nadere uitweiding hierover wel overtollig zal zijn.

Alleen merken wij op, dat de gegeven hoek ook aan de andere zijde van CS_n dan in onze figuur kan uitgezet worden, en dat men dus, zoo de gegeven hoek niet regt is, twee antwoorden op de vraag zal verkrijgen.

§ 115. WERKSTUK. *Door eene gegebene lijn een vlak te brengen, dat met het horizontale vlak eenen gegeven hoek maakt.*

Laat $(A'B', A''B'')$ de gegebene lijn zijn (Fig. 86), dan zijn vooreerst de punten A' en B'' , waar deze lijn de projectievlakken ontmoet, respectievelijk punten van den horizontalen en verticalen doorgang van het gevraagde vlak, zoodat het er nog slechts op aan komt de rigting van een dier doorgangen te vinden. Nemen wij nu in de gegebene lijn een willekeurig punt (P', P'') aan, dan is dit punt in het begeerde vlak gelegen; was dus het gevraagde vlak reeds gevonden, en wilde men zijnen standhoek met het horizontale vlak vinden, dan zou men, volgens § 88 en Fig. 63, uit p op de as een stuk pk afzetten, gelijk aan de

loodlijn uit P' op den horizontalen doorgang vallende, als wanneer $P''hp$ de begeerde standhoek zou wezen. Hier is echter die standhoek gegeven, en kan men dus een tegengestelden weg volgen. Trekken wij namelijk uit P'' de lijn $P''h$ zoodanig, dat zij met de as eenen hoek $P''hp$ gelijk aan den gegeven standhoek maakt, dan vinden wij de lengte ph der genoemde loodlijn, dat is de afstand van het punt P' tot den onbekenden horizontalen doorgang. Beschrijven wij alzoo uit P' met ph als straal eenen cirkel, en trekken wij uit A' eene raaklijn aan dien cirkel, dan is deze lijn $A'F$ de horizontale doorgang van het begeerde vlak, welks verticale doorgang FF'' , dan verder onmiddellijk door B'' kan getrokken worden. Vereenigt men P' met het raakpunt H , dan is $P'H$ loodregt op den doorgang $A'F$, en deze loodlijn is naar behooren gelijk aan ph .

Daar men uit A' nog eene tweede raaklijn aan denzelfden cirkel kan trekken, verkrijgt men nog een tweede vlak ($A'ff''$), dat aan de vraag voldoet.

Indien men, na $pa = P'A'$ genomen te hebben, $P''a$ trekt, is blijkens het in § 71 verklaarde $P''ap$ de hoek, dien de lijn ($A'B'$, $A''B''$) met het horizontale vlak maakt. Was nu de gegeven standhoek kleiner dan de hoek $P''ap$, zoo zou blijkbaar $ph > pa = P'A'$ worden; diensvolgens zou dan het punt A' binnen den beschreven cirkel liggen en zou het onmogelijk zijn uit A' raaklijnen aan dien cirkel te trekken. Tot de bestaanbaarheid van het gevraagde vlak, mag dus de gegeven hoek niet kleiner zijn, dan de hoek, dien de gegevene lijn met het horizontale vlak maakt. Was de gegeven hoek juist gelijk aan den hoek $P''ap$, dan zou $ph = P'A'$ zijn, en de cirkel uit P' beschreven zou door A' gaan; in dat geval zou men door A' ééne raaklijn aan den cirkel kunnen trekken, die hem juist in A' zou raken en loodregt op $A'P'$ zou staan. Deze raaklijn zou dan de horizontale doorgang zijn van het eenige vlak, dat nu aan de vraag zou kunnen voldoen.

Beschouwt men den gebezigten cirkel als het grondvlak, en het punt (P' , P'') als den top van een gewonen kegel, dan zullen alle vlakken die dezen kegel raken, eenen even grooten hoek $P''hp$ met het horizontale vlak maken. Al die vlakken gaan door het punt (P' , P''), terwijl hunne horizontale doorgangen den beschreven cirkel raken. Onder hen zijn ($A'FF''$) en ($A'ff''$) de twee eenigen, die door de lijn ($A'B'$, $A''B''$) gaan.

§ 116. WERKSTUK. *Door eene gegevene lijn, buiten een gegeven vlak, een ander vlak te brengen, dat met het gegevene een gegeven hoek maakt.*

Daar de ontmoetingspunten, van de gegevene lijn met de projectievlakken, dadelijk twee punten van de doorgangen des gevraagden vlaks zijn, zal dit vlak geheel gevonden zijn, zoodra men nog slechts één punt van een zijner doorgangen, bijv. van den horizontalen doorgang, kent. Ten einde dit punt te vinden, construeert men, volgens § 110 en 111, de nieuwe projectiën, die de gegevene lijn verkrijgt, indien het gegeven vlak, om zijn horizontalen doorgang neergeslagen, als nieuw horizontaal vlak wordt aangenomen. Hierdoor wordt ons werkstuk tot dat van de voorgaande § teruggebracht, en men volgt dus de aldaar aangewezen constructie, om den doorgang van het gevraagde vlak, met het nieuw aangenomen horizontale vlak, te bekomen. Het punt, waar deze alzoo geconstrueerde doorgang den oorspronkelijken horizontalen doorgang van het gegeven vlak snijdt, is een punt van het gevraagde vlak, en blijft op zijne plaats, indien het neergeslagen vlak weder opgericht wordt. Dit punt is dus het begeerde punt van den horizontalen doorgang des gevraagden vlaks, met betrekking tot de oorspronkelijke projectievlakken.

Het zij aan den lezer tot eigen oefening overgelaten, de hier aangewezen constructie uit te voeren. Mogten daarbij de lijnen, door wier snijding het genoemde punt gevonden wordt, evenwijdig loopen, dan zou de horizontale doorgang van het gevraagde vlak evenwijdig met dien van het gegevene zijn, en dus, door het ontmoetingspunt van de gegevene lijn met het horizontale vlak, onmiddellijk kunnen getrokken worden.

Overigens gelden hier gelijke opmerkingen als in de voorgaande §, met betrekking tot het dubbele antwoord en de bestaanbaarheid.

§ 117. WERKSTUK. *Den horizontalen doorgang van een vlak te vinden, als zijn verticale doorgang, en zijn standhoek met het horizontale vlak gegeven zijn.*

Dit werkstuk is blijkbaar slechts een bijzonder geval van dat van § 115, waarbij dan de hier bekende verticale doorgang de gegevene lijn is, door welke men een vlak moet brengen, dat den gegeven hoek met het horizontale vlak maakt.

Wij laten derhalve het uitvoeren der constructie aan den lezer over.

f § 118. WERKSTUK. *Den kortsten afstand van twee elkander kruisende lijnen te construeren.*

Hier heeft men blijkbaar niets anders te doen, dan de verklaarde hulpmiddelen der beschrijvende Meetkunst aan te wenden, tot het werkelijk verrigten der constructiën, waarvan in de gewone Meetkunst slechts kon worden aangewezen, hoe zij, indien constructiën door middel van figuren *en reliëf* mogelijk waren (*Meetk.* § 20), tot het vinden van den begeerden kortsten afstand zouden leiden. Laten dan $(A'B', A''B'')$ en $(C'D', C''D'')$ de gegevene lijnen zijn (Fig. 87), zoo volgen wij den weg in de Meetkunst (*Meetk.* § 333) aangewezen.

Wij brengen namelijk eerst door $(A'B', A''B'')$ een vlak, dat evenwijdig is met $(C'D', C''D'')$; hiertoe trekken wij, volgens § 101, uit een willekeurig punt (N', N'') van de lijn $(A'B', A''B'')$, eene lijn evenwijdig met $(C'D', C''D'')$ en bepalen haar ontmoetingspunt Q_1 , gelijk mede van de lijn $(A'B', A''B'')$ het ontmoetingspunt P , beide met het horizontale vlak; dan is eene lijn, door P en Q_1 getrokken, de horizontale doorgang QQ_1 van het bedoelde vlak, waarvan wij den verticalen doorgang QQ_{11} niet noodig hebben, hoezeer die gemakkelijk door het ontmoetingspunt van $(A'B', A''B'')$ met het verticale vlak bepaald wordt.

Verder nemen wij in de lijn $(C'D', C''D'')$ een willekeurig punt (E', E'') aan, en laten uit dat punt eene loodlijn op het vlak $(Q_1 QQ_{11})$ neder; hiertoe de constructie van § 109 volgende, brengen wij door het punt (E', E'') een standvlak loodregt op den doorgang QQ_1 ; in dit om $E'p$ neergeslagen standvlak, is pn'' het been dat zich in het vlak $(Q_1 QQ_{11})$ bevond, en E het neergeslagen punt (E', E'') ; zijnde $n'n'' = nN''$ en $E'E = eE''$ loodregt op $E'p$ gesteld. Trekken wij dus EF loodregt op pn'' , zoo is dit de bedoelde loodlijn zelf en F haar voetpunt, in het neergeslagen standvlak; door FF' loodregt op $E'p$, $F'F''$ loodregt op de as te trekken, en $fF'' = FF'$ te nemen, verkrijgen wij de projectiën van het voetpunt (F', F'') , zoodat $(E'F', E''F'')$ de bedoelde loodlijn is.

Daarna trekken wij door het voetpunt (F', F'') eene lijn, die evenwijdig met $(C'D', C''D'')$ is, en derhalve $(A'B', A''B'')$ ergens in (I', I'') snijdt; en eindelijk trekken wij wederom door (I', I'') eene lijn, die evenwijdig met $(E'F', E''F'')$ is, en $(C'D', C''D'')$ ergens in (K', K'') zal snijden; dan is, volgens hetgeen reeds in de gewone Meetkunst geleerd is, $(IK', I''K'')$ de begeerde kortste afstand, waarvan EF de werkelijke lengte is.

§ 119. De constructie van het voorgaande werkstuk wordt zeer eenvoudig, wanneer een der gegeven lijnen loodrecht op een der projectievlakken is. Laten bijv. $(A', A''B'')$ en $(C'D', C''D'')$ die lijnen zijn (Fig. 88), waarvan de eerste loodrecht op het horizontale vlak staat; alsnu is de kortste afstand dier lijnen, omdat hij loodrecht op $(A', A''B'')$ moet zijn, evenwijdig met het horizontale vlak; hij is dus even lang als zijne horizontale projectie, weshalve ook die projectie zoo kort mogelijk moet wezen; maar die projectie moet uit A' naar eenig punt van $C'D'$ loopen, en zal dus, om zoo kort mogelijk te zijn, niet anders kunnen zijn dan eene loodlijn uit A' op $C'D'$ neergelaten; door die loodlijn te trekken, heeft men dus dadelijk de horizontale projectie $A'K'$ van den begeerden kortsten afstand, terwijl tevens zijn ontmoetingspunt (K', K'') met de lijn $(C'D', C''D'')$ bekend wordt. Wegens de evenwijdigheid van den kortsten afstand met het horizontale vlak, moet zijne verticale projectie evenwijdig met de as loopen; die verticale projectie $I''K''$ kan dus uit het gevondene punt K'' almede onmiddellijk getrokken worden. Hier is dus $(A'K', I''K'')$ de begeerde kortste afstand, die $A'K'$ tot werkelijke lengte heeft.

Wanneer een der gegeven lijnen evenwijdig met de as loopt, of de as zelf is, terwijl de andere lijn geenerlei bijzonderen stand heeft, behoeft men slechts een derde projectievlak aan te nemen, om het construeren van den kortsten afstand tot het beschouwde eenvoudige geval terug te brengen; want de eerste lijn zal dan loodrecht op het derde projectievlak staan, en dus een enkel punt tot derde projectie hebben. Was bijv. de vraag: *In eene gegeven lijn $(A'B', A''B'')$ het punt te vinden, dat zich het dichtst bij de as bevindt* (Fig. 89), dan construeer men, na een derde projectievlak YOZ aangenomen te hebben, de derde projectie $A'''B'''$ van de gegeven lijn; daar nu het enkele punt O de derde projectie van de as is, zal eene loodlijn OP''' op $A'''B'''$ neergelaten, de derde projectie zijn van den kortsten afstand tusschen de gegeven lijn en de as, terwijl het voetpunt P''' de derde projectie is van het punt, waar die kortste afstand de gegeven lijn ontmoet. Uit de derde projectie van dit punt, kan men nu onmiddellijk zijne horizontale en verticale projectiën P' en P'' afleiden, zoodat dan (P', P'') het gevraagde punt der lijn $(A'B', A''B'')$ is.

§ 120. In het algemeen, kan het construeren van den kortsten afstand van twee lijnen, altijd tot het bijzondere geval van Fig. 88

teruggebracht worden, zoo men slechts een vlak, loodregt op een der beide lijnen gebracht, volgens § 110 en 111 tot nieuw horizontaal vlak aanneemt. Hoezeer de constructie, in haar geheel, hierdoor niet eenvoudiger wordt dan die van Fig. 87, achten wij het niet ondienstig te doen zien, hoe zij ook op die wijze verrigt kan worden, en wel bepaaldelijk om een geschikt voorbeeld te geven, van het aannemen en aanwenden van nieuwe projectievlakken.

Laten derhalve in Fig. 90 wederom ($A'B'$, $A''B''$) en ($C'D'$, $C''D''$) dezelfde lijnen voorstellen die wij in Fig. 87 beschouwden, zoo brengen wij vooreerst, door een willekeurig punt (N' , N'') van de lijn ($A'B'$, $A''B''$), een vlak ($E, EE_{||}$) loodregt op die lijn (volgens § 103); door $N'n'' = nN''$ loodregt op $A'B'$ te stellen, verkrijgen wij (volgens § 87) den om $A'e$ neergeslagen standhoek $A'en''$ van het vlak ($E, EE_{||}$) met het horizontale vlak. Het vlak ($E, EE_{||}$), dat het punt (N' , N'') bevat, nemen wij (volgens § 110 en 111) als nieuw horizontaal vlak aan; daartoe kiezen wij in de lijn ($C'D'$, $C''D''$) twee willekeurige punten (P' , N'') en (Q' , Q''), en laten uit die punten loodlijnen op het vlak ($E, EE_{||}$) neder, voor wier werkelijke lengten en projectiën op het standvlak wij (volgens § 109 en Fig. 80) vinden $p''p$ en $q''q$. Slaan wij nu het vlak ($E, EE_{||}$) om zijn horizontalen doorgang op het horizontale vlak neder, dan komen de voetpunten der genoemde loodlijnen (volgens § 110) in P_1' en Q_1' te liggen, en het punt (N' , N'') komt in N_1 neder; derhalve is $P_1'Q_1'$ de nieuwe horizontale projectie van de lijn ($C'D'$, $C''D''$), terwijl het enkele punt N_1 de nieuwe horizontale projectie der lijn ($A'B'$, $A''B''$) is, alzoo deze lijn in (N' , N'') loodregt op het vlak ($E, EE_{||}$) staat. Nemen wij verder in het nieuwe horizontale vlak eene as O_1X_1 aan, trekken wij N_1N_1'' , $P_1'P_1''$, $Q_1'Q_1''$ allen loodregt door die as, en maken wij $p_1P_1'' = pp''$ en $q_1Q_1'' = qq''$, zoo verkrijgen wij $M_1''N_1''$ voor de nieuwe verticale projectie van ($A'B'$, $A''B''$), en $P_1''Q_1''$ voor de nieuwe verticale projectie van ($C'D'$, $C''D''$). De gegeven lijnen zijn dus nu, met betrekking tot de nieuw aangenomene projectievlakken, (N_1 , $M_1''N_1''$) en ($P_1'Q_1'$, $P_1''Q_1''$).

Uit deze nieuwe projectiën construeren wij dan (volgens Fig. 88) den kortsten afstand (N_1K_1' , $I_1''K_1''$) der gegeven lijnen, die N_1K_1' tot werkelijke lengte heeft, zoodat er slechts overblijft de projectiën der punten (N_1 , I_1'') en (K_1' , K_1'') op de oorspronkelijke projectievlakken te bepalen.

Wat het punt (K_1', K_1'') betreft, behoeven wij, omdat dit punt in de gegevene lijn ($C'D', C''D''$) ligt, slechts uit K_1' eene loodlijn door den doorgang EE , te trekken, om door hare ontmoeting met $C'D'$ de projectie K' op het oorspronkelijke horizontale vlak, en vervolgens ook de projectie K'' op het oorspronkelijke verticale vlak te vinden. Wat het punt (N_1, I_1'') betreft, dat in de gegevene lijn ($A'B', A''B''$) ligt, hebben wij $\kappa''i'' = M_1''I_1''$ loodregt op en'' te stellen, daarna $i''I'$ loodregt op $A'B'$ en eindelijk $I'I''$ loodregt door de as OX te trekken, als wanneer I' en I'' de projectiën van dat punt op de oorspronkelijke projectievlakken zullen zijn. Vereenigen wij dan ten laatste de punten (I', I'') en (K', K''), zoo verkrijgen wij den begeerden afstand ($I'K', I''K''$) der gegevene lijnen, welke uitkomst volkomen met die van Fig. 87 overeenstemt.

OPLOSSING VAN WERKSTUKKEN,

MET BETREKKING TOT DEN DRIEVLAKKIGEN HOEK.

§ 121. In de gewone Meetkunst (zie *Meetk.* § 76) heeft men de vraag leeren oplossen, om door constructie de onbekende zijden en hoeken van een platten driehoek te vinden, indien zoovele andere zijden en hoeken, als tot bepaling van den driehoek vereischt worden, gegeven zijn. Wij zullen thans doen zien, hoe de beschrijvende Meetkunst diezelfde vraag leert oplossen ten aanzien van een bolvormigen driehoek, voor zoover men dien namelijk onafhankelijk van den straal des bols beschouwt (zie *Meetk.* § 399, *Gev.* 2°). Hierbij kunnen zes verschillende gevallen voorkomen. Van een bolvormigen driehoek namelijk kunnen gegeven zijn: 1°. de drie zijden; 2°. twee zijden met den ingesloten hoek; 3°. twee zijden met den hoek over een der zijden; 4°. de drie hoeken; 5°. twee hoeken met de tusschenliggende zijde; 6°. twee hoeken met de zijde over een der hoeken.

§ 122. Om uit de genoemde gegevens de overige zijden en hoeken van een bolvormigen driehoek te construeren, beschouwt

men den drievlakkigen hoek, die met dezen bolvormigen driehoek overeenkomt (*Meetk.* § 398); en het komt er dan slechts op aan: *de onbekende vlakke hoeken of standhoeken van een drievlakkigen hoek te construeren* als gegeven zijn: 1°. de drie vlakke hoeken; 2°. twee vlakke hoeken met den ingesloten standhoek; 3°. twee vlakken hoeken met den standhoek over één hunner; 4°. de drie standhoeken; 5°. twee standhoeken met den tusschenliggenden vlakken hoek; 6°. twee standhoeken met den vlakken hoek over één hunner. Hier bieden zich dus zes verschillende werkstukken ter beschouwing aan. Daar echter elke bolvormige driehoek zijnen pooldriehoek (*Meetk.* § 404), of elke drievlakkige hoek zijnen supplementairen drievlakkigen hoek heeft (*Meetk.* § 339, *Geo.* 1°), kan men deze zes werkstukken onmiddellijk tot een drietal terugbrengen.

Zijn bijv. de drie standhoeken van een drievlakkigen hoek gegeven, dan behoeft men slechts hunne supplementen te nemen, om de vlakke hoeken van zijn supplementairen drievlakkigen hoek te bekomen. Weet men nu hieruit de standhoeken van den laatstgenoemden te construeren, dan zijn de supplementen van die standhoeken weder de vlakke hoeken van den oorspronkelijken drievlakkigen hoek. Hierdoor is alzoo het 4^{de} der bovengenoemde gevallen tot het 1^{ste} teruggebracht; en evenzoo kan men het 5^{de} tot het 2^{de}, het 6^{de} tot het 3^{de} terugbrengen. Wat het 5^{de} geval betreft, levert dit echter geene vereenvoudiging op.

Wij zullen thans de voornaamste oplossingen der genoemde werkstukken doen kennen, na vooraf opgemerkt te hebben, dat men daarbij niet altijd twee projectievlakken behoeft te gebruiken, maar dat somtijds een enkel projectievlak, als vlak van teekening gebezigd, voldoende en verkiesselijk is.

§ 123. WERKSTUK. *De standhoeken van een drievlakkigen hoek te construeren, indien zijne vlakke hoeken gegeven zijn.* Dus ook: *de hoeken van een bolvormigen driehoek te construeren, wiens zijden gegeven zijn.*

Men trekke, in een als projectievlak aangenomen vlak van teekening, uit enig punt T (Fig. 91) de lijnen TA, TB, TC en TA₁ zoodanig, dat de hoeken $ATB = c$, $BTC = a$ en $CTA_1 = b$, de gegevene vlakke hoeken zijn; alsdan vormen deze naast elkander geplaatste hoeken datgene, wat men gewoon is *den ontwikkelenden drievlakkigen hoek* te noemen. Alsnu zal men TB en TC

kunnen beschouwen, als twee in het projectievlak liggende ribben; en zoo men zich verder voorstelt, dat de hoeken BTA en CTA, om de ribben TB en TC omgewenteld worden, tot dat de lijnen TA en TA_1 langs elkander komen te vallen en dus slechts ééne lijn uitmaken, zal die lijn de derde ribbe des drievlakkigen hoeks zijn.

Wij zullen beginnen met de projectie van die derde ribbe te bepalen. Hiertoe nemen wij op TA en TA_1 de punten P en Q, zoodanig dat $TP = TQ$ is, en laten uit deze punten loodlijnen PD en QE op TB en TC vallen; bij de genoemde wenteling der hoeken BTA en CTA, zullen dan de punten P en Q cirkelbogen beschrijven, die D en E tot middelpunten, DP en EQ tot stralen hebben; en zoodra TA en TA_1 langs elkander gekomen zijn, zullen P en Q een en hetzelfde punt van de derde ribbe zijn geworden. Maar de genoemde cirkelbogen liggen in vlakken, die volgens de genoegzaam verlengde lijnen PD en QE loodregt op het projectievlak staan; bij de beweging der punten P en Q, zullen dus de projectiën van die punten zich langs de lijnen PD en QE bewegen; bijgevolg moet het snijpunt P' dier lijnen de projectie zijn van het punt der derde ribbe waar P en Q zamenkomen, en eene lijn TR uit T door P' getrokken is alzoo de projectie der derde ribbe.

Om de hoogte boven het projectievlak te vinden, van het genoemde punt der derde ribbe, kan men de cirkels, door P en Q beschreven, om hunne in het projectievlak liggende middellijnen, op dat projectievlak neerslaan. Cirkels, in het vlak van teekening uit D met DP en uit E met EQ beschreven, zullen die neergeslagen cirkels zijn; en stelt men dan in P' loodlijnen op PP' en op QP' , welke loodlijnen de omtrekken der neergeslagen cirkels in P_1 en Q_1 ontmoeten, zoo zal blijkbaar $P'P_1$ of $P'Q_1$ de begeerde hoogte zijn. Door te onderzoeken of werkelijk $P'P_1 = P'Q_1$ geworden is, heeft men eene proef op de naauwkeurige uitvoering der constructie.

Trekt men nu verder de lijnen P_1D en Q_1E , dan zijn P_1DP' en Q_1EP' de standhoeken des drievlakkigen hoeks op de ribben TB en TC. Want zoo men zich voorstelt, dat het vlak des neergeslagen cirkels PP_1P' om de lijn PP' weder opgericht wordt, zal na die oprigting P_1D loodregt op TB, en in het aan TB grenzend zijvlak des drievlakkigen hoeks, gekomen zijn, terwijl P'D in het zijvlak BTC loodregt op TB gebleven is; hierdoor is dan P_1DP'

werkelijk de standhoek op de ribbe TB geworden. Door de op rigting van den neergeslagen cirkel QQ_1P' , wordt evenzoo Q_1EP' de standhoek op de ribbe TC.

Om eindelijk den standhoek op de derde ribbe te vinden, stelle men in P en Q loodlijnen op TA en TA_1 , en vereenige de punten F en G, waar deze loodlijnen de ribben TB en TC ontmoeten; indien dan de punten P en Q in een punt van de derde ribbe zijn zamengekomen, zullen de lijnen PF en QG de beenen van den begeerden standhoek geworden zijn. Maar deze lijnen vormen dan met FG eenen driehoek, en zij hebben in de figuur, even als FG, hare wezenlijke grootten; beschrijft men dus op FG eenen driehoek FRG, waarin $FR = FP$ en $GR = GQ$ is, dan is FRG de standhoek op de derde ribbe.

Hier is FGR de om zijne basis FG op het projectievlak neergeslagene driehoek, wiens top R zich vóór dat neerslaan in P' projecteerde; maar zijn vlak staat als standvlak loodregt op de derde ribbe, en bijgevolg is ook FG, als doorgang van dat vlak, loodregt op de projectie TP' (zie § 102); wordt dus de genoemde driehoek om FG gewenteld, zoo zal zijn top steeds in het projecterend vlak der derde ribbe blijven, en derhalve zal het punt R ergens in de projectie der derde ribbe moeten neerkomen. Dit verschaft alzoo wederom eene proef op de naauwkeurige uitvoering der constructie. Er blijkt tevens uit, dat de plaats van het punt R gevonden kan worden, door slechts één van de beide lijnen FP of GQ te gebruiken.

Bij dit werkstuk moeten de gegevene vlakke hoeken voldoen aan de voorwaarden, dat hunne som kleiner dan 360° , en dat de som der twee kleinsten grooter dan de derde is (*Meetk.* § 337 en 338). Waren deze voorwaarden niet vervuld, dan zou in de constructie de onbestaanbaarheid van den drievlakkigen hoek daardoor blijken, dat het punt P' niet binnen de neergeslagen cirkels viel, en alzoo het trekken der loodlijnen $P'P_1$ en $P'Q_1$ onmogelijk werd.

§ 124. Mits slechts de zoo even genoemde voorwaarden vervuld zijn, kunnen bij het voorgaande werkstuk de gegevens zowel stompe als scherpe hoeken zijn; en die gegevens kunnen, tot het daarstellen van den ontwikkelden drievlakkigen hoek, in eene willekeurige volgorde naast elkander geplaatst worden. Dit verhindert niet, dat de opgegevene constructie in het algemeen

blijft doorgaan. Het zal dan echter kunnen gebeuren: dat het punt P' niet, zooals in Fig. 91, binnen den hoek BTC valt; dat de punten D en F niet op de ribbe TB , maar op haar verlengde aan de andere zijde van T vallen; dat de punten E en G aan de andere zijde van T op het verlengde van TC komen; dat diensvolgens een of meer van de geconstrueerde hoeken P_1DP' , Q_1EP' en FRG niet de begeerde standhoeken, maar hunne supplementen zijn. Ons bestek gedooft niet al de bijzondere gevallen, die daarbij kunnen voorkomen, afzonderlijk te behandelen, en wij bepalen ons dus tot een paar opmerkingen, die dienen kunnen om in ieder geval op eene gemakkelijke wijze tot de juiste uitkomst te geraken.

Voor het geval dat onder de gegeven vlakke hoeken ten minste twee scherpe zijn, merken wij op, dat men, in den ontwikkelde drievlakkigen hoek, slechts den grootsten der gegeven hoeken, hij zij dan scherp of stomp, in het midden behoeft te plaatsen, om te maken dat bij de constructie alles even zoo valt, als het in Fig. 91 is voorgesteld.

Voor het geval dat onder de gegeven vlakke hoeken meer dan één stompe is, merken wij op, dat men van een willekeurigen drievlakkigen hoek $TABC$ (Fig. 92) slechts eene ribbe TA behoeft te verlengen, om een anderen drievlakkigen hoek $TaBC$ te bekomen, die een vlakken hoek BTC en den daarover staanden standhoek met den eersten gemeen heeft, maar wiens beide andere vlakke hoeken, met de daarover staande standhoeken, de supplementen van de beide andere vlakke hoeken en standhoeken des oorspronkelijken drievlakkigen hoeks zijn. Komt dus onder de gegeven vlakke hoeken meer dan één stompe voor, zoo zal men, in plaats van twee der gegeven stompe hoeken, hunne scherpe supplementen kunnen gebruiken, om de constructie even als in Fig. 91 te verrigten; mits men daarna van de standhoeken, over deze supplementen gevonden, ook weder de supplementen voor de begeerde standhoeken neemt.

Ten einde misvatting voor te komen, merken wij op dat in Fig. 92 $TaBC$ geenszins de supplementaire drievlakkige hoek van $TABC$ is. Men zou hier $TaBC$ een *auxiliairen drievlakkigen hoek* van $TABC$ kunnen noemen, omdat hij gebezigd wordt als eene hulpgrootheid, ten einde eene constructie, die ten aanzien van $TABC$ moet verrigt worden, eenigzins gemakkelijker te maken.

§ 125. Komen bij het voorgaande werkstuk onder de gegebene vlakke hoeken een stompe, een scherpe en een rechte voor, dan zal het wel weder verkiesselijk zijn den stompen hoek als den grootsten in het midden te plaatsen, maar dit heft niet alle bezwaar op.

In Fig. 93 namelijk, waar ATB een rechte, BTC een stompe en CTA, een scherpe hoek is, kan men, na $TP = TQ$ genomen te hebben, het punt P' , de standhoeken P_1DP' en Q_1EP' op de ribben TB en TC, alsmede de projectie TP' der derde ribbe, even als in Fig. 91 construeren; maar niet alzoo den standhoek op de derde ribbe. Want, hoezeer hier de lijn QG, in Q loodregt op TA_1 gesteld, wel TC in een punt G ontmoet, zal de lijn PF, uit P loodregt op TA getrokken, in plaats van TB te ontmoeten evenwijdig met TB zijn, ten gevolge waarvan ook de doorgang GF van het vlak des derden standhoeks, uit G evenwijdig met TB loopen zal. Het neergeslagen hoekpunt R van dien derden standhoek kan nu echter, zooals reeds in § 123 opgemerkt is, gevonden worden door op TP' het punt R zóó te nemen, dat $GR = GQ$ wordt, als wanneer GR het eene been van dien standhoek is. Het andere been zal nu blijkbaar alsmede evenwijdig met TB zijn, en nadat RF evenwijdig met TB getrokken is, zal dus GRF de standhoek op de derde ribbe wezen. De drie lijnen PF, GF en RF, die hier evenwijdig met TB zijn, kwamen in Fig. 91 in een punt F van de lijn TB te zamen.

Het geval dat twee der gegebene hoeken regt mogten zijn, vereischt geene beschouwing, omdat men weet dat alsdan ook de twee overstaande standhoeken regt zijn, terwijl de derde standhoek gelijk aan den derden vlakken hoek is (*Meetk.* § 401).

§ 126. WERKSTUK. *De vlakke hoeken eens drievlakkigen hoeks gegeven zijnde, begeert men den hoek te construeren, dien eene ribbe met het overstaande zijvlak maakt. Dus ook: de zijden eens bolvormigen driehoeks gegeven zijnde, den loodregten boog te construeren, die uit een hoekpunt op de overstaande zijde valt.*

Stellen wij in Fig. 91 uit het punt P' eene loodlijn op TP' , maken wij deze loodlijn $P'p$, gelijk aan de hoogte $P'P_1 = P'Q_1$, en trekken wij Tp , dan is blijkbaar $P'Tp$ de hoek, dien aldaar de derde ribbe van den drievlakkigen hoek met het overstaande zijvlak BTC maakt.

Het zal wel onnoodig zijn aan te wijzen, hoe men, door de

vlakke hoeken in eene andere volgorde te plaatsen, ook de hoeken van de beide andere ribben met hare overstaande zijvlakken construeren kan.

§ 127. WERKSTUK. *Eenen hoek tot den horizon te herleiden.*

Hierdoor verstaat men het vinden van de horizontale projectie van een hoek, indien behalve dezen hoek gegeven zijn de hoeken, die zijne beenen met eene verticale lijn maken (*).

Zij ATB de perspectievische afbeelding van den gegeven hoek (Fig. 94), wiens beenen schuin naar beneden gerigt zijn, en door wiens hoekpunt eene verticale lijn TC loopt. Indien dan een horizontaal vlak, door een willekeurig punt C dezer verticale lijn gebragt, de beenen van den gegeven hoek in A en B snijdt, stelt ACB den tot den horizon herleiden hoek ATB voor; en het komt er dus slechts op aan den hoek ACB te construeren, wanneer behalve hoek ATB ook de hoeken ATC en BTC gegeven zijn.

Blijkbaar heeft men hier een drievlakkigen hoek TABC, wiens vlakke hoeken bekend zijn, en waarin de standhoek op de ribbe TC geen andere dan de te vinden hoek ACB is; deze zou dus door het werkstuk van § 123 kunnen geconstrueerd worden. Daar men nu echter slechts éénen standhoek des drievlakkigen hoeks, en wel den standhoek op eene verticale ribbe, noodig heeft, kan men den hoek ACB korter op de volgende wijze construeren.

Men plaatst namelijk de bekende hoeken, die TA en TB met TC maken, in eene constructiefiguur (Fig. 95), aan weerszijden van eene verticale lijn TC, die men aannemen mag even lang te zijn als de lijn TC van Fig. 94, omdat aldaar C een willekeurig punt van de verticale lijn is. Vervolgens trekt men door C eene horizontale lijn, die de beenen der uitgezette hoeken ergens in A_1 en B ontmoeten zal, dan stellen TCA_1 en TCB de driehoeken TCA en TCB van Fig. 94 in hunne ware gedaante en grootte voor. Daarna maakt men BTA_1 gelijk aan den gegeven hoek, neemt TA_1 gelijk

(*) Dit werkstuk zou te pas komen, indien men, bij de opneming van een in kaart te brengen terrein, hoeken gemeten had, die niet in een horizontaal vlak lagen; want op de kaart kunnen die hoeken niet anders dan tot den horizon herleid voorkomen. Deze herleiding geschiedt echter bij voorkeur door berekening (zie *Meetk.* § 468); daar, wegens de geringe helling van de beenen van den hoek, de constructie meestal met geene voldoende nauwkeurigheid kan uitgevoerd worden.

aan TA_1 en trekt BA_2 , dan stelt evenzoo BTA_2 den driehoek BTA van Fig. 94 in zijne ware gedaante en grootte voor. Eindelijk beschrijft men op BC eenen driehoek BCA , zoodanig dat $BA = BA_2$ en $CA = CA_1$ is; dan is wederom BCA de ware gedaante en grootte van den driehoek BCA van Fig. 94, en derhalve is dan ook ACB de begeerde hoek.

§ 128. Het horizontale vlak snijdt, van den in Fig. 94 voorgestelden drievlakkigen hoek, eene driehoekige piramide $TABC$ af; eigenlijk is dus in Fig. 95 het *ontwikkeld oppervlak* van die piramide geconstrueerd, zooals het ontstaat, wanneer men drie der zijvlakken, om de ribben waarmede zij aan het vierde zijvlak sluiten, op het verlengde van dat vierde zijvlak nederslaat. Men zal zich dus ook omgekeerd kunnen verbeelden, dat in Fig. 95 de driehoeken BCA , TCA_1 en TBA_2 zoodanig om hunne zijden BC , TC en TB worden omgewenteld, dat hunne hoekpunten A , A_1 en A_2 in een en hetzelfde punt zamenkomen, en dat daardoor wederom de piramide gevormd wordt. Hierbij komt de driehoek BCA loodregt op den driehoek BCT ; zoo men dus, na AA'' loodregt op BC getrokken te hebben, BC als as en BCT als verticaal vlak beschouwt, zullen A'' en TA'' de verticale projectiën zijn van het hoekpunt A en de ribbe TA der piramide $TABC$ van Fig. 94. Wij hebben dus hier eene nieuwe constructie, om bij een drievlakkigen hoek, wiens vlakke hoeken BTC , CTA_1 en BTA_2 gegeven zijn, de projectie TA'' eener ribbe op het overstaande zijvlak BTC te vinden.

Trekt men A_2a loodregt op TB , dan is a het middelpunt en aA_2 de straal van den cirkel, dien het punt A_2 beschrijft, als de driehoek TBA_2 om TB gewenteld wordt; gedurende die wenteling zal dus de projectie van het punt A_2 zich langs de lijn A_2a en haar verlengde bewegen, weshalve deze lijn noodwendig door A'' moet gaan. Hieruit blijkt van zelf, hoe men de constructie van het behandelde werkstuk zou moeten wijzigen, wanneer een der beenen van den te herleiden hoek horizontaal mogt loopen. Deze wijziging is in Fig. 96 voorgesteld, waar de bekende hoek BTC regt genomen is, en diensvolgens TB en CB als evenwijdige lijnen geen snijpunt verkrijgen. Hier is, na A_2A'' loodregt op CB getrokken te hebben, op die verlengde loodlijn het punt A zoodanig genomen, dat $CA = CA_1$ en dus $A''CA$ de tot den horizon herleide hoek werd.

Deze constructie is echter blijkbaar reeds in die van § 123 begrepen.

Zijn de beenen van den te herleiden hoek beide of een van beide schuin naar boven gerigt, zoodat bijv. die hoek in Fig. 94 door aTb of ATb wordt voorgesteld, dan zal men die beenen slechts als door het hoekpunt heen verlengd behoeven aan te merken, om de constructie even als in Fig. 95 te kunnen verrigten, waar nu CTA_1 en CTB gelijk aan de supplementen van CTa en CTb in Fig. 94 moeten genomen worden, terwijl dan in Fig. 95 de gelijke overstaande hoek van BCA de herleide hoek aTb , en de supplementshoek van BCA de herleide hoek ATb zal zijn.

§ 129. WERKSTUK. *Van een drievlakkigen hoek, twee vlakke hoeken met den ingesloten standhoek gegeven zijnde, begeert men den derden vlakken hoek te construeren.* Dus ook: *van een bolvormigen driehoek twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijnde, de derde zijde te construeren.*

De oplossing van dit werkstuk kan onmiddellijk, uit die van het voorgaande, bij omkeering, afgeleid worden.

Na namelijk, zooals in Fig. 95, de gegevene vlakke hoeken CTA_1 en CTB nevens elkander geplaatst, en loodregt op hun gemeenschappelijke been CT eene lijn getrokken te hebben, die de andere beenen in A_1 en B ontmoet, maakt men eerst den hoek BCA gelijk aan den gegeven standhoek, neemt daarna $CA = CA_1$, en trekt AB . Vervolgens beschrijft men op BT eenen driehoek TBA_2 , zoodanig dat $TA_2 = TA_1$ en $BA_2 = BA$ is, dan is BTA_2 de begeerde derde vlakke hoek.

Is een van de gegevene vlakke hoeken een rechte hoek, dan zal, na de nevens elkander plaatsing van die hoeken, de lijn, loodregt op het gemeenschappelijk been CT getrokken, zooals in Fig. 96, het tweede been van den regten hoek CTB niet ontmoeten. Na in dit geval echter BCA gelijk aan den gegeven standhoek, en $CA = CA_1$ genomen te hebben, trekt men uit A eene loodlijn AA'' op BC , en neemt, op het verlengde van die loodlijn, het punt A_2 zoodanig dat $TA_2 = TA_1$ wordt, dan zal wederom BTA_2 de begeerde derde vlakke hoek wezen.

Deze constructiën, waarbij het geen de minste zwarigheid oplevert, indien de gegeven standhoek regt of stomp mogt wezen, zijn uit de verklaringen der voorgaande § zoo duidelijk, dat zij hier geene nadere opheldering behoeven.

Voor het overige is het klaar, dat men, na de ontwikkeling A_1TC , CTB , BTA_2 van den drievlakkigen hoek verkregen te hebben,

het werkstuk van § 123 volgen kan, om zoo het noodig is de beide andere standhoeken te construeren.

§ 130. Mogten bij het voorgaande werkstuk de gegeven vlakke hoeken beide of een van beide stomp zijn, zoo kan de constructie even als boven verrigt worden; hierbij zal men dan de door het hoekpunt heen verlengde beenen dier stompe hoeken moeten bezigen, en behoorlijk moeten onderscheiden, of de constructie onmiddellijk den derden vlakken hoek, dan wel diens supplement oplevert. Hieromtrent verschaft de auxiliaire drievlakkige hoek, waarvan wij in § 124 spraken, het duidelijkste inzicht.

Zijn namelijk de gegeven vlakke hoeken beide stomp, dan maakt men CTA_1 en CTB (Fig. 95) gelijk aan hunne supplementen, terwijl men BCA gelijk aan den gegeven standhoek maakt; de hoek BTA_2 , door de constructie opgeleverd, is dan wederom de begeerde vlakke hoek. Immers de hoeken A_1TC , CTB en BTA_2 stellen hier een ontwikkelden auxiliairen drievlakkigen hoek voor, die den vlakken hoek over de ribbe TC , met den oorspronkelijken drievlakkigen hoek gemeen heeft.

Is echter slechts een der gegeven vlakke hoeken stomp, dan maakt men CTA_1 gelijk aan het supplement van den gegeven stompen, en CTB gelijk aan den gegeven scherpen vlakken hoek, terwijl men BCA gelijk aan het supplement van den gegeven standhoek maakt; alsnu is de hoek BTA_2 , dien de constructie oplevert, het supplement van den begeerden derden vlakken hoek. Immers vormen nu de hoeken A_1TC , CTB en BTA_2 een ontwikkelden auxiliairen drievlakkigen hoek, die met den oorspronkelijken den vlakken hoek over de ribbe TA of TA_2 gemeen heeft, en waarin de standhoek op -, en de vlakke hoek over - de ribbe TC , de supplementen zijn van hetgeen zij in den oorspronkelijken drievlakkigen hoek waren.

§ 131. WERKSTUK. *Van een drievlakkigen hoek, twee vlakke hoeken met den standhoek over een dier vlakke hoeken gegeven zijnde, begeert men den derden vlakken hoek te construeren. Dus ook: van een bolvormigen driehoek twee zijden met een hoek over een dier zijden gegeven zijnde, de derde zijde te construeren.*

Mogten de gegeven vlakke hoeken beide of een van beide stomp zijn, dan zal men, gelijkerwijze als dit in de voorgaande § is aangewezen, door de beschouwing van een auxiliairen drievlakkigen hoek, de constructie kunnen terugbrengen tot het geval, dat er

twee scherpe vlakke hoeken gegeven zijn. Wij zullen ons dus tot dit geval bepalen, en door twee verschillende figuren de gevallen onderscheiden, dat de gegevene standhoek scherp of stomp is.

Na in het horizontale vlak eene lijn TC loodregt op de as van projectie OX gesteld te hebben (Fig. 97 en 98), trekken wij de lijnen TA en TB zoodanig, dat de hoeken CTA en CTB gelijk aan de gegevene vlakke hoeken zijn. Laat dan de standhoek over den vlakken hoek CTB gegeven zijn, zoo construeren wij vooreerst een vlak $(A, AA_{//})$, waarvan de horizontale doorgang langs TA valt, en dat met het horizontale vlak, aan die zijde waar de vlakke hoeken geplaatst zijn, den gegeven standhoek maakt. Hiertoe stellen wij, volgens § 89, op den horizontalen doorgang ergens in P eene loodlijn, die de as ergens in H' ontmoet, en maken hoek H'PQ gelijk aan den gegeven standhoek; daarna stellen wij in H' op PH' eene loodlijn, die het verlengde been PQ van den uitgezette standhoek ergens in H zal ontmoeten; vervolgens stellen wij in H' aan de behoorlijke zijde op de as eene loodlijn H'H'' = H'H, en eindelijk trekken wij door H'' den verticalen doorgang van het begeerde vlak $(A, AA_{//})$.

Stellen wij ons nu voor, dat de vlakke hoek CTA in het horizontale vlak blijft liggen, zoodat TA en TC werkelijk twee ribben van den te construeren drievlakkigen hoek zijn; en verbeelden wij ons verder, dat de vlakke hoek CTB om de ribbe TC wordt gewenteld, tot dat het been TB in het vlak $(A, AA_{//})$ is gekomen, dan zal de lijn TB, in dien stand, werkelijk de derde ribbe van den drievlakkigen hoek geworden zijn. Maar het punt B van de lijn TB doorloopt, bij de genoemde wenteling van den vlakken hoek CTB, eenen cirkelboog die, C tot middelpunt en CB tot straal hebbende, in het verticale vlak ligt en dus onmiddellijk in zijne ware gedaante kan beschreven worden. Het punt B'', waar de verticale doorgang AA'' door dien cirkelboog gesneden wordt, en dat zijne horizontale projectie B' in de as heeft, is dan gelijktijdig een punt van de wentelende lijn TB en van het vlak $(A, AA_{//})$; trekken wij dus TB' en CB'', zoo zijn dit de horizontale en verticale projectiën van de derde ribbe des drievlakkigen hoeks.

Slaan wij eindelijk het vlak $(A, AA_{//})$ om zijn horizontalen doorgang op het horizontale vlak neder, en wel naar de andere zijde

dan waar de gegevene vlakke hoeken geplaatst zijn, dan komt (zie § 90) het punt (B', B'') neder in de verlengde loodlijn $B'b$, uit B' op AA , neergelaten; maar het punt B blijft, bij het doorloopen van den cirkelboog BB'' , altijd den afstand TB van het punt T behouden, zoodat TB de werkelijke lengte van (TB', CB'') is; beschrijven wij dus uit T met TB een cirkelboogje, dat de verlengde $B'b$ in B_1 snijdt, zoo is B_1 het neergeslagen punt (B', B'') des vlaks (A, AA), en bijgevolg TB_1 de neergeslagene lijn (TB', CB'').

Derhalve is dan ATB_1 de begeerde derde vlakke hoek; zoodat B_1TA , ATC , CTB de ontwikkelde drievlakkige hoek is, waarvan men des verkiezende nu ook de twee andere standhoeken volgens § 123 construeren kan.

Het boven de as gelegene deel AA , van den verticalen doorgang des vlaks (A, AA) kan, door den cirkel uit C beschreven, in twee punten gesneden worden; alsdan geeft elk dezer snijpunten een verschillend antwoord op de vraag, zoodat de gegevens twee drievlakkige hoeken van zeer verschillenden vorm toelaten. In onze figuren leverde de constructie slechts één antwoord op, omdat het tweede snijpunt, van den cirkel met den verticalen doorgang AA , op het verlengde van dien doorgang beneden de as viel; dit tweede snijpunt zou de derde ribbe van eenen drievlakkigen hoek aanwijzen, die, mede TA en TC tot ribben hebbende, wel de gegevene vlakke hoeken had, maar waarin de standhoek, over den vlakken hoek CTB , het supplement van den gegeven standhoek was. Vielen de beide snijpunten op het verlengde van den doorgang beneden de as, dan zouden zij ook twee drievlakkige hoeken doen vinden, waarin de bedoelde standhoek het supplement van den gegebenen was; in dat geval laten dus de gegevens in het geheel geen drievlakkigen hoek toe. Mogt de meergenoemde cirkel den doorgang AA , in het geheel niet snijden en ook niet raken, dan kan de begeerde drievlakkige hoek niet bestaan, zelfs al wilde men, in plaats van den gegeven standhoek, diens supplement toelaten. Mogt echter de doorgang AA , door den cirkel geraakt worden, dan zou het raakpunt de derde ribbe van den begeerden drievlakkigen hoek aanwijzen, waarin dan de standhoek over het zijvlak CTA regt zou zijn.

Al deze bijzonderheden komen overeen met hetgeen in de Meetkunst geleerd wordt over de bestaanbaarheid van een bolvormigen driehoek, als twee zijden met den hoek over een van

die zijden naar welgevallen gegeven worden (zie *Meetk.* § 466, 5^{de} *Geval*).

Eindelijk merken wij nog op, dat de gegebene vlakke hoeken CTA of CTB een van beide, regt zouden kunnen zijn. In dat geval zal de constructie wel, volgens den boven aangewezen weg, kunnen verrigt worden, maar daar alsdan TA of TB een van beide evenwijdig met de as OX worden, zullen sommige bijzondere deelen der constructie eene wijziging moeten ondergaan, die echter, zoo men al het voorgaande wel begrepen heeft, geene bezwaren zal opleveren, en die wij dus aan den lezer tot eigene oefening zullen overlaten.

§ 132. WERKSTUKKEN. 1°. *De vlakke hoeken van een drievlakkigen hoek te construeren, indien zijne standhoeken gegeven zijn.* Dus ook: *De zijden van een bolvormigen driehoek te construeren, wiens hoeken gegeven zijn.*

2°. *Van een drievlakkigen hoek twee standhoeken met den tusschenliggenden vlakken hoek gegeven zijnde, begeert men den derden standhoek en de overige vlakke hoeken te construeren.* Dus ook: *Van een bolvormigen driehoek twee hoeken met de tusschenliggende zijde gegeven zijnde, de overige hoek en zijden te construeren.*

3°. *Van een drievlakkigen hoek twee standhoeken met een zijvlak over een hunner gegeven zijnde, begeert men den derden standhoek en de overige zijvlakken te construeren.* Dus ook: *Van een bolvormigen driehoek twee hoeken met eene zijde over een dezer hoeken gegeven zijnde, de overige hoek en zijden te construeren.*

Blijkens hetgeen in § 122 is aangevoerd, is de beschouwing van den supplementairen drievlakkigen hoek toereikend, om van de drie bovengenoemde werkstukken: het eerste tot dat van § 123, het tweede tot dat van § 129, en het derde tot dat van § 131 terug te brengen. Wij kunnen dus de uitvoering der constructiën aan den lezer overlaten. Daar echter het tweede dezer werkstukken, ook zonder supplementairen drievlakkigen hoek, eene zeer eenvoudige constructie toelaat, zullen wij die alhier nog laten volgen.

§ 133. WERKSTUK. *Een drievlakkigen hoek te ontwikkelen, indien één zijvlak met de aangrenzende standhoeken gegeven zijn.*

Laat ATB (Fig. 99) het gegeven zijvlak zijn, dat wij als projectievlak zullen aannemen, ten einde er den drievlakkigen hoek op te ontwikkelen. Stellen wij nu, in willekeurige punten D en E, loodlijnen binnenwaarts op de beide ribben TA en TB,

en beschrijven wij op die loodlijnen regthoekige driehoeken, waarin de hoeken FDH en GEI gelijk aan de gegevene standhoeken zijn, en waarin de zijden FH en GI over die hoeken even groot zijn; wordende dit laatste gemakkelijk verkregen, door $DK = EL$ te nemen, en voorts de lijnen KH en LI loodregt op TA en TB te trekken. Indien wij dan verder uit F en G lijnen evenwijdig met TA en TB trekken, zal het snijpunt C' der lijnen een punt zijn van de projectie der derde ribbe. Want verbeeldt men zich dat de driehoeken FDH en GEI om FD en GE worden opgerigt, tot dat hunne vlakken loodregt op het projectievlak staan, dan komen de punten H en I op gelijke hoogten boven dat vlak, ieder in een der aan ATB grenzende zijvlakken des drievlakkigen hoeks; worden daarna die opgerigte driehoeken evenwijdig met zich zelf verschoven, tot dat de punten F en G in C' komen, dan zullen de punten H en I zamenkomen in een punt, dat zich in C' projecteert en ter hoogte $FH = GI$ boven het projectievlak ligt; en dit punt is dan een punt van de derde ribbe, omdat de punten H en I, bij het laatstgenoemd verschuiven der opgerigte driehoeken FDH en GEI, in de opstaande zijvlakken blijven, en dus bij hun zamenkomen een gemeenschappelijk punt van die zijvlakken, dat is een punt van de derde ribbe, geworden zijn. Hieruit volgt verder, dat zoo wij uit C' loodlijnen C'd en C'e op TA en TB trekken, en die zoover verlengen dat $dC = DH$ en $eC_1 = EI$ wordt, C' en C₁ de plaatsen zullen zijn, waar het genoemde punt der derde ribbe nederkomt, als de opstaande zijvlakken des drievlakkigen hoeks om TA en TB op het projectievlak naar buiten neergeslagen worden. Trekken wij dus uit T lijnen door C en C₁, dan hebben wij den ontwikkelden drievlakkigen hoek CTA, ATB, BTC₁ verkregen. Blijkbaar moet hierbij $TC = TC_1$ worden, waardoor men eene proef op de naauwkeurige uitvoering der constructie heeft.

Hoezeer wij, blijkens de figuur, ondersteld hebben dat de gegevene standhoeken scherp waren, kan de aangewezen constructie ook gevolgd worden, als die hoeken beide of een van beide stomp waren. Was bijv. de standhoek op de ribbe TB een stompe hoek, dan zou men op het verlengde van de loodlijn EG een regthoekigen driehoek G'E'I' beschrijven, zoodanig dat GEI' gelijk aan den gegeven standhoek werd, en daarna van de verlengde I'G' hetzelfde gebruik maken, dat boven van de verlengde IG gemaakt is.

HET PROJECTEREN

VAN VEELVLAKKIGE LIGCHAMEN, EN HET ONTWIKKELEN
HUNNER OPPERVLAKKEN.

§ 134. Daar reeds in § 37 gebleken is, wat men door het projecteren van veelvlakkige lichamen verstaat, zullen wij thans aanvankelijk verklaren, wat men door het ontwikkelen hunner oppervlakken te verstaan heeft. Ten aanzien van het projecteren hebben wij nog slechts op te merken, dat men een te projecteren ligchaam gewoonlijk boven het horizontale en vóór het verticale vlak plaatst; dat dan evenwel een beschouwer, dien men onderstelt boven of vóór het ligchaam geplaatst te zijn, somtijds een of meer projectiën van ribben slechts door het ligchaam heen zal kunnen zien; en dat men alzoo onderscheidingshalve zulke onzichtbare projectiën, door gestipte of afgebrokene lijnen, voorstelt.

Wanneer, in het algemeen, eenig oppervlak door regte lijnen kan verdeeld worden in deelen, die ieder op zich zelf als plat mogen beschouwd worden, noemt men dit oppervlak *ontwikkelaar*. Laat namelijk de samenhang des oppervlaks langs sommige van de genoemde deellijnen verbroken worden, terwijl die samenhang langs de overige deellijnen blijft bestaan, en wel zoodanig dat elk deel ten minste volgens ééne deellijn aan een aangrenzend deel vastgehecht blijft, dan zal men zich kunnen voorstellen, dat elk paar aaneengehecht geblevene deelen, door eene wenteling om hunne lijn van aansluiting, in een en hetzelfde platte vlak gebragt worden. Hierdoor gaat dan het geheele oppervlak in eene enkele zamenhangende vlakke figuur over, die *het ontwikkeld oppervlak* genoemd wordt.

Het oppervlak van een bol is dus niet ontwikkelaar; want men kan op dat oppervlak geene regte lijnen trekken, en het dus ook niet door regte lijnen in deelen verdeelen. Het geheele oppervlak van een kegel is mede niet ontwikkelaar, omdat het grondvlak en het ronde oppervlak niet door regte lijnen van elkander kunnen gescheiden worden. Het ronde oppervlak des kegels kan echter ontwikkeld worden (zie *Meetk.* § 421. *Opm.*), want men kan uit den top op dat oppervlak eene menigte van regte lijnen trekken en het daardoor in oneindig veel oneindig kleine driehoeken verdeelen, die ieder op zich zelf als plat mogen beschouwd worden.

Zoo ook is het oppervlak van elk veelvlakig ligchaam ontwikkelbaar; want bij zulk een ligchaam zijn de ribben de regte lijnen, waardoor het oppervlak in platvlakkige deelen verdeeld kan worden. Het construeren van de enkele zamenhangende figuur, waarin dit oppervlak door de bovenbedoelde wenteling overgaat, heet dan *het ontwikkelen van het oppervlak des ligchaams*.

§ 135. Kent men de projectiën van een veelvlakig ligchaam, dan kan men vragen zijn oppervlak te ontwikkelen, of ook de ware gedaante van zeker zijvlak, of van eene bepaalde doorsnede, te construeren. Is omgekeerd, zooals niet zelden het geval is, het ontwikkeld oppervlak gegeven, dan kan men vragen de projectiën van het ligchaam te vinden.

Een te projecteren ligchaam kan echter op vele andere wijzen door de noodige gegevens bepaald zijn; welken weg men dan tot dat projecteren te volgen heeft, hangt niet alleen van den aard dier gegevens af, maar ook van den stand, dien men aan het ligchaam met betrekking tot de projectievlakken geven wil. Om een ligchaam in een bepaalden stand te projecteren, zal het dikwijls verkiesselijk zijn, dit ligchaam aanvankelijk in een anderen stand te projecteren, en na te gaan welke nieuwe projectiën het verkrijgt, als men het zekere bewegingen of verplaatsingen laat ondergaan.

Dit alles zullen wij kortelijk door eenige weinige werkstukken trachten op te helderen, en daartoe vooraf nog het een en ander, nopens het projecteren van vlakke figuren, aanvoeren.

§ 136. WERKSTUK. *Een veelhoek, die op het horizontale vlak ligt, wordt om een zijner diagonalen gewenteld, tot dat zijn vlak een' gegeven hoek met het horizontale vlak maakt. Men begeert de projectiën van dien veelhoek, in zijn nieuwen stand, te vinden.*

Laat PQRST (Fig. 100) de op het horizontale vlak liggende veelhoek zijn, en RT de diagonaal, om welken hij gewenteld wordt. Trekken wij dan eene lijn aX_1 , die dien verlengden diagonaal A,A, ergens in a regthoekig snijdt, en maken wij vervolgens den hoek X_1aa , gelijk aan den gegeven hoek, zoo zal A,A, de horizontale doorgang en X_1aa , het om aX_1 neergeslagen standvlak zijn, van het vlak des veelhoeks, nadat die in den bedoelden nieuwen stand zal zijn gekomen.

Daar nu PQRST den om A,A, op het horizontale vlak neergeslagen veelhoek voorstelt, kunnen wij, volgens § 92 en Fig. 67, dadelijk de projectiën p'' , q'' en s'' op het standvlak, en daarna

de horizontale projectiën P' , Q' en S' bepalen, die de punten P , Q en S des neergeslagen veelhoeks verkrijgen zullen, wanneer zijn vlak weder opgericht wordt; terwijl bij die oprigting de punten R en T op hunne plaats blijven. Vereenigen wij dus de verkregene punten, dan verkrijgen wij de horizontale projectie $P'Q'RS'T$ van den veelhoek in zijn nieuwen stand.

Trekken wij verder uit de horizontale projectiën P' , Q' , R , S' en T loodlijnen op de as OX , en zetten wij, voor zooveel de punten P' , Q' en S' betreft, op die loodlijnen stukken boven of beneden de as OX uit, die gelijk zijn aan de hoogte of diepte van de punten p'' , q'' en s'' boven of beneden αX , dan verkrijgen wij de verticale projectie $P''Q''R''S''T''$ van den in zijn nieuwen stand gekomen veelhoek.

Het is klaar, dat men volkomen op dezelfde wijze de projectiën van den veelhoek in eenigen nieuwen stand vinden kan, wanneer men hem om een zijner zijden, of om eene willekeurige in het horizontale vlak getrokken lijn, laat wentelen.

§ 137. WERKSTUK. *Eene op het horizontale vlak gelegene kromlijnige figuur beweegt zich, om eene in dat vlak getrokken lijn, zoolang opwaarts, tot dat haar vlak een' gegeven hoek met het horizontale maakt. Men begeert, in dien nieuwen stand, hare projectiën te vinden.*

Laat $PQRS$ (Fig. 101) de op het horizontale vlak liggende kromlijnige figuur zijn, waarvoor wij hier, om er later gebruik van te maken, eene geslotene kromme lijn kiezen; en zij AA , de lijn in het horizontale vlak, om welke het vlak der figuur zich opwaarts beweegt. Dan ligt die figuur, in haren nieuwen stand, in een vlak dat AA , tot horizontalen doorgang heeft, en waarvan dus onmiddellijk, op eenig punt a van dien doorgang, een standvlak X_1aa , kan beschreven worden, door αX , loodregt op AA , te stellen en den hoek X_1aa , gelijk aan den gegeven hoek te maken.

Nemen wij nu in de gegevene kromme lijn een willekeurig punt P aan, dan vinden wij, even als in het voorgaande werkstuk handelende, dat dit punt zich, na de bepaalde opwaartsbeweging van het vlak der figuur, op het standvlak in p'' , op het horizontale vlak in P' , en op het verticale vlak in P'' zal projecteren. Construeren wij dus, op dezelfde wijze, de horizontale en verticale projectiën van een genoegzaam aantal punten der

kromme lijn in haren nieuwen stand, dan zullen wij, door de alzoo geconstrueerde punten, de begeerde projectiën $P'Q'R'S'$ en $P''Q''R''S''$ met eene genoegzame naauwkeurigheid uit de hand kunnen trekken.

Het is klaar, dat de verkregene projectiën naauwkeuriger zullen zijn, naargelang er meer punten gebezigd worden, en dat men alleen van de naauwkeurigheid der werkelijk geconstrueerde punten zeker kan zijn. De kromme lijnen, die men uit de hand door de geconstrueerde punten trekt, kunnen dus altijd, wat hare naauwkeurigheid betreft, iets te wenschen overlaten; maar met uitzondering van den cirkel zijn alle kromme lijnen aan dit bezwaar onderworpen. De cirkel toch is de eenige kromme lijn, die men eigenlijk construeren kan; van alle andere kromme lijnen kan men slechts een groot aantal punten bepalen, en de kromme lijn uit de hand door die punten trekken.

§ 138. Heeft men, in de kromme lijn van het voorgaande werkstuk, eene koorde PQ evenwijdig met AA , getrokken, dan blijft die koorde, bij de opwaartsbeweging van het vlak, evenwijdig met AA , terwijl al de punten dier koorde op dezelfde hoogte pp'' boven het horizontale vlak komen. Van zulk eene koorde PQ is dus de horizontale projectie $P'Q'$ almede evenwijdig met AA , en de verticale projectie $P''Q''$ evenwijdig met de as; terwijl de horizontale projectie $P'Q'$ even lang is als de koorde PQ zelve.

Van eene koorde PS , die loodregt op AA , gerigt is, is blijkbaar ook de horizontale projectie $P'S'$ loodregt op AA . Tusschen de lengte dezer projectie en de lengte van de koorde zelve, bestaat eene bepaalde betrekking, die van den hellingshoek X_1aa'' afhangt. Dien hoek α noemende, hebben wij (zie *Meetk.* § 268) onmiddellijk $ps = p's' \times \cos \alpha$; maar nu is $ps = P'S'$ en $p's' = PS$, dus ook $P'S' = PS \times \cos \alpha$.

Hieruit volgt, dat men alle koorden, in de oorspronkelijke figuur loodregt op AA , getrokken, in dezelfde reden, namelijk in reden van 1 tot $\cos \alpha$, zal moeten verkleinen, ten einde de lengten van de horizontale projectiën dier koorden te bekomen. En dat de langste van deze koorden ook de langste horizontale projectie zal hebben.

Bij de beweging van het vlak der figuur om de lijn AA , blijft het punt, waar deze lijn door de verlengde koorde PS gesneden wordt, op zijne plaats; eene loodlijn, uit dit punt op de as OX

neergelaten, zal dus op de as een punt aanwijzen, door hetwelk de verlengde verticale projectie $P''S''$ der genoemde koorde gaan moet.

Al deze bijzondere opmerkingen kunnen dienen, om, bij het projecteren der kromlijnige figuur, de naauwkeurige uitkomst der constructie te verzekeren.

§ 139. Mogt de kromlijnige figuur van het voorgaande werkstuk een cirkel zijn, dan kan men gebruik maken van de eigenschap, dat de projectiën van cirkels in het algemeen ellipsen zijn (zie *Beg. der Hoogere Meetk.* § 301 of *Kort Begrip* § 158). Hetgeen wij in de voorgaande § opmerkten is dan genoegzaam, om de assen der horizontale projectie te vinden.

Moet hijv. een cirkel, die met zijn middelpunt in M op het horizontale vlak ligt (Fig. 102), zooveel om de lijn AA , opwaarts bewogen worden, als door den hoek X_1aa , wordt aangewezen. Trekt men dan in dien cirkel twee middellijnen, waarvan de eene PQ evenwijdig met AA , de andere RS loodregt op AA , is, en bepaalt men de projectiën $P'Q'$ en $R'S'$ die deze middellijnen verkrijgen, dan zijn $P'Q'$ en $R'S'$ de assen der ellips, die de horizontale projectie van den cirkel in zijn nieuwen stand is. Immers PQ is de eenige middellijn, die bij de beweging evenwijdig met het horizontale vlak blijft en zich dus in hare ware grootte blijft projecteren; alle andere middellijnen des cirkels verkrijgen kortere lijnen tot projectiën, en derhalve is $P'Q'$ de groote as der elliptische projectie. Voorts is, in den cirkel, RS de grootste der koorden, die men regthoekig op AA , kan trekken; hare projectie is dus ook de grootste der koorden, die men in de projectie loodregt op $P'Q'$ kan trekken, en alzoo is $R'S'$ de kleine as der projectie.

Om de assen der verticale projectie te vinden, bepaalt men eerst de verticale projectie M'' van het middelpunt, en den verticalen doorgang AA , van het vlak des cirkels, in zijn nieuwen stand; waartoe M'' even hoog boven OX moet genomen worden, als m'' boven aX_1 ligt. Vervolgens laat men $M''b$ loodregt op AA , neder, stelt $M''M_1 = m'M'$ loodregt op $M''b$, en trekt bM_1 , dan is $M''bM_1$ de standhoek van het vlak des cirkels met het verticale. Neemt men dus, op het been bM_1 van dien standhoek, M_1E en M_1F beide gelijk aan den straal van den cirkel, en projecteert men de punten E en F op het andere been van den standhoek, dan ver-

krijgt men de kleine as $E''F''$ der verticale elliptische projectie, waarvan de groote as $C''D''$ door M'' evenwijdig met AA_{∞} loopt en wederom gelijk aan de middellijn van den cirkel is. Dit alles blijkt onmiddellijk, uit hetgeen wij over het vinden van de horizontale projectie gezegd hebben.

Ten einde alle misvatting voor te komen, merken wij nog op, dat $C''D''$ en $E''F''$ geenszins de verticale projectiën van de middellijnen PQ en RS, maar van een paar andere onderling regthoekige middellijnen des cirkels zijn.

§ 140. WERKSTUK. *De projectiën te construeren van eenen cirkel, wiens middelpunt, as en straal gegeven zijn.*

Daar de as van eenen cirkel de lijn is, die door zijn middelpunt loodregt op zijn vlak getrokken wordt, behoeft men slechts, door het gegeven middelpunt, een vlak loodregt op de gegevene as te brengen; dit vlak, met het daarin gelegene middelpunt, om zijn horizontalen doorgang, op het horizontale vlak neer te slaan; uit het neergeslagen middelpunt, met den gegeven straal, den cirkel te beschrijven; en eindelijk, volgens de voorgaande §, de projectiën te construeren, die deze cirkel verkrijgt, als het neergeslagen vlak weder in zijn oorspronkelijken stand gebracht wordt.

De beschouwing der in de voorgaande § gebruikte Fig. 102, kan ons echter een korteren weg tot het construeren der begeerde projectiën aanwijzen. Blijkens die figuur toch (waarin loodlijnen, uit M' en M'' op AA_1 en AA_{∞} getrokken, de projectiën van de as des aldaar geprojecteerden cirkels zijn) hebben de elliptische projectiën van een cirkel in de ruimte, hare groote assen regthoekig op —, en hare kleine assen langs — de gelijknamige projectiën van de as des cirkels, aan wiens middellijn tevens de groote assen dier ellipsen gelijk zijn, zoodat men nog slechts de lengte van hare kleine assen noodig heeft. Maar deze kleine assen zijn de projectiën van de bijzondere middellijnen des cirkels in de ruimte, die in de projecterende vlakken van zijne as regthoekig op die as staan, en zij kunnen dus, door het neerslaan van deze projecterende vlakken, dadelijk geconstrueerd worden.

Zij bijv. (M', M'') het middelpunt, ($G'H', G''H''$) de as, en r de straal (Fig. 103) van den te projecteren cirkel. Stellen wij dan $M'P' = M'Q' = r$ loodregt op $G'H'$; slaan wij verder het horizontaal-projecterend vlak van ($G'H', G''H''$) op het horizontale vlak neder, waardoor wij GH voor de neergeslagene as en M voor het daarin

liggende middelpunt verkrijgen; stellen wij vervolgens $MR=MS=$ loodregt op GH , en laten wij uit R en S loodlijnen RR' en SS' op $G'H'$ vallen, dan zijn $P'Q'$ en $R'S'$ de assen der ellips, die de horizontale projectie van den cirkel in de ruimte is. De assen $C'D'$ en $E'F'$ der verticale projectie worden, zooals ten overvloede door de lijnen in de figuur voorkomende is aangewezen, volkomen op dezelfde wijze geconstrueerd.

§ 141. STELLING. *Wanneer eene geslotene vlakke figuur op een ander vlak geprojecteerd wordt, is de inhoud der projectie gelijk aan den inhoud der figuur zelve vermenigvuldigd met den Cosinus van den hoek, dien haar vlak met het projectievlak maakt.*

In § 137 hebben wij de projectie $P'Q'R'S'$ gevonden (Fig. 101) van de geslotene vlakke figuur $PQRS$, wanneer die gebragt werd in een vlak, dat het projectievlak volgens den doorgang AA , onder eenen hoek α sneed. Ten aanzien van de koorden, in de geprojecteerde figuur en hare projectie loodregt op den doorgang AA , getrokken, is voorts in § 138 gebleken, dat de lengte van elke koorde $P'S'$ der projectie gevonden wordt, door de lengte van de overeenkomstige koorde PS der figuur zelve, met $\text{Cos. } \alpha$ te vermenigvuldigen.

Hieruit mag men besluiten, dat, wanneer de figuur $PQRS$ door koorden loodregt op AA , in een zeer groot aantal zeer smalle strooken verdeeld wordt, de inhoud van zulk een strook MN met $\text{Cos. } \alpha$ moet vermenigvuldigd worden, om den inhoud van zijne projectie $M'N'$ te verkrijgen. Daar dit nu voor al de strooken geldt, waarin $PQRS$ verdeeld is, en voor allen de factor $\text{Cos. } \alpha$ dezelfde waarde heeft, terwijl de som van de projectiën der strooken niet anders is dan de projectie $P'Q'R'S'$, heeft men ook onmiddellijk: $\text{Inh. } P'Q'R'S' = \text{Inh. } PQRS \times \text{Cos. } \alpha$.

Hoezer wij tot het betoog dezer stelling eene kromlijnige figuur gebezigd hebben, is het klaar, dat zij almede doorgaat voor vlakke figuren, die geheel of ten deele door rechte lijnen worden ingesloten.

De projectie eener figuur, wier vlak loodregt op het projectievlak staat, is eene enkele rechte lijn en heeft dus geen' inhoud. De projectie eener figuur, wier vlak evenwijdig met het projectievlak loopt, is met de figuur gelijk en gelijkvormig en heeft dus denzelfden inhoud. Door in de bewezene vergelijking $\alpha = 90^\circ$ en $\alpha = 0$ te stellen, verkrijgt men hiermede overeenstemmende uitkomsten.

Uit onze stelling volgt verder bij omkeering, dat de inhoud eener vlakke figuur gevonden wordt, door den inhoud van hare projectie te vermenigvuldigen met den Secans van den hoek, waaronder zij op het projectievlak helt.

§ 142. STELLING. *Wanneer eene geslotene vlakke figuur op drie onderling regthoekige vlakken geprojecteerd wordt, is de tweede magt van den inhoud der figuur gelijk aan de som van de tweede magten van de inhouden der drie projectiën.*

Noemen wij de inhouden van de figuur en van hare drie projectiën, respectievelijk I , I_1 , I_2 en I_3 , gelijk mede α , β en γ de hoeken, die het vlak der figuur met de projectievlakken maakt; dan is, volgens de voorgaande stelling,

$$I_1 = I \cos. \alpha, \quad I_2 = I \cos. \beta \quad \text{en} \quad I_3 = I \cos. \gamma,$$

zoodat wij, door de som van de tweede magten dezer waarden te nemen, dadelijk verkrijgen

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = I^2 (\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma).$$

Maar wij hebben ook, zooals in de hoogere Meetkunst bewezen wordt (zie *Beg. der Hoogere Meetk.* § 319 of *Kort Begrip* § 176), $\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma = 1$, en derhalve is dan

$$I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 = I^2.$$

§ 143. Heeft men eene regthoekige driehoekige piramide ABCD (Fig. 104), dat is eene zoodanige waarvan de drie ribben en dus ook de drie zijvlakken, die in eenig hoekpunt A zamenkomen, onderling regthoekig zijn, dan zijn deze drie zijvlakken ABC, ABD en ACD onderling regthoekige projectiën van het schuine zijvlak BCD. Volgens de bewezene stelling is dus

$$(\text{Inh. ABC})^2 + (\text{Inh. ABD})^2 + (\text{Inh. ACD})^2 = (\text{Inh. BCD})^2;$$

dat is: *in eene regthoekige driehoekige piramide, is de tweede magt van den inhoud van het schuine zijvlak gelijk aan de som van de tweede magten van de inhouden der drie overige zijvlakken.*

Deze eigenschap is, ten aanzien van de figuren in de ruimte, wat het *Theorema van PYTHAGORAS* ten aanzien van de vlakke figuren is. Zij kan ook onmiddellijk bewezen worden, waartoe men AE loodregt op BC trekt, als wanneer DE insgelijks loodregt op BC staat. Alsnu is:

$$\begin{aligned} \text{Inh. ABD} &= \frac{1}{2} AD \times AB, & \text{Inh. ACD} &= \frac{1}{2} AD \times AC, \\ \text{Inh. BCD} &= \frac{1}{2} BC \times DE, & \text{Inh. ABC} &= \frac{1}{2} BC \times AE; \end{aligned}$$

hieruit vindt men dan achtereenvolgens:

$$(Inh. ABD)^2 + (Inh. ACD)^2 = \frac{1}{4} AD^2 \times (AB^2 + AC^2) = \frac{1}{4} AD^2 \times BC^2,$$

$$(Inh. BCD)^2 - (Inh. ABC)^2 = \frac{1}{4} BC^2 \times (DE^2 - AE^2) = \frac{1}{4} BC^2 \times AD^2,$$

$$(Inh. ABD)^2 + (Inh. ACD)^2 = (Inh. BCD)^2 - (Inh. ABC)^2,$$

of $(Inh. ABC)^2 + (Inh. ABD)^2 + (Inh. ACD)^2 = (Inh. BCD)^2.$

§ 144. WERKSTUK. *Eene driehoekige piramide te projecteren, indien hare zes ribben gegeven zijn.*

Stellen wij uit de ribben van het grondvlak een driehoek $A'B'C'$ zamen (Fig. 105), en beschrijven wij op zijne zijden buitenwaarts andere driehoeken $B'C'T_1$, $C'A'T_2$, $A'B'T_3$, zoodanig dat $A'T_2 = A'T_3$, $B'T_3 = B'T_1$ en $C'T_1 = C'T_2$ de lengten hebben van de opstaande ribben, die respectievelijk in A' , B' en C' aan het grondvlak sluiten, dan hebben wij reeds het ontwikkeld oppervlak der piramide verkregen, wier opstaande zijvlakken nu, om de ribben des grondvlak, op het verlengde grondvlak zijn neergeslagen. Dit vlak nemen wij als het horizontale projectievlak aan, waarin wij voorts eene as OX naar welgevallen trekken.

Worden nu, terwijl het grondvlak $A'B'C'$ op het horizontale vlak blijft liggen, de opstaande zijvlakken in den stand gebragt waarin zij de piramide vormen, dan komen de punten T_1 , T_2 en T_3 in den top der piramide zamen. Laten wij dus loodlijnen neder: uit T_1 op $B'C'$, uit T_2 op $C'A'$, uit T_3 op $A'B'$, dan snijden die loodlijnen elkander in de horizontale projectie T' van den top; deze gevonden zijnde, beschrijven wij op $T'D$, die loodregt op $A'C'$ staat, eenen driehoek, die in T' regthoekig is en eene schuine zijde $DT = DT_2$ heeft, dan is TT' de hoogte der piramide; de verticale projectie T'' van den top wordt dus gevonden, door $T'T''$ regthoekig door OX te trekken, en $T'T'' = TT'$ te nemen. Wanneer wij dus eindelijk $A'A''$, $B'B''$ en $C'C''$ loodregt op OX trekken, het punt T' met elk der punten A' , B' en C' , en het punt T'' met elk der punten A'' , B'' en C'' vereenigen, hebben wij de projectiën $T'A'B'C'$ en $T''A''B''C''$ der piramide verkregen.

De hoek TDT' is hier de standhoek van de zijvlakken der piramide op de ribbe $A'C'$. Dit steunt, even als een gedeelte der verrijgde constructie, op gelijke gronden als wij in § 123 aanvoerden.

De geprojecteerde piramide staat nu met haar grondvlak op het horizontale vlak. Neemt men echter een willekeurig hellend vlak (E, EE'') aan, waarvan men, daar OX geheel willekeurig is getrokken, de horizontale doorgang loodregt op OX kan onder-

stellen, dan zal men volgens § 110 de nieuwe projectiën van de hoekpunten der piramide kunnen bepalen, wanneer het vlak (E, EE_{II}), om den doorgang EE , neergeslagen, als nieuw horizontaal vlak wordt aangenomen. Of ook zal men, even als in de werkstukken van § 136 en § 137, de nieuwe projectiën kunnen bepalen, die de hoekpunten der piramide verkrijgen, als haar grondvlak $A'B'C'$ door eene wenteling om EE , in het vlak (E, EE_{II}) gebragt wordt. Op beide wijzen verkrijgt men dan eene projectie der piramide in een nieuwen stand met betrekking tot het vlak, waarop zij ge-projecteerd is.

§ 145. WERKSTUK. *Eene gegevene piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, wordt schuin afgeknol door een snijdend vlak, loodregt op het verticale genomen. Men begeert de projectie en de ware gedaante der doorsnede te construeren; gelijk mede het opstaand oppervlak van de geheele en van de afgeknolte piramide te ontwikkelen.*

Laat (T', T'') als de top (Fig. 106) en $A'B'C'D'E'$ als het grondvlak der piramide gegeven zijn, dan kennen wij terstond de verticale projectiën A'', B'', C'', D'' en E'' van de hoekpunten des grondvlak. Deze met T'' , en de hoekpunten van het grondvlak zelf met T' vereenigende, verkrijgen wij onmiddellijk de projectiën van de opstaande ribben der piramide. Hiervan zijn in onze figuur alleen de verticale projectiën $T'D''$ en $T'E''$ onzichtbaar.

Laat nu (F, FF_{II}) het snijdende vlak zijn, dan worden, daar dit vlak loodregt op het verticale staat, zijne snijpunten (a', a''), (b', b''), (c', c''), (d', d'') en (e', e'') met de opstaande ribben daadlijk gevonden (zie § 83 aan het slot); de horizontale projectiën van die snijpunten vereenigende, verkrijgen wij dan de horizontale projectie $a'b'c'd'e'$ der doorsnede, wier verticale projectie de lijn $a''c''$ is. Slaan wij vervolgens die doorsnede om den doorgang FF_{II} op het verticale vlak neder, daartoe op FF_{II} loodlijnen $a''a$, $b''b$, $c''c$, $d''d$ en $e''e$ stellende, die gelijk zijn aan de afstanden van de punten a' , b' , c' , d' en e' tot de as, dan verkrijgen wij de ware gedaante $abcde$ der doorsnede.

Daar verder de werkelijke lengte van elke zijde des grondvlak gegeven is, behoeven wij nog slechts, volgens § 69, de werkelijke lengte van iedere opstaande ribbe te construeren, om, uit al die werkelijke lengten als zijden, de in Figuur 107 voor-

gestelde aaneenschakeling van driehoeken TAB, TBC, TCD, TDE en TEA te kunnen beschrijven, die de ontwikkeling van het opstaand oppervlak der piramide uitmaken. Construeren wij ten laatste de afstanden van het punt (T' , T'') tot de punten (a' , a''), (b' , b''), enz. (Fig. 106), en zetten wij deze afstanden in Fig. 107, van T af, op de lijnen TA, TB, enz. uit, dan verkrijgen wij, door vereeniging der alzo in Fig. 107 verkregene punten a , b , c , enz., het ontwikkeld opstaand oppervlak, zoowel van het afgesneden stuk, als van de afgeknotte piramide, namelijk *Tabcdea* en *abcdea* AEDCBA.

Werd de gegevene piramide gesneden door een vlak, dat niet loodregt op het verticale stond, dan zou men een standvlak, loodregt op den horizontalen doorgang van het snijdende vlak gesteld, als nieuw verticaal vlak aannemen; de piramide op dat nieuwe verticale vlak projecteren, en verder de constructie als boven verrigten.

§ 146. WERKSTUK. *Eenen cubus in verschillende standen te projecteren.*

Beschrijven wij in het horizontale vlak, op de gegevene ribbe $A'B'$ van den cubus (Fig. 108), een vierkant $A'B'C'D'$, dan is dit vierkant, dat wij als grondvlak van den cubus zullen beschouwen, tevens de horizontale projectie $E'F'G'H'$ van het bovenvlak. Wij stellen ons nu voor dien cubus te projecteren op een vlak, dat het horizontale vlak, onder een willekeurig gegeven hoek, volgens een willekeurig gegeven doorgang N,N , snijdt.

Nemen wij in het horizontale vlak eene as OX aan, die ergens in N regthoekig op den doorgang N,N , staat, en trekken wij NN , zoodanig, dat NN , gelijk aan den gegeven hoek is, dan is NN , de verticale doorgang van het bedoelde vlak. Trekken wij voorts, uit de hoekpunten van het vierkant $A'B'C'D'$, lijnen regthoekig door OX , en zetten wij op die lijnen de ribbe van den cubus boven OX uit, dan verkrijgen wij onmiddellijk zijne verticale projectie $A''B''C''D''E''F''G''H''$.

Alsnu kunnen wij uit de hoekpunten van den cubus loodlijnen op het vlak (N,N ,) laten vallen, en de plaats bepalen waar de voetpunten dier loodlijnen komen te liggen, als het vlak (N,N ,) om zijn horizontalen doorgang op het horizontale vlak neergeslagen, en als nieuw horizontaal vlak aangenomen wordt. Opat de cubus boven dat nieuwe projectievlak blijve, slaan wij het

achterover neer. Volgens § 91 en § 110 laten wij te dien einde $A''a$, $E''e$, $B''b$, $F''f$, enz. loodregt op $NN_{,,}$ neder, trekken voorts uit A' , B' , enz. lijnen $A'A$, $B'B$, enz. regthoekig door $NN_{,,}$, en maken op die lijnen: $AA_1' = Na$, $AE_1' = Ne$, $BB_1' = Nb$, $BF_1' = Nf$, enz.; dan zijn de punten A_1' , E_1' , B_1' , F_1' , enz. de projectiën van de hoekpunten des ligchaams op het neergeslagen vlak ($N, NN_{,,}$) zoodat wij slechts deze punten behoorlijk te vereenigen hebben, om de nieuwe horizontale projectie $A_1'B_1'C_1'D_1'E_1'F_1'G_1'H_1'$ van den cubus te bekomen, waarin dan de projectiën der evenwijdige ribben, volgens § 76, wederom evenwijdig moeten loopen; hetgeen tot eene proef, op de naauwkeurige uitvoering der constructie, kan strekken. Daar hier de loodlijn $G''g$ korter dan de overige loodlijnen is, ligt het hoekpunt (G' , G'') het dichtst bij het vlak ($N, NN_{,,}$); derhalve zullen dan ook de in G_1' zamenkomende projectiën der ribben onzichtbaar zijn.

Nemen wij verder in het nieuwe horizontale vlak eene willekeurige as O_1X_1 aan, en zetten wij op lijnen, uit A_1' , B_1' , enz. regthoekig door die nieuwe as getrokken, stukken boven die as uit, die gelijk zijn aan de loodlijnen $A''a$, $B''b$, enz., dan verkrijgen wij desgelijks de nieuwe verticale projectie $A_1''B_1''C_1''D_1''E_1''F_1''G_1''H_1''$ van den cubus. Daar hier het punt (D_1' , D_1'') het dichtst bij het nieuwe verticale vlak ligt, zullen blijkbaar de in D_1'' zamenkomende projectiën der ribben onzichtbaar wezen.

In onze figuur komen dan nu vier projectiën van den cubus voor, en voor ieder van deze, heeft de cubus eenen verschillenden stand ten opzichte van het projectievlak.

Door de willekeurige rigting die men aan N, N , en de willekeurige grootte die men aan $NN_{,,}$ geven kan, kan men aan het nieuwe projectievlak ($N, NN_{,,}$) een bepaalden stand met betrekking tot den cubus, dat is, aan den cubus een bepaalden stand ten opzichte van het nieuwe projectievlak, geven.

§ 147. Indien N, N , en OX evenwijdig met de diagonalen van het vierkant $A'B'C'D'$ genomen waren, zouden de projectiën $B''F''$ en $D''H''$ elkander bedekken; en indien dan verder $NN_{,,}$ regthoekig op $A''G''$ genomen was, zou de diagonaal ($A'G'$, $A''G''$) loodregt op vlak ($N, NN_{,,}$) zijn (§ 102). In dit geval zullen blijkbaar de punten A_1' en G_1' in elkander vallen, terwijl de in G_1' zamenkomende projectiën van ribben, in de verlengden zullen vallen van die welke in A_1' zamenkomen; voorts zullen dan ook

$G_1'C_1'$, $G_1'F_1'$ en $G_1'H_1'$ even lang worden, omdat zij projectiën zijn van gelijke ribben, die met den genoemden diagonaal, en dus ook met het projectievlak, gelijke hoeken maken. Hieruit volgt dus, dat de projectie van een cubus, wiens diagonaal loodrecht op het projectievlak is, een regelmatigen zeshoek zal vertoonen, uit wiens middelpunt stralen naar de hoekpunten getrokken zijn.

Is zulk eene projectie, zooals die in Fig. 109 is voorgesteld, gegeven, dan weet men dat C, F en H projectiën zijn van punten, die even hoog boven het projectievlak liggen; dat dus eene lijn, die twee van deze punten vereenigt, bijv. FH, niet alleen de projectie maar ook de wezenlijke grootte van den diagonaal eens zijvlak is. Beschrijft men dus een vierkant, dat FH tot diagonaal heeft, zoo heeft men het zijvlak, en dus ook de ribbe van den geprojecteerden cubus, in zijne ware gedaante en grootte teruggevonden.

De werkelijke lengte van de ribbe van den cubus l noemende, hebben wij $FH = l\sqrt{2}$, en de lengte van de projectie der ribbe door l' aanduidende, hebben wij ook, daar FH de zijde van een regelmatigen driehoek CFH is, $FH = l'\sqrt{3}$. Alzoo is $l\sqrt{2} = l'\sqrt{3}$, waaruit volgt: $l' = \frac{1}{3}l\sqrt{6}$ en $l = \frac{1}{2}l'\sqrt{6}$; de ribbe en hare projectie kunnen dus even gemakkelijk uit elkander berekend als geconstrueerd worden.

§ 148. WERKSTUK. *Eene afgeknotte driehoekige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, en waarvan de horizontale projectie en de hoogte gegeven zijn, wordt om eene ribbe van het grondvlak omgewenteld, zoodat het aan die ribbe sluitende opstaande zijvlak op het horizontale vlak komt te liggen. Men wil hare horizontale projectie in dien nieuwen stand vinden.*

Daar hier geene schuin afgeknotte piramide bedoeld wordt, zal, als $A'B'C'$ haar grondvlak is (Fig. 110), een driehoek $D'E'F'$, wiens zijden evenwijdig met die van $A'B'C'$ loopen, de horizontale projectie van het bovenzvlak kunnen zijn, mits slechts de verlengde projectiën der opstaande ribben $A'D'$, $B'E'$ en $C'F'$ elkander in één punt snijden. Dit snijpunt, dat dan de projectie van den top der voltooiden piramide is, valt in onze figuur buiten het grondvlak, ten gevolge waarvan de ribbe $B'C'$ onzichtbaar is.

Laat nu $A'B'$ de ribbe zijn, om welke het ligchaam bcwogen

wordt, zoo nemen wij eene as OX loodregt op die ribbe aan, en bepalen, door $dD'' = fF''$ gelijk aan de gegevene hoogte te maken, de verticale projectie $A''C''F''D''$ der afgeknotte piramide. Nemen wij dus verder op de as $A''d'' = A''D''$, en beschrijven wij op $A''d''$ een' vierhoek $A''d''f''c''$, die gelijk en gelijkvormig met $A''D''F''C''$ is, dan is $A''d''f''c''$ de verticale projectie van het ligchaam in zijn nieuwen stand. Maar bij de beweging van het ligchaam, bewegen de projectiën C' , D' , E' en F' zich volgens loodlijnen op $A'B'$ getrokken, en door de snijding van deze loodlijnen, met die welke uit c'' , d'' en f'' op de as kunnen getrokken worden, vinden wij dus onmiddellijk ook de horizontale projectiën c' , d' , e' en f' van de hoekpunten der afgeknotte piramide in haren nieuwen stand, terwijl de punten A' en B' op hunne plaats gebleven zijn.

De gevondene punten vereenigende, verkrijgen wij alzoo de begeerde projectie $A'B'c'd'e'f'$, waarin de ribbe- $d'e'$ onzichtbaar is.

Bij de voorgestelde beweging hebben al de punten van het ligchaam eenen hoek gelijk $D'A''d''$ doorloopen; wil men de beweging minder ver voortzetten, dan zal men ook slechts de figuur $A''d''f''c''$ in zulk eenen stand behoeven te plaatsen, dat $A''d''$ met $A''D''$ een kleineren hoek maakt; om verder even als boven de nieuwe horizontale projectie van het ligchaam te vinden. Wanneer men de figuur $A''d''f''c''$ zoo plaatst, dat $c''f''$ evenwijdig met OX wordt, zal men de projectie der afgeknotte piramide verkrijgen, als zij in dien stand is gekomen dat de ribbe $(C'F', C''F'')$ evenwijdig met het projectievlak loopt.

OVER DEN BOL,

EN OPLOSSING VAN DAARTOE BEHOORENDE WERKSTUKKEN.

§ 149. Hetgeen wij over het projecteren van veelvlaklige lichamen aangevoerd hebben, wijst nog niet aan, hoe men lichamen, die door gebogen vlakken begrensd worden (zie § 37), door middel van constructiefiguren voorstellen kan, en in al hunne bijzonderheden kan leeren kennen. Wij zullen thans tot de be-

schouwing van den bol, als het eenvoudigste ligchaam met gebogen oppervlak, overgaan.

Een bol is bepaald, zoodra men de plaats van zijn middelpunt en de grootte van zijn straal kent. Om dus eenen bol door middel eener constructiefiguur voor te stellen, komen vooreerst de projectiën van zijn middelpunt (M' , M'') in aanmerking (Fig. 111). Brengt men door dit middelpunt vlakken, evenwijdig met de projectievlakken, dan hebben de groote cirkels, volgens welke deze vlakken den bol snijden (*Meetk.* § 388 en 389), op de daarmede evenwijdige projectievlakken, volgens § 20 gelijke cirkels tot projectiën; deze projectiën kunnen dus onmiddellijk uit M' en M'' met den straal des bols beschreven worden; en daar blijkbaar de geheele bol binnen de projecterende cilindervlakken (zie § 19) der genoemde groote cirkels ligt, zullen geene punten van den bol hunne projectiën buiten de uit M' en M'' beschrevene cirkels kunnen hebben. Daarom noemt men die cirkels dan almede *de projectiën van den bol* (*).

De bijzondere standen van het middelpunt geven blijkbaar aanleiding tot overeenkomstige bijzondere standen van de projectiën des bols. Ligt bijv. het middelpunt in het horizontale vlak, dan ligt slechts de helft van den bol boven dat vlak, en dus ook slechts de helft van zijne verticale projectie boven de as. Ligt het middelpunt in de as van projectie, dan zullen de horizontale en verticale projectiën van den bol elkander bedekken. Wanneer de bol op het horizontale vlak rust, zal ook zijne verticale projectie op de as rusten. Enz.

Voorts is het klaar, hoe men, uit de horizontale en verticale projectiën eens bols, dadelijk zijne projectie op een derde projectievlak kan construeren.

(*) Deze benaming is weder niet volkomen juist. Wel kan men de cirkelvormige projectiën, van de groote cirkels die evenwijdig met de projectievlakken zijn, als de projectiën van een ligchaam aanzien; maar zoo dan elk punt, dat zijne projectiën binnen de projectiën van het ligchaam heeft, ondersteld wordt ook een punt van het ligchaam zelf te moeten zijn, is dit ligchaam geen bol, maar het gemeenschappelijk deel van de twee cilinders, die door de projecterende cilindervlakken der genoemde groote cirkels ingesloten worden. En zonder de genoemde onderstelling, verkrijgt men dezelfde projectiën, voor elk ligchaam dat men overhoudt, als men, zonder deze groote cirkels te schenden, willekeurige stukken van het genoemde cilinderdeel afsnijdt.

§ 150. WERKSTUK. *De doorsnede van een bol met een plat vlak te construeren.*

Deze doorsnede is in het algemeen een kleine cirkel, wiens middelpunt het voetpunt is van de loodlijn, uit het middelpunt des bols op het snijdende vlak neergelaten (*Meetk.* § 388).

Om nu uit het middelpunt (M' , M'') van den gegeven bol (Fig. 111) eene loodlijn op het gegeven snijdende vlak ($A, AA_{,,}$) neer te laten, volgen wij de constructie van § 109, en brengen het daartoe vereischte standvlak $X_1aa_{,,}$ gemakshalve door het middelpunt van den bol, dan vinden wij dat MP die loodlijn en P haar voetpunt is; het punt P is dus vooreerst het middelpunt van den te vinden kleinen cirkel. Maar de straal van dien cirkel en de loodlijn MP zijn de regthoekszijden van een driehoek die den straal des bols tot schuine zijde heeft (*Meetk.* § 388); beschrijven wij dus uit M met den straal des bols eenen cirkel, die $aa_{,,}$ in C en D snijdt, dan is $PC = PD$ de straal van den te vinden kleinen cirkel. Bepalen wij dus verder het punt P_1 , waar het punt P nederkomt als het vlak ($A, AA_{,,}$) om zijn horizontalen doorgang wordt neergeslagen, en beschrijven wij uit P_1 met PC als straal eenen cirkel, dan is deze de gevraagde doorsnede in het neergeslagen vlak ($A, AA_{,,}$). Men zal dus, des verkiezende, de elliptische projectiën dier doorsnede, volgens § 139, kunnen construeren. Door loodlijnen uit P , C en D op αX_1 neer te laten, vindt men oogenblikkelijk het middelpunt P' en de kleine as $C'D'$ van de horizontale projectie der doorsnede.

Stelt men zich eenen cirkel voor, die volgens CD als middellijn loodregt op het vlak $X_1aa_{,,}$ staat, en die dezen stand met betrekking tot dat vlak blijft behouden, terwijl het vlak $X_1aa_{,,}$ zelf om αX_1 wordt omgewenteld, dan zal deze cirkel, als doorsnede van den bol met het vlak ($A, AA_{,,}$), op zijne ware plaats gekomen zijn, zoodra als het vlak $X_1aa_{,,}$ loodregt op het horizontale vlak gekomen is.

Ging het gegeven vlak ($A, AA_{,,}$) door het middelpunt (M' , M'') des bols, dan zouden de punten M en P een en hetzelfde punt van $aa_{,,}$ worden; zoodat dan CD eene middellijn — en de uit P_1 beschreven cirkel een groote cirkel — des bols zou wezen.

Mogt de cirkel, uit M beschreven, de lijn $aa_{,,}$ niet in twee punten snijden, dan zou ook het vlak ($A, AA_{,,}$) den gegeven bol niet snijden. Mogt genoemde cirkel de lijn $aa_{,,}$ in één punt

raken, dan zou in dat punt ook de bol door het vlak ($A, AA_{,,}$) geraakt worden.

Uit de constructie blijkt terstond, dat een schuin geplaatst vlak zeer wel eenen bol kan snijden, zonder dat de projectiën van den bol door de doorgangen van het vlak gesneden worden.

§ 151. Voor bijzondere standen van het vlak, ondergaat de oplossing van het voorgaande werkstuk geene andere wijziging dan die, welke uit het neerlaten der loodlijn volgens § 108 voortvloeit.

Is bijv., zooals in Fig. 79, de horizontale doorgang van het gegeven vlak ($A, AA_{,,}$) loodregt op de as OX ; indien dan (P', P'') het middelpunt van den bol is, is (S', S'') het middelpunt van zijne doorsnede met het vlak; deze doorsnede heeft dan tot verticale projectie de koorde, die als deel van den doorgang $AA_{,,}$ binnen den cirkel valt, uit P'' met den straal des bols beschreven; deze koorde zelf is de lengte van de middellijn der doorsnede, en de projectie van die koorde op de as OX wijst de lengte van de kleine as der elliptische horizontale projectie aan.

Zijn, zooals in Fig. 76, de doorgangen van het gegeven vlak ($C, C_{,,}$, $C_{,,}C_{,,}$) evenwijdig met de as OX ; indien dan (B', B'') het middelpunt van den bol is, is (Q', Q'') het middelpunt der begeerde doorsnede. Een cirkel, uit B''' met den straal des bols beschreven, is nu de derde projectie van den bol; de koorde, die door dezen cirkel uit den doorgang $C_{,,}C_{,,}$ gesneden wordt, is de lengte van de middellijn, — en de projectiën dier koorde op OY en OZ zijn de lengten van de kleine assen der elliptische projectiën — van den te vinden kleinen cirkel.

Zal een vlak ($A, A_{,}$), dat evenwijdig met het verticale is (Fig. 112), den bol die (M', M'') tot middelpunt heeft snijden, zoo moet een deel CD van den doorgang $A, A_{,}$ binnen de projectie van den bol vallen. Trekken wij dan $M'P'$ loodregt op CD , zoo is $M'P'$ de werkelijke lengte en (P', M'') het voetpunt van de loodlijn ($M'P', M''$), die uit het punt (M', M'') op het vlak ($A, A_{,}$) valt; derhalve is (P', M'') het middelpunt en CD de horizontale projectie van de doorsnede, wier straal in grootte door $P'C = P'D$ wordt voorgesteld; en daar zich deze doorsnede volgens § 20 in hare ware gedaante en grootte op het verticale vlak projecteert, zal een cirkel, uit M'' met $P'C = P'D$ beschreven, hare verticale projectie zijn. Blijkbaar is deze verticale projectie gelijktijdig die van een

tweeden kleinen cirkel, volgens welken de bol gesneden wordt door een vlak (a, a_1), dat mede evenwijdig met het verticale vlak is en, aan de andere zijde van het middelpunt des bols, op denzelfden afstand als het vlak (A, A_1), van dat middelpunt staat. Was dus hier de verticale projectie der doorsnede gegeven, dan zou men, door daaraan raaklijnen loodregt door de as OX te trekken, vinden dat CD of cd de horizontale projectie was.

Evenzoo zou (Fig. 113) een cirkel, uit M' binnen de horizontale projectie van den bol beschreven, de horizontale projectie en de ware grootte zijn van de kleine cirkels, volgens welke de bol gesneden wordt door de horizontale vlakken (B_1, B_1) en (b_1, b_1), wier verticale doorgangen vallen langs koorden EF en ef , die in de verticale projectie van den bol evenwijdig met de as OX , ter lengte van de middellijn van den kleinen cirkel, kunnen getrokken worden.

§ 152. WERKSTUK. *De snijpunten van eene lijn met het oppervlak eens bols te vinden.*

Wanneer eene lijn eenen bol snijdt, zullen ook de projectiën van de lijn de gelijknamige projectiën van den bol moeten snijden, hoezeer men niet zeker is, dat omgekeerd uit de snijding der projectiën de snijding in de ruimte volgt.

Indien dus ($A'B', A''B''$) de gegevene lijn (Fig. 114) en (M', M'') het middelpunt van den gegeven bol is, wordt die bol, door het horizontaal-projecterend vlak (F, FF_1) der lijn, gesneden volgens een cirkel, van wiens middelpunt de horizontale projectie P' , en van wiens straal de lengte $P'C = P'D$, volgens de voorgaande § gevonden wordt.

Slaan wij nu het vlak (F, FF_1), waarin de lijn ($A'B', A''B''$) en de genoemde cirkel gelegen zijn, om FF_1 op het horizontale vlak neder, dan vinden wij vooreerst AB voor de neergeslagene lijn; en, om den neergeslagen cirkel te kunnen construeren, behoeven wij slechts op te merken, dat zijn middelpunt even hoog als dat van den bol boven het horizontale vlak ligt. Stellen wij dus $P'P = mM''$ loodregt op $A'B'$, dan is een cirkel, uit P met $P'C = P'D$ als straal beschreven, de neergeslagen cirkel, en zijne snijpunten Q en R , met AB , zijn de begeerde snijpunten in het neergeslagen vlak. Van deze punten vinden wij de projectiën, door eerst loodlijnen QQ' en RR' op $A'B'$ neer te laten, en vervolgens uit Q' en R' lijnen regthoekig door de as te trekken, tot dat zij $A''B''$ in Q'' en R'' ontmoeten. Derhalve zijn dan (Q', Q'')

en (R' , R'') de snijpunten van de lijn ($A'B'$, $A''B''$) met het oppervlak des bols.

Mogt de cirkel uit P beschreven de lijn AB niet snijden, dan sneed ook de lijn den bol niet. Indien die cirkel de lijn AB raakte, zou in dat raakpunt ook de bol door de lijn geraakt worden.

De aangewezen constructie blijft voor alle bijzondere standen der lijn toepasselijk, mits slechts de lijn een projecterend vlak heeft, en dus niet loodrecht op het projectievlak is. Hoe in dat geval de constructie kan geschieden, zal in het volgende werkstuk blijken.

§ 153. WERKSTUK. *Indien de horizontale projectie van een punt van het oppervlak eens bols gegeven is, begeert men de verticale projectie van dat punt te vinden.*

De projectie van een punt des oppervlaks mag (zie § 149) niet buiten de gelijknamige projectie des bols genomen worden. Laat dus de gegevene projectie P' genomen zijn binnen de horizontale projectie van den bol, die (M' , M'') tot middelpunt heeft (Fig. 115 en 116), zoo zijn er twee punten op zijn oppervlak (een op de bovenste en een op de onderste helft), die het gegevene punt P' tot horizontale projectie hebben, en wel die punten, waar het oppervlak gesneden wordt door eene lijn, in P' loodrecht op het horizontale vlak gesteld. De verticale projectiën van die punten, waarvan men al dadelijk weet dat zij liggen moeten in het verlengde van de lijn $P'p$, uit P' loodrecht op de as OX getrokken, kan men op verschillende wijzen construeren; hiervan zullen wij er een paar aanwijzen.

Brengen wij *ten eerste* (Fig. 115) door P' een vlak (A,A_1) evenwijdig met het verticale, dan kunnen wij, volgens § 151 en Fig. 112, uit M'' met de helft van de koorde CD de verticale projectie beschrijven van den kleinen cirkel, volgens welken de bol door het vlak (A,A_1) gesneden wordt. De punten P'' en p'' , waar de beschreven cirkel door de verlengde $P'p$ gesneden wordt, zijn dus de begeerde verticale projectiën.

Beschrijven wij *ten tweede* (Fig. 116) uit M' met $M'P'$ eenen cirkel, dan is deze de horizontale projectie van twee kleine cirkels van den bol, die evenwijdig met het horizontale vlak zijn, en waarvan, volgens § 151 en Fig. 113, de verticale projectiën EF en ef onmiddellijk gevonden worden. De punten P'' en p'' , waar EF en ef door de verlengde $P'p$ gesneden worden, zijn dus almede de begeerde verticale projectiën.

De laatstaangewezen constructie is voor bekorting vatbaar. Als men namelijk door P' en loodregt op $M'P'$ de lijn P_1p_1 trekt, is $P_1p_1 = Ef = P''p''$, want P_1p_1 en Ef zijn koorden, die in gelijke cirkels op gelijke afstanden van hunne middelpunten M' en M'' staan; voorts ligt het punt M'' juist midden tusschen EF en ef . Na dus door M'' eene lijn getrokken te hebben, die evenwijdig met de as OX is en de verlengde $P'p$ ergens in n'' snijdt, behoeven wij slechts $P'P_1$ loodregt op $M'P'$ te trekken, en $n''P'' = n''p'' = P'P_1$ te maken, om de punten P'' en p'' te bekomen.

Stelt men zich P_1 en p_1 voor als punten op den omtrek van den horizontalen grooten cirkel, en verbeeldt men zich dan verder, dat deze cirkel om de lijn $(M'P', M''n'')$ wentelt, tot dat hij in den verticalen stand gekomen is; zoo zullen de punten P_1 en p_1 , die gedurende deze wenteling op het oppervlak van den bol blijven, op de afstanden $P'P_1$ en $P'p_1$ verticaal boven en beneden het punt (P', n'') gekomen zijn. Uit deze beschouwing kan dus ook onmiddellijk de aangewezen kortere constructie afgeleid worden.

De horizontale projectie van het te bepalen punt kan ook in den omtrek of in het middelpunt van de horizontale projectie des bols gegeven zijn. In het eerste geval behoort dat punt tot den horizontalen grooten cirkel, en het ligt dus op gelijke hoogte als het middelpunt van den bol, zoodat men (Fig. 115) uit zijne horizontale projectie Q' onmiddellijk zijne verticale projectie Q'' vindt; hier zal de lijn, die in Q' loodregt op het horizontale vlak staat, den bol in (Q', Q'') raken. In het tweede geval, als M' de gegebene horizontale projectie is, behoort het punt tot den grooten cirkel die evenwijdig met het verticale vlak is, zoodat zijne verticale projectie op den omtrek van de verticale projectie des bols, dus in H'' of h'' moet liggen; hier is dan (M', H'') het hoogste, (M', h'') het laagste punt van den bol.

Het zal wel geene aanwijzing behoeven, hoe men desgelijks de horizontale projectiën van de punten des oppervlaks kan vinden, die eene gegebene verticale projectie hebben.

§ 154. WERKSTUK. *De doorsnede van twee bollen te construeren.*

Reeds in de gewone Meetkunst is aangetoond (*Meetk.* § 408, *Gev.* 2^o) dat de gemeene doorsnede van twee bollen een cirkel is, wiens middelpunt gelegen is in –, en wiens vlak loodregt staat op – de lijn, die de middelpunten der bollen vereenigt. Het komt er dus op aan het middelpunt, den straal en het vlak van dien cirkel te vinden.

Te dien einde slaan wij het horizontaal-projecterend vlak van de lijn, die de middelpunten (M' , M'') en (N' , N'') der gegeven bollen vereenigt (Fig. 117), op het horizontale vlak neêr, en beschrijven, uit de uiteinden M en N der neergeslagene lijn, met de stralen der bollen, cirkels, dan zijn dit de in het neergeslagen vlak liggende groote cirkels, volgens welke dat vlak de bollen snijdt. Daar nu deze cirkels, bij eene wenteling om de lijn MN , de bollen zelve voortbrengen, zullen hunne snijpunten P en Q , bij die wenteling, den omtrek van de doorsnede der bollen doorloopen. Trekken wij dus de lijn PQ , die MN ergens in S regthoekig snijden zal, zoo is S het middelpunt, en $SP = SQ$ de straal van den begeerden cirkel, wiens vlak volgens zijne middellijn PQ loodregt op het neergeslagen vlak $M'MNN'$ staat, en dus op dat vlak de verlengde PQ tot doorgang heeft. Het ontmoetingspunt A , van PQ met $M'N'$, is dus een punt van den horizontalen doorgang van het vlak des begeerden cirkels, van welk vlak ($A, AA_{,,}$) overigens, wegens zijn loodregten stand op de lijn ($M'N'$, $M''N''$), de doorgangen onmiddellijk kunnen getrokken worden. Trekken wij verder SS' loodregt op $M'N'$, en $S'S''$ regthoekig door de as OX , zoo is (S' , S'') het geprojecteerde middelpunt van den te construeren cirkel, dien wij ook in zijn om $AA_{,,}$ neergeslagen vlak kunnen verkrijgen, door $A, S_1 = A, S$ te nemen, en dan dien cirkel uit S_1 met SP als straal te beschrijven.

Verder kan men nu, des verkiezende, volgens § 139 de elliptische projectiën construeren, die dezen cirkel verkrijgt als het om $AA_{,,}$ neergeslagen vlak weder in den stand ($A, AA_{,,}$) gebragt wordt; de verkregene ellipsen zullen dan de projectiën van de gemeene doorsnede der twee bollen zijn. Loodlijnen uit P en Q op $M'N'$ neergelaten, zouden onmiddellijk de kleine as der horizontale projectie bepalen.

Mogten de uit M en N beschrevene cirkels elkander niet snijden, dan snijden ook de gegeven bollen elkander niet; raken deze cirkels elkander, dan heeft er in hun raakpunt ook slechts raking der bollen plaats.

§ 155. Door de laatste opmerking leert men het werkstuk oplossen, om uit een gegeven punt als middelpunt eenen bol te beschrijven, die een gegeven bol raakt.

Is namelijk (N' , N'') het gegeven punt, en (M' , M'') het middelpunt van den gegeven bol (Fig. 117), zoo behoeft men slechts,

even als in het voorgaande werkstuk, de lijn MN te construeren, en uit M den grooten cirkel des gegeven bols te beschrijven. De punten R en r , waar deze cirkel de lijn MN of haar verlengde snijdt, doen dan de stralen NR en Nr van twee bollen kennen, die aan de vraag voldoen zullen; en wier projectiën dus onmiddellijk, met deze stralen, uit N' en N'' kunnen beschreven worden

§ 156. WERKSTUK. *De doorsnede van drie bollen te construeren.*

Door de doorsnede van drie bollen verstaat men de beide punten, die de oppervlakken dezer bollen gemeen hebben.

De drie vlakken, waarin de doorsneden der bollen twee aan twee gelegen zijn, moeten noodwendig de bedoelde punten bevatten, en zullen elkander dus volgens een en dezelfde rechte lijn snijden; terwijl weder deze lijn het oppervlak van elk der drie bollen in die punten snijden zal. Derhalve construeer men eerst, volgens § 154, de doorgangen van twee der genoemde vlakken; bepale daarna, volgens § 81, de projectiën van de lijn, volgens welke die twee vlakken elkander snijden; en construeer eindelijk, volgens § 152, de punten, waarin deze lijn het oppervlak van een der bollen snijdt; dan zullen de gevondene snijpunten de begeerde doorsnede der drie bollen zijn. De uitvoering der constructie, die slechts eene werktuigelijke toepassing der aangehaalde werkstukken vordert, laten wij aan den lezer over.

Voor het bijzondere geval, dat de middelpunten der bollen in het horizontale vlak liggen, is ons werkstuk met andere woorden hetzelfde, dat wij reeds in § 144 behandelden. Laten bijv. in Fig. 105 de punten (A' , A''), (B' , B'') en (C' , C'') als middelpunten, en de lijnen $A'T_2 = A'T_3$, $B'T_3 = B'T_1$ en $C'T_1 = C'T_2$ als stralen der bollen gegeven zijn; zoo zullen de vlakken, van de doorsneden der bollen twee aan twee genomen, vooreerst loodregt op het horizontale vlak staan, en ten andere de lijnen $T'T_1$, $T'T_2$ en $T'T_3$ tot horizontale doorgangen hebben. Deze drie vlakken snijden elkander dus volgens eene en dezelfde lijn, die in T' loodregt op het horizontale vlak staat; en deze lijn snijdt de oppervlakken der bollen in twee punten, waarvan het eene ter hoogte $T'T$ boven-, het andere ter gelijke diepte beneden – het horizontale vlak ligt. Door dus $t't'' = t'T'' = T'T$ te nemen, vindt men de punten (T' , T'') en (T' , t'') voor de doorsnede der drie bollen.

§ 157. *WERKSTUK. Den bol te construeren, wiens oppervlak door vier gegeven punten gaat.*

De meetkunstige plaats van alle punten, die zich op twee onderling gelijke afstanden van de uiteinden eener regte lijn bevinden, is een plat vlak, dat regthoekig door het midden van die lijn gaat. Hieruit volgt, dat het middelpunt van een bol altijd gelegen is in het vlak, dat door het midden van eenige koorde loodrecht op die koorde gebragt wordt. Deze eigenschap leidt nu onmiddellijk tot de oplossing van ons werkstuk.

Vereenigt men namelijk een van de gegeven punten met elk der drie anderen, dan verkrijgt men drie koorden van den bol; deelt men dus deze koorden middendoor (§ 72), en brengt men op elk van haar een loodrecht vlak door het deelpunt (§ 105), dan heeft men drie vlakken, die door het middelpunt van den bol gaan; construeert men derhalve het snijpunt dezer drie vlakken (§ 84), zoo is dit het middelpunt van den begeerden bol, wiens straal dan verder gevonden wordt, door den afstand te construeren van het gevondene middelpunt tot een der gegeven punten (§ 69). De uitvoering dezer algemeene constructie vereischt slechts de werktuigelijke toepassing der aangehaalde werkstukken, en wij laten haar dus aan den lezer over. Evenwel willen wij het volgende opmerken:

Gebeurt het dat de drie gebezigde vlakken elkander volgens eene en dezelfde lijn snijden, zoo kan men een willekeurig punt van die lijn als middelpunt van den begeerden bol aannemen, die in dat geval onbepaald is. Dit zal plaats hebben als de gegeven punten in een plat vlak op den omtrek van een cirkel liggen; van alle bollen die elkander volgens dezen cirkel snijden, zullen dan de oppervlakken door de gegeven punten gaan.

Gebeurt het dat de gebezigde vlakken evenwijdig zijn, of elkander volgens evenwijdige lijnen snijden, zooals het geval zal zijn, indien de gegeven punten in eene regte lijn liggen, of zich in een plat vlak bevinden zonder op een cirkelomtrek gelegen te zijn, dan is de begeerde bol onbestaanbaar.

§ 158. De oplossing van het voorgaande werkstuk wordt zeer eenvoudig, indien drie van de gegeven punten in het horizontale projectievlak liggen. Laten bijv. A, B en C deze drie punten, en (D', D'') het vierde gegeven punt zijn (Fig. 118); beschrijven wij dan vooreerst een' cirkel die door A, B en C gaat, zoo is

blijkbaar deze cirkel de doorsnede van den bol met het horizontale vlak, en de lijn (M', mm'') , die in het middelpunt van dezen cirkel loodregt op zijn vlak staat, gaat dus door het middelpunt van den bol (*Meetk.* § 389, *Geom.* 2^o). Dit middelpunt is bijgevolg het snijpunt van de lijn (M', mm'') met een vlak, dat regthoekig gaat door het midden van de koorde, die een der drie reeds gebezigde punten, bijv. het punt C, met het vierde punt (D', D'') vereenigt.

Ten einde dit vlak en zijn snijpunt met de lijn (M', mm'') op de eenvoudigste wijze te construeren, nemen wij het horizontaal-projecterend vlak der genoemde koorde als nieuw verticaal vlak, en dus eene lijn O_1X_1 , door C en D' getrokken, als nieuwe as aan. Na dan $D'D = dD''$ loodregt op O_1X_1 gesteld te hebben, verkrijgen wij de koorde CD zelf in het nieuwe verticale vlak, terwijl wij slechts uit M' eene lijn regthoekig door O_1X_1 behoeven te trekken, om de nieuwe verticale projectie m_1m_1'' van de lijn (M', mm'') te bekomen. Trekken wij nu, door het midden E van CD en regthoekig op CD, eene lijn E_1E_1'' , die m_1m_1'' ergens in M_1'' snijden zal, dan is M_1'' de nieuwe verticale projectie van het middelpunt des bols; want een vlak, door E_1E_1'' loodregt op het nieuwe verticale vlak gebragt, staat in het midden E van de koorde CD loodregt op die koorde, en snijdt de lijn (M', m_1m_1'') in het punt (M', M_1'') . Wij behoeven dus eindelijk slechts $mM'' = m_1M_1''$ te nemen, om ook de projectie M'' van het middelpunt (M', M'') van den gevraagden bol, op het oorspronkelijke verticale vlak, te vinden.

Trekken wij voorts in den cirkel ABC eenen straal $M'P'$ evenwijdig met OX, laten wij $P'P''$ loodregt op OX vallen, en trekken wij $M''P''$, dan is blijkbaar $(M'P', M''P'')$ een straal van den bol, en wel een straal die, evenwijdig met het verticale vlak loopende, zich op dat vlak in zijne werkelijke lengte projecteert. Cirkels, uit M' en M'' met stralen gelijk aan $M'P'$ beschreven, zullen dus de projectiën van den gevraagden bol zijn.

Tot het hier beschouwde bijzondere geval, zal men het algemeene geval altijd kunnen terugbrengen. Hiertoe behoeft men slechts door drie van de gegevene punten een vlak te brengen (§ 100), en dit vlak als nieuw horizontaal vlak aan te nemen (§ 110).

§ 159. Laat eene lijn AB een grooten cirkel eens bols in R raken (Fig. 119 en 120), en laat in het vlak van dezen cirkel door zijn middelpunt M eene lijn NN getrokken zijn, die òf zooals

in Fig. 119 evenwijdig met AB is, of zooals in Fig. 120 AB in een punt P snijdt. Indien men dan deze vlakke figuur om de lijn NN wentelt, en dus de cirkel den bol beschrijft, blijft de lijn AB steeds den bol raken; en het raakpunt R doorloopt eenen cirkel, die de loodlijn uit R op NN vallende tot straal, het voetpunt dier loodlijn tot middelpunt heeft, en wiens vlak in dat middelpunt loodrecht op de lijn NN staat. Deze cirkel is in Fig. 119 een groote, in Fig. 120 een kleine cirkel van den bol.

In Fig. 119, waar bij de genoemde wenteling de lijn AB steeds evenwijdig met NN blijft, terwijl haar punt R eenen grooten cirkel doorloopt, wordt dus door de lijn AB een regt cirkelvormig cilindervlak beschreven (*Meetk.* § 407), dat NN tot as heeft en den bol volgens dezen cirkel raakt. In Fig. 120, waar de lijn AB steeds door het punt P blijft gaan, terwijl haar punt R een kleinen cirkel met mR als straal doorloopt, beschrijft de lijn AB evenzoo een regt cirkelvormig kegelvlak, dat mede NN tot as en P tot top heeft, en dat den bol volgens den genoemden kleinen cirkel raakt. Daar zulke cilinder- of kegelvlakken den bol omvatten of *omhullen*, worden zij *omhullingscilinders*, *omhullingskegels* genoemd; op het oppervlak van den bol hebben de eerste een grooten, de laatste een kleinen cirkel tot *aanrakingscirkel*.

Men zal zich blijkbaar, om elken bol, eenen omhullingscilinder met eene willekeurig gerigte as, of ook eenen omhullingskegel met eenen willekeurig gekozen top, kunnen voorstellen.

Wanneer men aan de beide groote cirkels (Fig. 121 en 122), volgens welke een vlak twee bollen snijdt, eene gemeenschappelijke uit- of inwendige raaklijn trekt (*Meetk.* § 137), zal deze raaklijn de lijn, die door de middelpunten M en N gaat, in eenig punt P snijden; alleen wanneer de bollen even groot waren, zooals in Fig. 121, zou de uitwendige raaklijn evenwijdig met de lijn der middelpunten loopen. Laat men wederom deze vlakke figuur om de lijn der middelpunten wentelen, zoo beschrijft elke gemeenschappelijke raaklijn ook een gemeenschappelijken omhullingskegel of cilinder om de beide bollen; wanneer echter de bollen elkander raken of snijden, zijn er geene inwendige raaklijnen (*Meetk.* § 137, *Opm.*), en vervallen dan ook de omhullingskegels die deze zouden beschrijven.

Twee gelijke bollen hebben dus altijd een gemeenschappelijken

omhullingscilinder; en twee ongelijke bollen, mits de kleinste niet binnen den grootsten ligt, hebben altijd een gemeenschappelijken omhullingskegel, waarin de beide bollen aan denzelfden kant van den top gelegen zijn. En liggen de bollen geheel buiten elkander, dan hebben zij bovendien nog een gemeenschappelijken omhullingskegel, waarin de bollen aan weerszijden van den top gelegen zijn. Die top zal dan, tusschen de beide middelpunten, het digtst bij dat van den kleinsten bol, of als de bollen even groot zijn, juist in het midden liggen.

Elk plat vlak, dat met zulk een omhullingsvlak slechts ééne beschrijvende lijn gemeen heeft, en uit dien hoofde gezegd wordt het omhullingsvlak te raken, heeft met elken bol, die er door omhuld wordt, slechts één punt gemeen, en raakt dus ook dien bol.

§ 160. WERKSTUK. *Uit een punt buiten een bol, eene raaklijn aan den bol te trekken.*

Daar uit het punt eene menigte van raaklijnen aan den bol kunnen getrokken worden, is het vraagstuk onbepaald. Indien dus (A', A'') het gegeven punt, en (M', M'') het middelpunt van den gegeven bol is (Fig. 123), zal men eene willekeurige lijn $A'B'$, uit A' door de horizontale projectie van den bol getrokken, als horizontale projectie der te vinden raaklijn kunnen aannemen. Brengt men nu door $A'B'$ een vlak (F, FF''), loodregt op het horizontale, en slaat men dit vlak om $A'B'$ neder, dan kan men, even als dit in § 152 en Fig. 114 verklaard is, het punt A en den cirkel P construeren, die in het neergeslagen vlak het punt (A', A'') en de doorsnede van den bol voorstellen. Trekt men dus uit A eene raaklijn AB aan dien cirkel, en bepaalt men de projectiën R' en R'' van het raakpunt R , dan zal men slechts uit A'' eene lijn $A''B''$ door R'' behoeven te trekken, om eene uit (A', A'') getrokken lijn ($A'B', A''B''$) te bekomen, die den bol in (R', R'') raakt.

Men zal ook eene lijn $A'C'$, zoodanig uit A' getrokken dat zij de horizontale projectie van den bol ergens in Q' raakt, als horizontale projectie der te vinden raaklijn kunnen aannemen; alsdan kan echter het oppervlak des bols met die lijn alleen het punt gemeen hebben, dat zijne horizontale projectie in Q' heeft, en waarvan dus, volgens § 153 en Fig. 115, de verticale projectie Q'' even hoog als M'' boven de as ligt; uit A'' dus wederom eene lijn $A''C''$

door Q'' trekkende, verkrijgt men eene nieuwe uit (A', A'') getrokken lijn $(A'C', A''C'')$, die den bol in (Q', Q'') raakt.

Beschouwt men het punt (A', A'') als den top van een kegelvlak, dat den bol omhult, zoo zijn de geconstrueerde punten (Q', Q'') en (R', R'') punten van den aanrakingscirkel. Construeert men dus eene menigte van raaklijnen uit (A', A'') getrokken, en de projectiën van hare raakpunten met den bol, dan zal men, door de geconstrueerde punten, de projectiën van den aanrakingscirkel uit de hand kunnen trekken. Blijkens de voorgaande § zal echter een vlak, door slechts één alzo geconstrueerd raakpunt, bijv. door (Q', Q'') , loodrecht gebragt op de lijn die de punten (A', A'') en (M', M'') vereenigt, den bol volgens dien aanrakingscirkel snijden; weshalve deze cirkel onmiddellijk door het werkstuk van § 150 kan geconstrueerd worden.

§ 161. WERKSTUK. *De projectiën van twee bollen gegeven zijnde, begeert men de toppen hunner gemeenschappelijke omhullingskegels te vinden.*

De begeerde toppen moeten volgens § 159 gelegen zijn in eene lijn, door de middelpunten (M', M'') en (N', N'') der gegebene bollen (Fig. 124) getrokken. Indien wij dus, aan de horizontale projectiën der bollen, gemeenschappelijke raaklijnen trekken, zullen deze door hare snijding met $M'N'$ onmiddellijk de gevraagde toppen (P', P'') en (Q', Q'') aanwijzen.

Voor zoover dit nog opheldering mogt behoeven, stelle men zich voor, dat er gevraagd werd uit het punt (P', P'') eene raaklijn, aan elk der bollen afzonderlijk, te trekken; dat hiertoe, naar aanleiding van het voorgaande werkstuk, de lijn $P'S'R'$, die de horizontale projectiën der bollen in S' en R' raakt, als de horizontale projectie der te trekken raaklijnen is aangenomen; en dat daaruit de punten S'' en R'' als de verticale projectiën der raakpunten gevonden zijn; dan heeft men, wegens de evenwijdigheid der in onze figuur voorkomende lijnen,

$$P'M'' : P''N'' = P'M' : P'N' = M'R' : N'S' = M''R'' : N''S'',$$

waaruit volgt dat de drie punten R'' , S'' en P'' in eene rechte lijn liggen. De raaklijn $(P'S', P''S'')$, uit het punt (P', P'') aan den eenen bol getrokken, valt dus langs de raaklijn $(P'R', P''R'')$, uit datzelfde punt aan den anderen bol getrokken. Het punt (P', P'') is dus een punt van de verlengde lijn $(M'N', M''N'')$, uit hetwelk men eene gemeenschappelijke raaklijn aan de beide bollen trekken

kan; dat is: het punt (P', P'') is de top van een gemeenschappelijke omhullingskegel. Ten aanzien van het punt (Q', Q'') kan men op dezelfde wijze redeneren.

Het is overigens klaar, dat wij ook gemeenschappelijke raaklijnen aan de verticale projectiën der bollen kunnen bezigen; deze zullen dan de lijn $M''N''$ in P'' en Q'' snijden.

§ 162. WERKSTUK. *Door een gegeven punt van het oppervlak eens bols, een rakend vlak aan dien bol te brengen.*

Laat (P', P'') het gegeven punt zijn, op het oppervlak van den bol, die (M', M'') tot middelpunt heeft (Fig. 116), dan behoeven wij slechts den straal ($M'P', M''P''$) te trekken, en volgens § 105 in het punt (P', P'') een vlak loodrecht op ($M'P', M''P''$) te stellen; dit vlak, dat wij in de figuur niet hebben voorgesteld, zal dan (*Meetk.* § 393) het begeerde zijn. De oplossing van dit werkstuk kan echter door de volgende constructie eenigzins aanschouwelijker gemaakt worden.

Door het middelpunt (M', M'') van den bol en de horizontale projectie R' van het gegeven punt (Fig. 125) brengen wij een verticaal vlak, dat wij om de lijn $M'R'$ op het horizontale neerslaan. In dit neergeslagen vlak, construeren wij den grooten cirkel M , volgens welken het den bol snijdt; gelijk mede de lijn, die in R' loodrecht op $M'R'$ staat. Hierdoor vinden wij de punten van het oppervlak, die R' tot horizontale projectie hebben, en van welke beide punten wij R als het gegevene zullen aanmerken. Trekken wij nu eerst, door R , eene raaklijn aan den neergeslagen cirkel, en voorts door het punt a , waar die raaklijn de verlengde $M'R'$ ontmoet, eene lijn AA , loodrecht op $M'a$ dan is AA , de doorgang en $M'aR$ de standhoek van het gevraagde vlak met het horizontale; want zoo wij het neergeslagen vlak als een nieuw projectievlak en dus $M'a$ als eene nieuwe as beschouwen, zijn Aa en aR de doorgangen van een vlak, dat in R loodrecht op den straal MR staat. De verticale doorgang AA , van het gevraagde vlak, kan verder onmiddellijk volgens § 89 gevonden worden.

§ 163. WERKSTUK. *Van een vlak, dat eenen bol raakt, de horizontale doorgang gegeven zijnde, wil men den verticalen vinden.*

Door het middelpunt (M', M'') van den gegeven bol (Fig. 125), brengen wij een standvlak loodrecht op den gegeven doorgang AA ; dit standvlak, dat AA , in a snijdt, slaan wij om aM' op het

horizontale vlak neer; en in dat neergeslagen vlak construeren wij weder den grooten cirkel M , volgens welken het den bol snijdt. Trekken wij dus uit a eene raaklijn aR aan den neergeslagen cirkel, dan zal blijkbaar $M'aR$ de standhoek met het horizontale vlak zijn, van een vlak, dat den bol in R raakt en AA , tot horizontalen doorgang heeft. De verticale doorgang AA , van dit vlak, die nu weder volgens § 89 kan geconstrueerd worden, zal dan de begeerde zijn. Door RR' loodregt op $M'a$ neer te laten, $R'R''$ regthoekig door de as OX te trekken, en $rR'' = RR'$ te nemen, verkrijgt men de projectiën van het raakpunt (R', R'').

Uit het punt a kan men twee raaklijnen aan den neergeslagen cirkel trekken; men zal dus ook de verticale doorgangen kunnen construeren van twee vlakken, die aan de vraag voldoen. Duidelijkheidshalve hebben wij slechts een van die vlakken in onze figuur aangewezen.

§ 164. Trekken wij in den neergeslagen cirkel van Fig. 125 eene koorde cd van gegevene lengte, beschrijven wij uit M eenen cirkel die deze koorde raakt, en trekken wij uit a eene lijn rakende aan dien cirkel, dan zal het deel CD van die lijn, dat binnen den neergeslagen grooten cirkel van den bol valt, gelijk aan cd zijn. Een vlak, waarvan $M'aC$ de standhoek en AA , de doorgang met het horizontale vlak is, snijdt nu den bol blijkbaar volgens een kleinen cirkel die CD tot middellijn heeft. Hierdoor is dan de vraag opgelost: *om, door eene lijn in het horizontale vlak, een vlak te brengen, dat een gegeven bol volgens een kleinen cirkel van gegevene grootte snijdt.*

§ 165. WERKSTUK. *Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat eenen gegeven bol raakt.*

Zij (M', M'') het middelpunt van den gegeven bol, en ($B'C', B''C''$) de gegevene lijn (Fig. 126); bepalen wij dan (zie § 68) de punten B' en C'' , waar die lijn de projectievlakken ontmoet, zoo hebben wij reeds een punt B' van den horizontalen, en een punt C'' van den verticalen doorgang van het gevraagde vlak, gevonden. Om dit vlak nu verder te bepalen, komt het er voornamelijk op aan zijn raakpunt met den bol te vinden. Onder de verschillende wijzen, waarop dit geschieden kan, is een der eenvoudigste, dat wij de constructie tot die van § 163 terugbrengen, waar ons werkstuk eigenlijk reeds opgelost is, voor het bijzondere geval dat de gegevene lijn in het horizontale vlak lag.

Hiertoe slaan wij het horizontaal-projecterend vlak der gegeven lijn op het horizontale vlak neer, en projecteren het middelpunt van den bol op dat neergeslagen vlak; dit geschiedt door $C'C = C'C''$ loodrecht op $B'C'$ te stellen, $B'C$ te trekken, en, op eene uit M' regthoekig door $B'C'$ getrokken lijn, $m'M'_1 = mM''$ te nemen. Beschouwen wij nu het neergeslagen vlak als een nieuw horizontaal vlak, dan is M'_1 de nieuwe horizontale projectie van het middelpunt des bols; dit middelpunt ligt ter hoogte $m'M'$ boven -, en de gegeven lijn $B'C$ ligt in - dat nieuwe horizontale vlak. Volgens § 163 trekken wij dus M'_1a regthoekig op $B'C$, stellen $M'_1M = m'M'$ loodrecht M'_1a , en beschrijven uit M met den straal des bols een cirkel, dan is dit werkelijk de groote cirkel, volgens welken de bol gesneden wordt door een standvlak in a loodrecht op $B'C$ gesteld, en om M'_1a op het nieuwe horizontale vlak neergeslagen. Eene raaklijn, uit a aan dien cirkel getrokken, wijst dus volgens § 163 onmiddellijk het raakpunt R van het begeerde vlak met den bol aan. Door RR'_1 loodrecht op M'_1a neer te laten, vinden wij de projectie R'_1 van het raakpunt op het nieuwe horizontale vlak. Nemen wij dus eerst, op eene lijn uit R'_1 regthoekig door $B'C'$ getrokken, $r'R' = RR'_1$; daarna, op eene lijn uit R' regthoekig door OX getrokken, $rR'' = r'R'_1$, dan is (R', R'') het op de oorspronkelijke projectievlakken geprojecteerde raakpunt R .

Zoo wij nu ten laatste, uit eenig punt (B', B'') van de gegeven lijn, eene lijn door (R', R'') trekken en haar ontmoetingspunt D met het verticale vlak construeren, is dit punt D ook een punt van den verticalen doorgang des gevraagden vlaks; weshalve de doorgangen van dat vlak $(A, AA_{,,})$ dadelijk door de punten D , C'' en B' kunnen getrokken worden.

Het zal wel geene opmerking behoeven, dat eene tweede raaklijn, uit a aan den cirkel M getrokken, op gelijke wijze een tweede vlak zal doen vinden, dat aan de vraag voldoet. Mogt het punt a binnen dien cirkel komen, dan zou het gevraagde vlak onbestaanbaar zijn, omdat de gegeven lijn den bol sneed. Overigens kan het met de bestaanbaarheid van het vlak zeer wel gepaard gaan, dat hetzij zijne doorgangen, hetzij de oorspronkelijke of later verkregene projectiën van de gegeven lijn, de gelijknamige projectiën van den bol snijden.

§ 166. Het in Fig. 126 gebezigde standvlak gaat door het

middelpunt van den bol en staat in a loodregt op de gegevene lijn. Men zou dus ook, op de gewone wijze, een vlak door het middelpunt des bols loodregt op de gegevene lijn kunnen brengen, en dit als nieuw horizontaal vlak aannemen. Als zoodanig zou men ook kunnen aannemen een vlak, door de gegevene lijn en het middelpunt van den bol gebragt. In beide gevallen wordt de constructie tot zeer eenvoudige bijzondere toestanden herleid; maar om eerst die nieuwe projectievlakken aan te nemen, en daarna de verkregene uitkomst weder op de oorspronkelijke projectievlakken over te brengen, zal men gezamenlijk meer arbeid moeten verrigten, dan tot de constructie van Fig. 126 vereischt werd.

Het voorgaande werkstuk kan ook zonder het aannemen van nieuwe projectievlakken opgelost worden; hiertoe heeft MONGE de volgende constructie voorgedragen.

Na in de gegevene lijn ($B'C', B''C''$) een punt (P', P'') genomen te hebben (Fig. 127), dat even hoog boven het horizontale vlak ligt als het middelpunt (M', M'') van den gegeven bol, trekt men uit P' twee raaklijnen aan de horizontale projectie van den bol, en vereenigt de raakpunten E en F ; dan is (P', P'') de top van een omhullingskegel, die den bol raakt volgens een kleinen cirkel, die loodregt op het horizontale vlak staat en de regte lijn EF tot horizontale projectie heeft. Evenzoo neemt men in de gegevene lijn een punt (Q', Q''), dat even ver als (M', M'') vóór het verticale vlak ligt, trekt uit Q'' raaklijnen aan de verticale projectie van den bol, en vereenigt de raakpunten G en H ; dan is (Q', Q'') de top van een anderen omhullingskegel, die den bol raakt volgens eenen kleinen cirkel, waarvan de regte lijn GH de verticale projectie is. De punten, waarin de beide genoemde aanrakingscirkels elkander op het oppervlak van den bol snijden, hebben dus hunne horizontale projectiën in EF en hunne verticale projectiën in GH ; het zijn dus de punten (R', R'') en (r', r'') die men vinden zal, als men, volgens § 152, de snijding bepaalt van het oppervlak des bols door eene regte lijn, wier projectiën langs EF en GH gelegen zijn (*). Verder brengt men, door de gegevene lijn en het punt (R', R'') of (r', r'') een vlak, dan zullen de alzoo verkregene vlakken de begeerde zijn. Het door (R', R'') gebragte vlak bijv.,

(*) De constructielijnen, vereischt om de snijpunten van deze lijn met het oppervlak van den bol te vinden, hebben wij in de figuur weggelaten.

dat door de punten (P', P'') en (Q', Q'') gaat, staat loodregt op den straal van het punt (R', R'') , omdat het van elk der omhullingskegels eene beschrijvende lijn bevat, die den bol in (R', R'') raakt.

Mogt de gegevene lijn den bol snijden, en dus het begeerde vlak onbestaanbaar zijn, dan zouden ook de aanrakingscirkels elk-ander niet snijden; hetgeen zich in de constructie openbaren zou, door dat de lijn, wier projectiën langs EF en GH gelegen zijn, het oppervlak van den bol niet sneed.

§ 167. WERKSTUK. *Eenen bol te bepalen, die twee gegevene vlakken raakt, en zijn middelpunt in de as van projectie heeft.*

De meetkundige plaats van de middelpunten der bollen, die twee gegevene vlakken raken, is het vlak, dat den tweevlak-kigen hoek der gegevene vlakken middendoordeelt. Indien dus $(A, AA_{,,})$ en $(B, BB_{,,})$ de gegevene vlakken zijn (Fig. 84), construe-ren wij volgens § 113 het vlak $(I, II_{,,})$, dat hunnen hoek mid-dendoordeelt. Daar wij dan hierdoor tevens het punt I vinden, waarin dat deelvlak de as snijdt, is I het middelpunt van den bol, wiens straal gevonden wordt, door de lengte der loodlijn te construeren, die uit I op een der gegevene vlakken kan worden neergelaten.

Beschrijft men uit I, met dien gevonden straal, eenen cirkel, dan is dit gelijktijdig de horizontale en de verticale projectie van den gevraagden bol.

Door den aangrenzenden supplementshoek van den boven be-schouwden tweevlakkigen hoek middendoor te deelen, zal men blijkbaar nog een tweeden bol bekomen, die aan de vraag voldoet.

§ 168. WERKSTUK. *Door een gegeven punt een vlak te brengen, dat twee gegevene bollen raakt.*

Wanneer een vlak twee bollen raakt, zal het ook hunnen ge-meenschappelijken omhullingskegel raken, en dus door den top van dien kegel gaan. En naargelang men begeert, dat de bollen zich aan denzelfden kant of aan weerszijden van het rakende vlak bevinden, zal deze omhullingskegel door eene uit- of inwendige gemeenschappelijke raaklijn moeten voortgebracht zijn. Construeert men dus volgens § 161 den top van den noodigen omhullings-kegel, en vereenigt men dien top met het gegevene punt, dan zal ook de vereenigingslijn in het te vinden vlak liggen, en men heeft dus verder niets anders te doen, dan volgens § 165 door

die lijn een vlak te brengen, dat een der gegeven bollen raakt. Dit vlak zal dan ook den anderen bol raken en dus het begeerde zijn.

Daar het werkstuk van § 165 twee rakende vlakken oplevert, zal men, door de twee omhullingskegels te gebruiken, in het algemeen vier vlakken kunnen vinden, die aan de vraag voldoen. Wanneer echter een der omhullingskegels volgens § 159 mogt ontbreken, of ook wanneer het gegeven punt binnen een der omhullingskegels mogt gelegen zijn, zal het paar uit dien kegel voortvloeiende raakvlakken ontbreken. Het gevraagde vlak wordt dus onbestaanbaar, indien het gegeven punt binnen elk der bestaande gemenschappelijke omhullingskegels ligt. Lag het gegeven punt in den top van een der kegels, dan was het gevraagde vlak blijkbaar onbepaald.

Mogten de gegeven bollen even groot zijn, dan zou een der genoemde kegels door een cilinder vervangen worden. In dat geval zou men door het gegeven punt eene lijn evenwijdig met de vereenigingslijn der middelpunten trekken, en door de alzoo getrokken lijn een rakend vlak aan een der bollen brengen; wordende alsnu tot de bestaanbaarheid gevorderd, dat het gegeven punt niet binnen den gemeenschappelijken omhullingscilinder ligt.

§ 169. WERKSTUK. *Een vlak te construeren, dat drie gegeven bollen raakt.*

Een vlak dat drie bollen raakt, raakt ook de gemeenschappelijke omhullingskegels dezer bollen twee aan twee genomen, en het gaat dus door de drie toppen van die kegels. Maar deze drie toppen liggen in eene rechte lijn; want behalve in het rakende vlak liggen zij ook in het vlak, dat door de middelpunten der drie bollen gaat en dat de lijnen bevat, die deze middelpunten twee aan twee vereenigen. De drie genoemde toppen bepalen dus het rakende vlak niet nader dan twee hunner. Construeert men alzoo de toppen van twee kegels, die ieder in het bijzonder twee van de drie gegeven bollen omhullen; trekt men daarna door deze beide toppen eene rechte lijn; en brengt men eindelijk volgens § 165 door deze lijn een vlak, dat een der bollen raakt, zoo zal dit vlak ook de beide andere bollen raken en dus het begeerde zijn. Naargelang men het rakende vlak al of niet tusschen twee van de bollen begeert, zal men, ten aanzien van die bollen, den

kegeltop moeten bezigen, die door de in- of uitwendige gemeenschappelijke raaklijnen bepaald wordt.

Liggen de drie bollen geheel buiten elkander, zoo heeft elk paar bollen twee gemeenschappelijke omhullingskegels; de toppen dezer zes kegels liggen dan drie aan drie in vier rechte lijnen, en de beide rakende vlakken, door een van deze toplijnen aan een van de drie bollen gebragt, zullen dan de drie bollen raken. Er zijn dus in het algemeen acht zulke rakende vlakken mogelijk. Voor elk der vier genoemde toplijnen, die de bollen mogt snijden, vervalt een paar van deze mogelijke rakende vlakken. Het kan dus ook gebeuren, dat er in het geheel geen rakend vlak mogelijk is; dit zou bijv. het geval zijn als de derde bol binnen de beide gemeenschappelijke omhullingskegels van den eersten en tweeden bol lag, zonder nogtans door die kegels geraakt te worden.

Snijden twee van de bollen elkander, zoo vervallen, met een der zes kegeltoppen, ook twee van de vier genoemde toplijnen; hierdoor blijven dan slechts vier rakende vlakken mogelijk, waarvan er nog weder twee onmogelijk zullen worden, voor elk der beide overgebleven toplijnen, die de bollen mogt snijden.

Snijdt een der bollen elk der beide anderen, zoo blijft er slechts één van de vier toplijnen over, en naargelang deze dan de bollen niet of al snijdt, zijn er twee of in 't geheel geen rakende vlakken mogelijk.

Mogt een gemeenschappelijke omhullingskegel van twee der gegebene bollen, tevens den derden bol omhullen, dan zou het begeerde rakende vlak onbepaald zijn; dat is: men zou oneindig veel rakende vlakken aan de drie bollen kunnen brengen.

Eindelijk merken wij op, dat, zoo twee van de gegebene bollen even groot mogten zijn, hun gemeenschappelijke omhullingskegel wederom door een cilinder zou vervangen worden.

Wij moeten aan den lezer overlaten, de constructie, die naar den aangewezen weg geene de minste zwaarigheid kan opleveren, op willekeurig aangenomene bollen in allerlei standen, uit te voeren; en zullen ons bepalen tot het construeren van een vlak, rustende op drie bollen (L', L''), (M', M'') en (N', N''), die op het horizontale vlak liggen (Fig. 128), en waarvan dus de verticale projectiën (zie § 149) door de as geraakt worden.

Dewijl de bollen zich aan denzelfden kant van het begeerde vlak moeten bevinden, hebben wij hier kegels noodig, wier toppen

door uitwendige gemeenschappelijke raaklijnen bepaald worden; en deze toppen liggen in het horizontale vlak, omdat ook dit door de bollen aan denzelfden kant geraakt wordt. Door de snijding der raaklijnen, aan de horizontale projectiën van de bollen getrokken, vinden wij dus dadelijk de in het horizontale vlak liggende toppen P en Q van de twee hier vereischte omhullingskegels. Het begeerde vlak, dat door deze toppen moet gaan, heeft dus eene lijn $AA_{,,}$, door P en Q getrokken, tot horizontalen doorgang, en er blijft slechts over zijn verticalen doorgang te bepalen, uit de voorwaarde dat het een der bollen, bijv. den bol (M', M'') moet raken. Hiertoe de in § 163 en Fig. 125 aangewezen constructie verrichtende, vinden wij dan het raakpunt R, de projectiën R' en R'' van dat punt, en den verticalen doorgang $AA_{,,}$ van het rakende vlak. Derhalve is dan ($A, AA_{,,}$) het vlak, dat op de drie bollen rust.

§ 170. Alvorens de beschouwing van den bol te eindigen, willen wij nog kortelijk verklaren, hoe men in de projectiën van cirkels, die zich op het oppervlak van een bol bevinden, het zichtbare van het onzichtbare deel kan onderscheiden

Volgens § 134 zijn de horizontale projectiën zichtbaar of onzichtbaar naargelang zij tot de bovenste of onderste helft-, de verticale naargelang zij tot de voorste of achterste helft - van het oppervlak behooren. Zoo is bijv. de kleine cirkel van Fig. 113 de zichtbare of onzichtbare horizontale projectie van eene doorsnede des bols, naargelang ($B_{,,} B_{,,}$) of ($b_{,,} b_{,,}$) het snijdende vlak is. Desgelijks is de kleine cirkel van Fig. 112 eene zichtbare of onzichtbare verticale projectie, naargelang zij tot den cirkel behoort, volgens welken de bol door het vlak ($A, A_{,,}$), of door het vlak ($a, a_{,,}$) gesneden wordt. Evenzoo kunnen de elliptische projectiën van kleine cirkels van den bol geheel zichtbaar of geheel onzichtbaar zijn, hetgeen gemakkelijk opgehelderd wordt, door eene beschouwing van de in Fig. 111 geconstrueerde doorsnede, die op het aldaar gebezigde standvlak de koorde CD tot projectie heeft. Op dat standvlak namelijk is eene lijn, door M evenwijdig met aX_1 getrokken, de doorgang van een horizontaal vlak, dat den bol in eene boven- en beneden-helft verdeelt; indien dus deze lijn de punten C en D beide boven of beide beneden zich laat, zal naargelang daarvan de horizontale projectie der doorsnede geheel zichtbaar of geheel onzichtbaar wezen.

Daar echter in Fig. 111 de genoemde lijn de koorde CD in e snijdt, het punt C boven en het punt D beneden zich latende, zoo zal aldaar het deel der doorsnede, dat zich op het standvlak volgens eC projecteert, eene zichtbare horizontale projectie hebben, terwijl de horizontale projectie van het deel, dat eD tot projectie op het standvlak heeft, onzichtbaar zal wezen. Trekt men nu uit e eene lijn rechthoekig door aX_1 , zoo zal deze lijn de horizontale projectie van den bol in twee punten e' snijden, en dan is $e'e'$ de horizontale projectie van eene koorde des bols, in e loodrecht op het standvlak staande; maar die koorde van den bol is almede eene koorde van de doorsnede, die volgens CD loodrecht op het standvlak staat, en dus is $e'e'$ ook eene koorde van de horizontale projectie der doorsnede. Deze gemeenschappelijke koorde $e'e'$ scheidt alzoo het zichtbare deel van het onzichtbare deel dier projectie; zij is blijkbaar evenwijdig met de groote as der projectie, en in hare uiteinden e' wordt de horizontale projectie van den bol, inwendig door de horizontale projectie der doorsnede geraakt.

Brengt men door het middelpunt des bols een standvlak loodrecht op den verticalen doorgang van het vlak (A, AA_1), dan zal men evenzoo de afscheiding van het zichtbare en onzichtbare deel der verticale elliptische projectie verkrijgen. Die afscheiding kan echter ook verkregen worden, als men door M' eene lijn evenwijdig met de as OX trekt; want zoo die lijn de elliptische horizontale projectie in twee punten snijdt, zullen de verticale projectiën van de punten der doorsnede, die de genoemde snijpunten tot horizontale projectiën hebben, de punten van afscheiding zijn. Mogt de lijn, door M' evenwijdig met OX getrokken, de horizontale projectie der doorsnede niet snijden, maar haar geheel voor of achter zich laten, dan zou naargelang daarvan de verticale projectie der doorsnede geheel zichtbaar of geheel onzichtbaar zijn.

WERKSTUKKEN TOT OEFENING.

1. In een gegeven hellend vlak eene lijn te trekken, die evenwijdig loopt met het horizontale vlak.

2. Door een gegeven punt eene lijn te trekken:

- a. die evenwijdig is met een gegeven vlak;
- b. die evenwijdig met het verticale vlak is, en eenen gegeven hoek met het horizontale vlak maakt;
- x c. die de as van projectie regthoekig kruist, en eenen gegeven hoek met het verticale vlak maakt;
- x d. die twee elkander kruissende lijnen snijdt;
- e. die evenwijdig is met twee gegebene vlakken;
- f. die met de beide projectievlakken gegebene hoeken maakt.

3. Door een gegeven punt een vlak te brengen:

- x a. dat evenwijdig is met eene gegebene lijn en met de as van projectie;
- b. dat de as van projectie in een gegeven punt onder een hoek van 45° snijdt;
- c. dat met de beide projectievlakken gegebene hoeken maakt.

x 4. Door twee gegebene punten een vlak te brengen:

- a. dat evenwijdig met eene gegebene lijn is;
- b. dat loodrecht op een gegeven vlak staat.

x 5. Een vlak te brengen door twee elkander snijdende lijnen, indien een dezer lijnen evenwijdig met de as van projectie is.

6. Uit een gegeven punt van eene gegebene lijn, op deze lijn eene loodlijn op te rigten, die evenwijdig met het verticale vlak loopt.

7. In de as van projectie een punt te vinden, dat van een gegeven vlak op een gegeven afstand verwijderd is.

8. In eene gegevene lijn een punt te vinden, dat op een gegeven afstand verwijderd is: § 9

- a. van een gegeven vlak;
- b. van een gegeven punt buiten de gegevene lijn.

+ 9. In een gegeven vlak een punt te vinden, dat zich op onderling gelijke gegevene afstanden van de horizontale en verticale doorgangen des vlakke bevindt.

10. De gemeene doorsnede van twee vlakken te construeren:

- a. indien al de doorgangen door een en hetzelfde punt van de as gaan;
- b. indien de gelijknamige doorgangen elkander snijden in punten, die buiten de grenzen der teekening vallen.

— 11. Het snijpunt te vinden van eene gegevene lijn met een vlak, dat door een gegeven punt en door de as van projectie gaat.

- 12. Den hoek te construeren, waaronder eene gegevene lijn de as van projectie kruist.

- 13. Den hoek te construeren, dien de beide doorgangen van een gegeven hellend vlak met elkander in de ruimte maken.

14. Den hoek te construeren, waaronder een gegeven vlak gesneden wordt:

- a. door de as van projectie;
- * b. door eene willekeurig gegevene lijn.

— 15. De doorgangen te vinden van het vlak, dat den hoek van een gegeven vlak met het horizontale middendoordeelt.

16. Een vlak en een punt in dit vlak gegeven zijnde, begeert men in dat vlak door dat punt eene lijn te trekken, die met het horizontale vlak eenen gegeven hoek maakt.

- 17. Van twee vlakken, die elkander regthoekig snijden, is de gemeene doorsnede door hare projectiën gegeven. Zoo nu bovendien een punt van het eene vlak gegeven is, begeert men de doorgangen van het andere te construeren.

- 18. Een hellend vlak en een punt in het horizontale vlak gegeven zijnde, begeert men uit dat punt eene lijn naar eenig punt van het gegeven vlak te trekken, zoodanig dat die lijn eene gegevene lengte verkrijgt en evenwijdig met het verticale vlak loopt.

- 19. Wanneer een punt in de as van projectie, en een ander punt in het verticale vlak, aangenomen zijn als twee hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek, wiens derde hoekpunt ergens in het horizontale vlak moet liggen, begeert men de plaats van dat derde hoekpunt te construeren.

20. Een vlak door een punt en eene lijn te brengen, indien het punt in de as gegeven is, terwijl de lijn zóó gegeven is, dat hare beide projectiën, elkander bedekkende, de as scheefhoekig snijden.

21. Het werkstuk van § 115 op te lossen, indien de gegebene lijn evenwijdig met de as van projectie, of ook slechts evenwijdig met het horizontale vlak is.

22. Het werkstuk van § 118 op te lossen, indien een der gegebene lijnen in het verticale vlak ligt en de as snijdt.

23. Het werkstuk van § 131 op te lossen, indien van de gegebene vlakke hoeken regt is:

- a.* de vlakke hoek, die aan den gegeven standhoek grenst;
- b.* de vlakke hoek over den gegeven standhoek.

24. Van een drievlakkigen hoek, wiens vlakke hoeken gegeven zijn, liggen twee ribben in het horizontale vlak. Men begeert de projectiën te vinden van de lijn, die binnen den drievlakkigen hoek zoodanig kan getrokken worden, dat zij met de drie ribben onderling gelijke hoeken maakt.

25. De projectiën van een vierkant te vinden, indien de horizontale projectie van een der diagonalen, en de doorgangen van het vlak des vierkants, gegeven zijn.

26. De projectien te vinden van eene regelmatige vijfhoekige piramide, wier grondvlak en hoogte gegeven zijn, en die met een van hare opstaande zijvlakken op het horizontale vlak neergelegd wordt.

27. Een regelmatig tetraëdrum te projecteren, dat met een zijner ribben loodregt op het horizontale vlak staat.

28. De projectiën te bepalen:

- a.* van een regelmatig octaëdrum;
- b.* van een regelmatig dodecaëdrum;
- c.* van een regelmatig icoesaëdrum;

hierbij aannemende, dat het ligchaam met een zijner zijvlakken op het horizontale vlak ligt.

29. Een regelmatig tetraëdrum te snijden door een vlak, dat evenwijdig met twee over elkander staande ribben is, en die ribben aan weerszijden op gelijke afstanden van zich heeft; voorts de ware gedaante der doorsnede te construeren.

30. Een afgeknot driehoekig prisma te projecteren, en het oppervlak van dit ligchaam te ontwikkelen.

31. Op het oppervlak eens bols een punt te vinden, dat zich op gegebene afstanden van de projectievlakken bevindt.

32. Wanneer een bol, wiens middelpunt in de as van projectie ligt, den aardbol voorstelt, en zijne doorsnede met het verticale vlak als eerste meridiaan aangenomen wordt, begeert men de projectien te vinden van een punt, welks geographische lengte en breedte gegeven zijn.

33. Wanneer de geographische lengten en breedten van twee punten des aardbols gegeven zijn, begeert men den groote-cirkel-boog te construeren, die, over het bolvormig oppervlak der aarde getrokken, deze twee punten vereenigt.

34. De uiteinden te construeren van eene middellijn van een gegeven bol, indien men weet, dat het verlengde van die middellijn door een gegeven punt van de as van projectie gaat.

35. De lengte te vinden van de koorde, in een gegeven bol, uit zijn hoogste punt, evenwijdig met eene gegebene lijn getrokken.

36. Uit een gegeven punt als middelpunt eenen bol te beschrijven, die een gegeven vlak aanraakt.

37. Een bol te beschrijven, die het horizontale vlak in een gegeven punt, en bovendien een gegeven hellend vlak aauraakt.

38. Aan een gegeven bol een rakend vlak te brengen:

- a. dat evenwijdig is met een gegeven vlak;
- b. dat evenwijdig met de as van projectie is, en met de projectievlakken hoeken van 45° maakt;
- c. dat de as snijdt, en met elk der projectievlakken hoeken van 60° maakt.

39. Met een gegeven straal eenen bol te beschrijven:

- a. die een gegeven bol in een gegeven punt raakt;
- b. die twee gegeven hellende vlakken en bovendien het horizontale projectievlak raakt;
- c. die drie gegebene bollen raakt.

40. Een bol te beschrijven, wiens oppervlak door een gegeven punt gaat, en die bovendien in een gegeven punt rakende is:

- a. aan een gegeven vlak;
- b. aan eene gegebene lijn.

41. Een bol van gegeven straal te beschrijven, wiens oppervlak door twee gegebene punten gaat, en die bovendien rakende is:

- a. aan het horizontale vlak van projectie;
- b. aan een gegeven hellend vlak.

42. Eenen bol te beschrijven, wiens oppervlak door drie gegevene punten gaat, en die bovendien:

- a. het horizontale projectievlak raakt;
- b. eenen gegeven straal heeft.

43. In eene gegevene driehoekige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, eenen bol te beschrijven.

44. Op het horizontale vlak ligt een gegeven bol. Men begeert de projectiën te vinden van eene om dien bol beschrevene regelmatige vierhoekige piramide van gegevenè hoogte.

45. Een punt in de ruimte te vinden, wanneer van drie, door dat punt getrokken onderling regthoekige lijnen, de snijpunten met het horizontale projectievlak gegeven zijn.

46. In een gegeven vlak een punt te vinden, dat zich op gegevene afstanden van een gegeven punt en van de as van projectie bevindt.

47. Op het oppervlak eens bols de polen te vinden:

- a. van den grooten cirkel, die door twee gegevene punten van het oppervlak gaat;
- b. van den kleinen cirkel, dien men door drie gegevene punten van het oppervlak brengen kan.

48. Van vier gelijke bollen, die elkander twee aan twee raken, zoodanig dat elke bol ieder der drie overigen raakt, liggen er drie op het horizontale vlak, terwijl de vierde wederom op deze drie rust. Men begeert de projectiën van de middelpunten dezer bollen te bepalen.

OVER DE KROMME LIJNEN.

HARE RAAKLIJNEN, NORMALEN EN NORMALE VLAKKEN.

§ 171. Eene kromme lijn, wier punten allen in een en hetzelfde plat vlak liggen, wordt *eene vlakke kromme lijn* of ook *eene kromme lijn van enkele kromming* genoemd. Liggen echter al de punten eener kromme lijn niet in een en hetzelfde plat vlak, dan heet zij *eene kromme lijn van dubbele kromming*. Buigt men b. v. het platte vlak, waarop eene kromme lijn beschreven is, dan neemt deze kromme lijn, ten gevolge van die buiging, behalve de kromming die zij reeds bezit, nog eene nieuwe kromming aan; en zij wordt alsdan eene kromme lijn van dubbele kromming.

Daar eene kromme lijn, die in het bijzondere geval van § 19 verkeert en dus eene regte lijn tot projectie heeft, niet anders dan eene vlakke kromme lijn kan wezen, *hebben de kromme lijnen van dubbele kromming altijd kromlijnige projectiën*.

§ 172. In eene constructie-figuur kunnen willekeurige kromme lijnen, waarvan er een in het horizontale en een in het verticale vlak getrokken is, als de beide projectiën eener kromme lijn in de ruimte aangenomen worden; onder voorwaarde echter dat de uiterste lijnen, die men uit de punten der aangenomene projectiën regthoekig door de as kan trekken, voor de eene projectie dezelfde zijn als voor de andere. Zoo zijn b. v. in Fig. 129, waar $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ deze uiterste loodlijnen op de as zijn, de kromme lijnen $A'B'C'$ en $A''B''C''$ de projectiën eener kromme lijn in de ruimte.

Neemt men onder dezelfde voorwaarde eene kromme lijn in het eene, en eene regte lijn in het andere projectievlak aan, dan zijn dit almede de projectiën eener kromme lijn in de ruimte, waarvan men nu terstond weet dat het eene vlakke kromme is.

Zoo zijn b. v. $A'B'$ en $A''B''C''$ (Fig. 130) de projectiën van eene kromme lijn, die gelegen is in het horizontaal-projecterend vlak ($A'FF_{II}$).

Wanneer, van eene geslotene kromme lijn in de ruimte, ook de beide projectiën geslotene kromme lijnen zijn, is het tot vermindering van dubbelzinnigheid noodig, dat men bepaaldelijk aanwijze welke deelen van die projectiën bij elkander behooren. Hiertoe zou men, zooals in Fig. 131, het eene paar bij elkander behoorende deelen door getrokken lijnen $A'B'$ en $A''B''$, het andere paar door gestipte of afgebroken lijnen $A'B'$ en $A''B''$ kunnen onderscheiden; maar men moet dan zorg dragen, dit niet te verwarren met eene onderscheiding van zichtbare en onzichtbare deelen. Om zulk eene mogelijke verwarring voor te komen, achten wij het verkiesselijker, enkele punten der geprojecteerde kromme lijnen door behoorlijk geaccenteerde letters aan te wijzen, waaruit dan van zelf blijken zal, wie de bij elkander behoorende deelen der projectiën zijn. Zoo zijn b. v. de in Fig. 132 geplaatste letters C of D voldoende, om de geslotene kromme lijn ($A'C'B'D'$, $A''C''B''D''$), zonder eenige dubbelzinnigheid, door hare beide projectiën voor te stellen.

Het kan gebeuren, dat eene geslotene kromme lijn slechts op een der projectievlakken eene geslotene kromme lijn tot projectie heeft, zooals in Fig. 133 is voorgesteld. De beide deelen der kromme lijn, die $A''C''B''$ en $A'D''B''$ tot verticale projectiën hebben, hebben hier dezelfde horizontale projectie $A'C'D'B'$. In dit geval zal de kromme lijn in de ruimte van dubbele of van enkele kromming zijn, naargelang de horizontale projectie $A'C'D'B'$ krom of regt is.

§ 173. Eene kromme lijn in de ruimte kan, en wat hare gedaante, en wat haren stand ten opzichte van de projectievlakken betreft, door allerlei voorwaarden bepaald worden. Alsdan zal men, uit die voorwaarden, de projectiën van hare verschillende punten kunnen vinden; en door de projectiën van die punten, mits zij in genoegzaam aantal en dicht genoeg bij elkander genomen zijn, zal men vervolgens de projectiën der kromme lijn uit de hand kunnen trekken. Wat de naauwkeurigheid der verkregene projectiën betreft, geldt hier hetgeen wij aan het slot van § 137 opmerkten.

Uit de voorwaarden, waardoor de kromme lijn in gedaante en stand bepaald is, zal men echter te haren opzichte niet zelden

constructiën kunnen uitvoeren, zonder dat men daartoe vooraf hare projectiën noodig heeft; en zulke constructiën kunnen dan zelfs dikwijls van groot nut zijn, om de projectiën der kromme lijn met een grooteren graad van naauwkeurigheid te verkrijgen.

Hoezeer dus kromme lijnen, op welke wijze ook bepaald, aanleiding tot constructiën kunnen geven, wordt in de beschrijvende meetkunst eene kromme lijn slechts als gegeven beschouwd, voor zoover hare projectiën in eene constructiefiguur staan afgeteekend. Eene gegevene kromme lijn kan derhalve zóó willekeurig zijn, dat zij aan geenerlei voorwaarde voldoet, en al wat men dan ten aanzien van die kromme lijn begeert te weten, kan eeniglijk uit hare projectiën door constructiën afgeleid worden.

§ 174. WERKSTUK. *In eene gegevene kromme lijn, een willekeurig punt aan te nemen.*

Dit geschiedt evenzoo, als zulks in § 64 ten aanzien van eene gegevene regte lijn is aangewezen. In de kromme lijnen van Fig. 129, 131 en 132 is alzoo (P' , P'') een willekeurig aangenomen punt dier krommen.

Hebben verschillende deelen der gegevene kromme lijn verschillende verticale projectiën, doch een en dezelfde horizontale projectie, zooals in Fig. 130 en 133, dan zal men in die lijn ook verschillende punten (P' , P'') en (P' , Q'') kunnen aannemen, die dezelfde horizontale projectie, maar verschillende verticale projectiën hebben.

Neemt men in eene gegevene kromme lijn een genoegzaam aantal punten aan, en construeert men volgens § 54, na een derde projectievlak aangenomen te hebben, de derde projectiën van al die punten, dan vindt men daardoor de derde projectie der gegevene kromme lijn.

Ligt eene kromme lijn in een vlak, dat loodregt op de as staat, dan zal zij slechts als gegeven kunnen beschouwd worden, indien ook hare derde projectie gegeven is.

§ 175. WERKSTUK. *Te onderzoeken of eene gegevene kromme lijn al dan niet eene vlakke kromme lijn is.*

Neem in deze kromme lijn, volgens de voorgaande §, drie willekeurige punten aan; construeer volgens § 100 de doorgangen van het vlak, waarin deze drie punten gelegen zijn; onderzoek verder volgens § 85 of al de overige punten, die men in de kromme lijn kan aannemen, in het geconstrueerde vlak liggen.

Naargelang dit al of niet het geval is, zal de kromme lijn vlak of van dubbele kromming zijn.

Zijn de projectiën der gegeven kromme lijn beide naar welgevallen aangenomen, dan is men wel bijna zeker, dat zij geene vlakke kromme zal wezen; zooals nog nader uit het volgende werkstuk zal blijken.

§ 176. WERKSTUK. *De verticale projectie eener vlakke kromme lijn te construeren, indien hare horizontale projectie en de doorgangen van haar vlak gegeven zijn.*

Construeer volgens § 85 de verticale projectiën der punten, die in het gegeven vlak liggen, en wier horizontale projectiën in de gegeven projectie der kromme lijn aangenomen zijn; dan kan, door de alzoo geconstrueerde punten, onmiddellijk de begeerde verticale projectie der kromme lijn getrokken worden. Zoo is b. v. in Fig. 134 de verticale projectie $a''d''e''f''g''b''$ geconstrueerd, van de kromme lijn die $A'd'e'f'g'B'$ tot horizontale projectie heeft en in het vlak (C, CC_1) gelegen is.

Evenzoo kan men *de verticale projectie eener vlakke kromme lijn construeren, indien hare horizontale projectie en drie van hare punten gegeven zijn.* Hiertoe behoeft men slechts aanvankelijk door deze drie punten een vlak te brengen. Eene vlakke kromme lijn wordt dus in het algemeen door ééne projectie, en nog drie punten van eene andere projectie, bepaald.

§ 177. WERKSTUK. *De snijpunten van eene gegeven kromme lijn met de projectievlakken te vinden.*

Laat $(A'B'C', A''B''C'')$ de gegeven kromme lijn wezen (Fig. 135); indien men dan uit de punten P' en Q' , waar hare horizontale projectie de as snijdt, loodlijnen op de as trekt, die hare verticale projectie in P'' en Q'' ontmoeten, zullen (P', P'') en (Q', Q'') de snijpunten der kromme lijn met het verticale vlak zijn. Immers deze punten zijn vooreerst punten van de kromme lijn; en ten andere liggen zij in het verticale vlak, omdat hunne horizontale projectiën P' en Q' in de as liggen.

Door eene loodlijn op de as te trekken, uit het punt R'' , waar de as door de verticale projectie der kromme lijn gesneden wordt, vindt men evenzoo haar snijpunt (R', R'') met het horizontale vlak.

Mogten de horizontale en verticale projectiën der kromme lijn de as niet snijden, dan wordt ook het verticale of horizontale vlak door de kromme lijn niet gesneden. De kromme lijnen, die

wij in de Figuren 129 tot 133 hebben voorgesteld, snijden dus noch het horizontale, noch het verticale vlak.

Voor zoover men de projectievlakken als ondoorschijnend wil aanmerken, zal hetgeen zich achter het verticale of onder het horizontale vlak bevindt, onzichtbaar zijn. Blijkbaar zullen dan de snijpunten van eene kromme lijn met de projectievlakken, de zichtbare en onzichtbare deelen van elkander afscheiden, zoowel van de kromme lijn zelve als van hare projectiën. Zoo zijn dan b. v. van de in Fig. 135 voorgestelde kromme lijn, de deelen ($P'B'Q'$, $P''B''Q''$) en ($A'R'$, $A''R''$) onzichtbaar; van het eene deel is de horizontale projectie $P'B'Q'$, van het andere deel de verticale projectie $A''R''$ onzichtbaar, terwijl de projectiën $P''B''Q''$ en $A'R'$ zichtbaar zijn. Veelal echter worden de projectievlakken als volkomen doorschijnend aangemerkt, en dan vervalt deze onderscheiding.

§ 178. WERKSTUK. *Het snijpunt van eene gegevene kromme lijn met een gegeven vlak te vinden.*

Laat ($A'B'$, $A''B''$) de gegevene kromme lijn en (C, CC_{III}) het gegeven vlak zijn (Fig. 134); construeert men dan volgens § 176 de verticale projectie $a''b''$ der kromme lijn, die in het vlak (C, CC_{III}) gelegen is en almede $A'B'$ tot horizontale projectie heeft, zoo is het punt s'' , waar de geconstrueerde verticale projectie $a''b''$ de verticale projectie $A''B''$ der gegevene kromme snijdt, de verticale projectie van het begeerde snijpunt, waarvan dan ook terstond de horizontale projectie s' bekend wordt. Immers het punt (s' , s'') is een punt van de kromme lijn ($A'B'$, $A''B''$); en is tevens een punt van het vlak (C, CC_{III}), omdat het een punt van de in dat vlak gelegene kromme lijn ($A'B'$, $a''b''$) is.

Indien de kromlijnige projectiën $A''B''$ en $a''b''$ elkander in meerdere punten sneden, zou men ook even zoovele snijpunten van de kromme lijn met het vlak vinden. Snijden die projectiën elkander niet, dan wordt ook het vlak niet door de kromme lijn gesneden.

Hoezeer men van de projectie $a''b''$ slechts een zeer klein gedeelte b. v. $e''f''$ noodig heeft, dat zich aan weerszijden van het te vinden punt s'' uitstrekt, weet men vooraf niet, welke punten e' en f' men in $A'B'$ moet aannemen, om juist zulk een gedeelte $e''f''$ te bekomen; desniettemin zal men met een oogopslag al dadelijk zien, welke punten van $A'B'$ men veilig ongebruikt kan laten. Daar voorts het gedeelte $e''f''$ slechts uit de hand

getrokken wordt, zal men, naargelang dit gedeelte grooter is, minder op de naauwkeurigheid van het verkregene punt (s' , s'') kunnen rekenen; op de volstrekte naauwkeurigheid van dat punt kan men eigenlijk eerst rekenen, wanneer bij onderzoek blijkt, dat het verkregene punt (s' , s'') werkelijk in het vlak (C, CC_{II}) ligt. De oplossing van ons werkstuk komt dan ook eigenlijk daarop neder, dat men in de horizontale projectie $A'B'$ achtereenvolgens punten A' , d' , e' enz. aanneemt, ten einde overeenkomstige punten a'' , d'' , e'' , enz. te bekomen, die gedurig digter bij de verticale projectie $A''B''$ komen, totdat men eindelijk in $A'B'$ het punt s' treft, hetwelk een overeenkomstig punt s'' in $A''B''$ oplevert.

§ 179. Daar men kromme lijnen niet even als regte lijnen kan verlengen, kunnen de beide voorgaande werkstukken slechts toegepast worden, voor zoover de projectiën der gegevene kromme lijnen werkelijk in de constructiefiguren staan afgeteekend.

Kent men echter de voorwaarden van het ontstaan eener kromme lijn, die slechts voor een gedeelte door werkelijk afgeteekende projectiën gegeven is, dan zal men doorgaans uit die voorwaarden de overige deelen der kromme lijn kunnen projecteren, of op eenige andere manier aanwijzen. In zoodanig geval, is men derhalve niet beperkt tot het gedeelte, waarvan de projectiën aanvankelijk gegeven waren. Hiervan zullen wij in het volgende werkstuk een voorbeeld geven.

§ 180. WERKSTUK. *Wanneer de projectiën van een cirkelboog en de doorgangen van een vlak gegeven zijn, kan het gebeuren dat het vlak niet door dien boog, maar wel door den geheelen omtrek van den cirkel waartoe die boog behoort, gesneden wordt. Men begeert in dat geval deze snijpunten te construeren.*

Neem in den gegeven boog drie willekeurige punten aan (§ 174); breng door deze drie punten een vlak (§ 100), en construeer de gemeene doorsnede van dat vlak met het gegevene (§ 81); dan moeten de begeerde snijpunten in deze gemeene doorsnede liggen, want zij bevinden zich zoowel in het vlak van den cirkel als in het gegeven vlak.

Indien nu de projectiën der geconstrueerde doorsnede, de gelijknamige projectiën van den gegeven boog snijden, zijn deze snijpunten de projectiën van het punt, waarin het gegeven vlak door den boog zelven gesneden wordt; wij onderstellen dus dat deze snijding geen plaats heeft.

Sla dan verder het geconstrueerde vlak om zijn horizontalen doorgang neder (§ 90); bepaal in dit neergeslagen vlak niet alleen de drie punten waardoor het gebragt is (§ 92), maar ook de lijn volgens welke het door het gegevene vlak gesneden wordt (§ 94); beschrijf vervolgens den cirkel, wiens omtrek door de drie neergeslagene punten gaat, dan zijn de punten, in welke die omtrek de neergeslagene lijn snijdt, de begeerde snijpunten in het neergeslagen vlak. Er blijft dus slechts over volgens § 90 de projectiën te bepalen, die deze snijpunten verkrijgen, wanneer het neergeslagen vlak in zijn vorigen stand wordt teruggebragt.

Wanneer de in het neergeslagen vlak beschreven cirkel de neergeslagene lijn niet mogt snijden, zou hieruit blijken dat het gegeven vlak noch door den gegeven boog, noch door den voltooiden cirkel, waarvan die boog een deel is, gesneden wordt.

§ 181. Laat eene kromme lijn van enkele of dubbele kromming APQB, in Fig 136 door eene perspectievische afbeelding voorgesteld, door eene regte lijn *mn* in twee punten P en Q gesneden worden, dan zal men zich altijd eene zoodanige beweging van deze snijlijn kunnen voorstellen, dat zij steeds door het eene snijpunt P blijft gaan, terwijl het andere snijpunt Q gedurig digter bij P komt en eindelijk in P valt. In den stand MN nu, dien de snijlijn heeft verkregen, op het oogenblik dat de beide snijpunten in elkander vallen, wordt zij *eene raaklijn* aan de kromme lijn genoemd; terwijl het punt P, in hetwelk dan de raaklijn en de kromme lijn gezegd worden *elkander te raken*, den naam van *raakpunt* draagt.

Men is gewoon de beide in elkander vallende snijpunten als twee oneindig dicht bij elkander gelegene punten der kromme lijn aan te merken, en dus ook de raaklijn MN te beschouwen, als in het raakpunt P een oneindig klein gedeelte der kromme lijn met haar gemeen te hebben. Dit oneindig klein gedeelte, dat men *een element* der kromme lijn noemt, mag dan als *regt* aangemerkt worden, zoodat het verlengde element als de raaklijn, en het element zelf als het raakpunt moet worden aangezien. Elk punt eener kromme lijn, heeft dus zijne bijzondere raaklijn.

§ 182. STELLING. *Wanneer eene regte lijn en eene kromme lijn elkander raken, raken ook in het algemeen hare gelijknamige projectiën elkander; en het raakpunt dezer projectiën is dan tevens de projectie van het raakpunt in de ruimte.*

Wanneer namelijk de kromme lijn APQB en de rechte lijn mn , die elkander in twee punten P en Q snijden (Fig. 136), op eenig vlak OL geprojecteerd worden, zullen hare projectiën A'P'Q'B' en $m'n'$ elkander almede snijden, in twee punten P' en Q', die de projectiën zijn van de snijpunten P en Q in de ruimte (zie § 18 en § 62).

Indien nu de lijn mn om het eene snijpunt P bewogen wordt, zoodat het andere snijpunt Q gedurig digter bij P komt en eindelijk in P valt, zal ook hare projectie $m'n'$ zich derwijze om het punt P' bewegen, dat het snijpunt Q' gedurig digter bij P' komt en eindelijk in P' valt. Zoodra dus door deze beweging de lijn mn zulk eenen stand MN heeft verkregen, dat zij de kromme lijn APQB in P raakt, zal ook de projectie $m'n'$ een zoodanigen stand M'N' verkregen hebben, dat zij de projectie A'P'Q'B' in P' raakt.

Daar de projectie van een element P der kromme lijn APBQ, in het algemeen een element P' der projectie A'P'Q'B' is, behoeft men de raaklijnen slechts als de verlengden dier elementen te beschouwen, om de bewezene stelling als een onmiddellijk gevolg te mogen aanmerken van hetgeen wij aan het slot van § 23 aanvoerden.

Indien de raaklijn, en dus ook het element der kromme lijn dat zij met haar gemeen heeft, loodregt op het projectievlak mogt staan, heeft zij een enkel punt tot projectie. Hoezeer dan dat punt wel in de projectie der kromme lijn ligt, is in dat bijzondere geval onze stelling niet toepasselijk, omdat men van een punt niet zeggen kan dat het eene kromme lijn al of niet raakt.

§ 183. **WERKSTUK.** *Door een gegeven punt eener gegeven kromme lijn, eene raaklijn aan die kromme te trekken.*

Laat (A'C'B'D', A''C''B''D'') de gegeven kromme lijn, en daarin (P', P'') het gegeven punt zijn (Fig. 132); trek dan, door de projectiën P' en P'' van het gegeven punt, raaklijnen M'N' en M''N'' aan de projectiën der gegeven kromme lijn, zoo is (M'N', M''N'') de begeerde raaklijn. Want het punt (P', P'') der kromme lijn heeft zijne bijzondere raaklijn (§ 181); en onder alle rechte lijnen, die men door het punt (P', P'') trekken kan, is (M'N', M''N'') de eenige, die volgens de voorgaande stelling raaklijn aan de kromme kan wezen.

Naargelang de raaklijnen, die men door de projectiën van het

gegeven punt aan de projectiën der kromme lijn trekt, beide of slechts een van beide loodregt op de as mogten staan, laten zij de begeerde raaklijn onbepaald of toonen zij aan dat de begeerde raaklijn loodregt op een der projectievlakken is.

Moet b. v. aan de kromme lijnen van Fig. 131 en van Fig. 133 eene raaklijn door het punt (B' , B'') getrokken worden, dan valt vooreerst hare verticale projectie, in de beide genoemde figuren, langs de lijn $\delta B''$ die loodregt op de as staat; hare horizontale projectie moet dus (zie het laatste gedeelte van § 33) òf mede loodregt op de as, òf een enkel punt wezen. Die horizontale projectie kan dus in Fig. 131 wèl, maar in Fig. 133 niet, langs de raaklijn vallen, die men door B' aan de horizontale projectie der kromme kan trekken. In Fig. 133 is dus de horizontale projectie der raaklijn het enkele punt B' , en bijgevolg is (B' , $\delta B''$) de begeerde raaklijn, die nu loodregt op het horizontale vlak staat. In Fig. 131 daarentegen wordt door $\delta B'$ en $\delta B''$ als projectiën geene lijn in de ruimte bepaald, zoodat men in dit geval eene derde projectie der kromme lijn zou moeten construeren, ten einde de begeerde raaklijn te bepalen.

§ 184. In de hoogere meetkunst en differentiaalrekening wordt geleerd, hoe men door constructiën, aan vlakke kromme lijnen die volgens eene bepaalde wet ontstaan zijn, raaklijnen kan trekken. In de beschrijvende meetkunst echter, wordt het trekken van raaklijnen aan kromlijnige projectiën, als eene eenvoudige verigting beschouwd, die door het aanleggen eener liniaal onmiddellijk uitvoerbaar is en dus tot de postulaten behoort. Men is blijkbaar wel genoodzaakt dit postulaat aan te nemen, zoodra men te doen heeft met kromlijnige projectiën, die geheel naar welgevallen uit de hand getrokken zijn: of met projectiën van kromme lijnen, waarvan men, hoezeer zij volgens eene bepaalde wet ontstaan zijn, die wet niet kent.

Kent men echter de wording eener kromme lijn, ook met betrekking tot haren stand ten opzichte van de projectievlakken, dan zal men niet zelden, na de projectiën van eenig punt dier kromme lijn bepaald te hebben, ook de projectiën van de tot dat punt behorende raaklijn kunnen construeren, zonder daartoe vooraf de projectiën van de kromme lijn zelve geconstrueerd te hebben. Alsdan is de constructie van zulke raaklijnen zeer geschikt, om de projectiën der kromme lijn naauwkeuriger te be-

komen, dan zij zonder het gebruik dier raaklijnen zouden verkregen worden.

§ 185. Door den hoek, waaronder twee kromme lijnen elkander snijden, verstaat men den hoek, gevormd door de raaklijnen, die men in het snijpunt aan de beide kromme lijnen trekken kan. Evenzoo verstaat men door den hoek, van eene regte lijn of van een plat vlak met eene kromme lijn, den hoek, dien de raaklijn der kromme in het snijpunt met de regte lijn of met het platte vlak maakt. Het construeren van zulke hoeken wordt dus, door het trekken van raaklijnen, tot het werkstuk van § 78 teruggebracht.

Volgens de gegevene bepaling, staat verder eene regte lijn of een plat vlak loodrecht op eene kromme lijn, indien die lijn of dat vlak, in eenig punt der kromme loodrecht op de raaklijn van dat punt staat.

Om te beoordeelen of gegevene kromme lijnen, of regte en kromme lijnen, elkander al dan niet snijden, geldt blijkbaar hetzelfde kenmerk, dat wij in § 75 ten aanzien van regte lijnen leerden kennen. Of eene kromme lijn en een plat vlak elkander al dan niet snijden, wordt door toepassing van § 178 beoordeeld.

§ 186. Het trekken van raaklijnen verschaft ook nog een ander hulpmiddel dan in § 175 is aangewezen, om te onderzoeken of eene kromme lijn, die door hare beide projectiën gegeven is, al dan niet eene vlakke kromme is. Bij eene vlakke kromme lijn toch, liggen alle mogelijke raaklijnen in het vlak der kromme; bijgevolg moeten de ontmoetingspunten van deze raaklijnen met een der projectievlakken, in den gelijknamigen doorgang van het vlak der kromme, dat is: in eene regte lijn, gelegen zijn. Trekt men dus aan eene gegevene kromme lijn een genoegzaam aantal raaklijnen, en bepaalt men de punten, waarin deze raaklijnen b. v. het horizontale vlak ontmoeten, dan zal, naargelang deze punten al of niet in eene regte lijn liggen, de gegevene kromme lijn van enkele of dubbele kromming zijn.

§ 187. Even als door *twee* oneindig dicht bij elkander gelegene punten eener kromme lijn, eene regte lijn kan getrokken worden, die dan eene raaklijn is (zie § 181), zal ook door *drie* zulke punten een plat vlak kunnen gebragt worden. Dit vlak heet dan *een tangentiaal vlak* der kromme lijn, en wel het *tangentiale vlak* van dat punt der kromme, waar de drie oneindig

digst bij elkander genomene punten kunnen geacht worden zamen te vallen.

Bij eene vlakke kromme lijn, is blijkbaar haar eigen vlak het tangentiale vlak van al hare verschillende punten; zoodat de beschouwing der tangentiale vlakken, eigenlijk alleen bij de kromme lijnen van dubbele kromming, te pas komt. Bij deze, heeft elk punt der kromme zijn bijzonder tangentiaal vlak.

Daar elk tangentiaal vlak door drie oneindig digt bij elkander gelegene punten der kromme lijn bepaald wordt, wordt het blijkbaar ook door twee op elkander volgende elementen, en dus door twee op elkander volgende raaklijnen der kromme lijn bepaald. Het tangentiale vlak, van eenig punt eener kromme lijn, gaat alzoo door de raaklijn van dat punt, en door de raaklijn van een oneindig digt daarbij gelegen punt.

§ 188. Een plat vlak, dat, door eenig punt van eene kromme lijn gaande, loodregt op de raaklijn van dat punt staat, noemt men *een normaal vlak* der kromme lijn. Elk punt eener kromme lijn heeft dus zijn bijzonder normaal vlak.

Al de lijnen, die men, uit eenig punt eener kromme lijn, in het normale vlak van dat punt trekken kan, staan loodregt (zie *Meetk.* § 299 en 300) op de raaklijn van dat punt, en dus staan zij volgens § 185 ook loodregt of normaal op de kromme lijn. Onder al deze loodregte of *normale lijnen* is er ééne, die men meer bijzonder als de normaal aanmerkt, en die men uit dien hoofde *de hoofdnormaal* noemt; en wel diegene, welke tevens in het tangentiale vlak van het beschouwde punt ligt. De hoofdnormaal van een punt eener kromme lijn is alzoo de gemeene doorsnede van de tot dat punt behorende normale en tangentiale vlakken.

Bij vlakke kromme lijnen verstaat men dan ook door de normalen eeniglijk die lijnen, welke uit de verschillende punten der kromme lijn, in haar eigen vlak, loodregt op de raaklijnen van die punten kunnen worden getrokken.

§ 189. WERKSTUK. *Het tangentiale vlak, het normale vlak, en de hoofdnormaal te construeren, behoorende tot een gegeven punt eener gegeven kromme lijn van dubbele kromming.*

Laat ($A'B'$, $A''B''$) de gegeven kromme lijn, en daarin (P' , P'') het gegeven punt zijn (Fig. 137). Trekken wij dan de lijn ($P'Q'$, $P''Q''$), die de kromme lijn in (P' , P'') raakt (§ 183), en brengen wij door het punt (P' , P'') een vlak, dat loodregt op de

raaklijn ($P'Q'$, $P''Q''$) staat (§ 103), zoo is vooreerst dit vlak ($N, NN_{,,}$) volgens de voorgaande §, het begeerde normale vlak.

Bepalen wij verder het ontmoetingspunt Q' van de getrokken raaklijn met het horizontale vlak; en bepalen wij almede, na door eenige digt bij (P' , P'') gelegene punten der kromme lijn raaklijnen getrokken te hebben, de punten R' , S' , enz., waar deze nieuwe raaklijnen het horizontale vlak ontmoeten; dan zullen, daar de kromme lijn van dubbele kromming is, de punten R' , Q' , S' , enz. niet in eene regte lijn liggen (zie § 186). Zijn nu de punten der kromme lijn, waartoe de geconstueerde raaklijnen behooren, digt genoeg bij elkander genomen, dan zullen ook de punten R' , Q' , S' , enz. digt genoeg bij elkander vallen, om eene kromme lijn, uit de hand door R' , Q' , S' , enz. getrokken, te mogen houden voor de aaneenschakeling der punten, waarin het horizontale vlak door de opvolgende raaklijnen van ($A'B'$, $A''B''$) gesneden wordt. Trekken wij dus eene lijn $TT_{,}$, die de geconstueerde kromme $R'Q'S'$ in Q' raakt, en uit dien hoofde in Q' twee opvolgende punten met de kromme $R'Q'S'$ gemeen heeft, dan zal ook het vlak, dat men door $TT_{,}$ en het punt (P' , P'') brengen kan, door twee in dat punt op elkander volgende raaklijnen der kromme lijn ($A'B'$, $A''B''$) gaan, en alzoo volgens § 187 het tangentiale vlak van het punt (P' , P'') zijn. Van dit vlak, dat de lijn $TT_{,}$ tot horizontalen doorgang heeft, kan, daar men de beide projectiën van een punt (P' , P'') des vlaks kent, de verticale doorgang $TT_{,,}$ volgens § 85 geconstueerd worden. Derhalve is dan ($T, TT_{,,}$) het begeerde tangentiale vlak.

Construeren wij eindelijk volgens § 81 de gemeene doorsnede van de vlakken ($T, TT_{,,}$) en ($N, NN_{,,}$), dan is volgens § 188 deze gemeene doorsnede ($C'D'$, $C''D''$), die blijkbaar door het punt (P' , P'') zal gaan, de begeerde hoofdnormaal.

Bij eene vlakke kromme lijn, waar geen tangentiaal vlak in aanmerking komt, wordt het normale vlak van eenig punt der kromme even als boven geconstueerd; terwijl dan verder de normaal van dat punt, niet anders is dan de doorsnede van het normale vlak met het vlak der kromme lijn zelve. Is een cirkel of een cirkelboog door zijne projectiën gegeven, en keut men ook de projectiën van het middelpunt, dan kunnen de normalen zijner verschillende punten, zonder eenige constructie, dadelijk getrokken worden, omdat men weet dat al die normalen door het middelpunt gaan.

§ 190. *Twee kromme lijnen raken elkander*, wanneer zij een element gemeen hebben. Het verlengde van dat element is dan eene raaklijn aan de beide krommen; twee elkander rakende kromme lijnen hebben dus in haar raakpunt eene gemeenschappelijke raaklijn.

Bij de raking der kromme lijnen kan men *eene eenvoudige en eene volkomene raking* onderscheiden. De volkomene raking heeft plaats, als de beide kromme lijnen in het raakpunt tevens een gemeenschappelijk tangentiaal vlak hebben; is dit het geval niet, dan heeft er slechts eenvoudige raking plaats. Men kan dus ook zeggen, dat de raking volkomen of eenvoudig is, naargelang de tot het raakpunt behorende hoofdnormalen der beide kromme lijnen al of niet langs elkander vallen.

Twee vlakke kromme lijnen moeten dan ook in een en hetzelfde vlak liggen, opdat hare aanraking volkomen kan zijn. Laat b. v. de gemeene doorsnede AB van twee vlakken AP en BQ (Fig. 138) in het punt R geraakt worden, door twee cirkels, waarvan de eene in het vlak AP, de andere in het vlak BQ ligt, dan hebben die cirkels in het punt R eene gemeenschappelijke raaklijn AB, en zij raken dus elkander in R; maar deze raking is slechts eenvoudig. Wordt een dezer vlakken, b. v. het vlak BQ, om AB gewenteld, dan blijft deze eenvoudige raking bestaan, tot dat BQ met AP een enkel vlak uitmaakt; maar zoodra dit gebeurt, zullen de cirkels eene volkomene raking in het punt R verkregen hebben, en wel eene uit- of inwendige raking, naargelang de wenteling in dezen of genen zin heeft plaats gehad.

§ 191. Onder de kromme lijnen van dubbele kromming zijn *de gewone schroeflijn* en *de loxodromische lijn* een paar der merkwaardigsten.

De laatste, waarmede wij ons echter verder niet zullen bezighouden, is eene kromme lijn, die over het oppervlak der aarde getrokken al de meridianen onder gelijke hoeken snijdt, en dus den weg voorstelt dien een schip volgt, dat altijd in dezelfde tusschenstreek van het kompas voortgaat; zij is geenszins de kortste weg om over het oppervlak der aarde uit het eene punt tot het andere te komen (zie *Meetk.* § 400, *Gev.* 1°).

De gewone schroeflijn is eene kromme lijn, die zoodanig op het oppervlak van een gewonnen cirkelvormigen cilinder beschreven is, dat zij al de beschrijvende lijnen des cilindervlaks (*Meetk.* § 406

en 407) onder gelijke hoeken snijdt; zij is werkelijk de kortste weg, die over het oppervlak des cilinders uit eenig punt naar een ander loopt.

Laat namelijk het ontwikkeld oppervlak van zulk een cilinder door den regthoek $VAav$ (Fig. 139) voorgesteld worden, zoodat AV en av de beschrijvende lijn verbeelden, volgens welke het oppervlak is doorgesneden om tot de ontwikkeling te geraken, terwijl Aa de ontwikkelde omtrek des grondvlak is. Trekken wij dan, in dien regthoek, uit A eene lijn Aa_1 , die met Aa een scherpen hoek maakt; trekken wij verder, na $AA_1 = aa_1$ genomen te hebben, A_1a_2 evenwijdig met Aa_1 ; desgelijks, na $AA_2 = aa_2$ genomen te hebben, A_2a_3 wederom evenwijdig met Aa_1 ; en zoo vervolgens; dan zullen de alzoo getrokken rechte lijnen Aa_1 , A_1a_2 , A_2a_3 , enz. in eene schroeflijn overgaan, wanneer de regthoek $VAav$ weder om den cilinder gewikkeld wordt. Want zij blijven bij die omwikkeling al de beschrijvende lijnen des cilindervlaks onder gelijke hoeken snijden, terwijl hare uiteinden a_1 en A_1 , a_2 en A_2 , enz. aan elkander gaan sluiten.

De as en de straal van den cilinder, worden ook *de as en de straal van de schroeflijn* genoemd. Het punt A , dat de schroeflijn met den omtrek van het grondvlak gemeen heeft, noemt men gewoonlijk haar *beginpunt*. De hoek aAa_1 , die het complement is van den hoek, waaronder de schroeflijn al de beschrijvende lijnen snijdt, noemt men haren *hellingshoek*. De deelen Aa_1 , A_1a_2 , enz., waarin de door het beginpunt getrokken beschrijvende lijn AV en av de schroeflijn verdeelt, noemt men hare *schroefgangen*; en het deel $AA_1 = aa_1$ van eene beschrijvende lijn, dat tusschen twee opvolgende schroefgangen begrepen is, noemt men *de hoogte van den schroefgang*.

De lengte van elken schroefgang is dus de hypotenusa Aa_1 van een regthoekigen driehoek, wiens regthoekszijden zijn de hoogte van den schroefgang en de omtrek van het grondvlak.

Daar een regthoekige driehoek, hetzij door twee zijner zijden, hetzij door een zijner zijden en een zijner scherpe hoeken, volkomen bepaald is, terwijl de omtrek van een cirkel door zijnen straal bekend wordt, is ook blijkbaar de gedaante eener schroeflijn volkomen bepaald, zoodra men, nevens den straal, hetzij de hoogte of lengte van den schroefgang, hetzij den hellingshoek kent. De stand der schroeflijn, met betrekking tot het cilinder

vlak waarop zij beschreven is, wordt voorts door haar beginpunt bepaald.

§ 192. WERKSTUK. *De projectiën eener schroeflijn te construeren.*

Laat de straal en de hellingshoek der schroeflijn gegeven zijn, wier as wij onderstellen dat loodregt op het horizontale projectievlak staat. Indien dan (M' , mM'') die as is (Fig. 140), zal een cirkel, uit M' met den gegeven straal beschreven, onmiddellijk de horizontale projectie der schroeflijn zijn; want een projecterend cilindervlak (§ 19), volgens dien cirkel loodregt op het horizontale vlak opgerigt, is juist dat cilindervlak, waarop de schroeflijn zich bevindt. Er blijft dus slechts over hare verticale projectie te vinden.

Trekken wij in den beschreven cirkel eenen straal $M'A'$, evenwijdig met de as van projectie OX , en nemen wij gemakshalve het punt (A' , A'') tot beginpunt der schroeflijn aan, dan verdeelen wij dien cirkel, uit A' te beginnen, in een zeker aantal b. v. 12 gelijke deelen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, enz. Verder trekken wij eene rechte lijn Aa (Fig. 139), die zoo lang is als de omtrek van den genoemden cirkel (*), stellen av loodregt op Aa , en maken den hoek aAa_1 gelijk aan den gegeven hellingshoek, dan is aa_1 de hoogte van den schroefgang; voorts verdeelen wij de lijn Aa in evenveel gelijke deelen AB , BC , CD , enz. als den cirkel, dan zullen deze deelen gelijk aan de bogen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, enz. van Fig. 140 zijn; eindelijk trekken wij uit B , C , D , enz. op Aa loodlijnen Bb , Cc , Dd , enz., die Aa_1 in b , c , d , enz. ontmoeten.

Wordt nu het vlak van den hoek aAa_1 om het projecterend cilindervlak van Fig. 140 gewikkeld, zoodat de punten A , B , C , D , enz. van Fig. 139 respectievelijk in de punten A' , B' , C' , D' , enz. van Fig. 140 komen, dan wordt de lijn Aa_1 een schroefgang der schroeflijn, en hare punten b , c , d , enz., die dan in B' , C' , D' , enz. hunne horizontale projectiën verkrijgen, komen op de hoogten Bb , Cc , Dd , enz. boven het horizontale vlak. Door dus in Fig. 140 uit B' , C' , D' , enz. lijnen regthoekig door OX te trekken, en op die lijnen boven OX respectievelijk de lijnen Bb , Cc , Dd , enz.

(*, Hiertoe kan een der hulpmiddelen dienen, die in de gewone meetkunst zijn aangewezen (zie *Meetk.* § 184). Wordt de teekening op geene zeer groote schaal vervaardigd, dan zal het voldoende zijn de middellijn van dien cirkel in 7 gelijke deelen te verdeelen, en de lijn Aa gelijk aan 22 van die deelen te maken.

van Fig. 139 uit te zetten, verkrijgt men onmiddellijk de verticale projectiën B'' , C'' , D'' , enz. van de punten des bedoelden schroefgangs.

Het uitzetten dezer hoogten wordt gemakkelijk gemaakt, door uit A'' de geheele hoogte $A''a''$ van den schroefgang uit te zetten, die hoogte in evenveel gelijke deelen te verdeelen als den cirkel, en uit de deelpunten lijnen evenwijdig met OX te trekken; want uit Fig. 139, waar Aa in 12 gelijke deelen verdeeld is geworden, volgt onmiddellijk $Bb = \frac{1}{12}aa$, $Cc = \frac{2}{12}aa$, $Dd = \frac{3}{12}aa$, enz.

Door de punten A'' , B'' , C'' , D'' , enz. kan nu verder de verticale projectie van den eersten schroefgang uit de hand getrokken worden; deze projectie zal dan naauwkeuriger zijn, naargelang men er meer punten van geconstrueerd heeft, dat is, naargelang men den cirkel en dus ook de hoogte $A''a''$ in een grooter aantal gelijke deelen verdeeld heeft.

Zet men verder uit elk der punten A'' , B'' , C'' , D'' , enz. de hoogte van den schroefgang, loodregt op OX , bij herhaling boven deze punten uit, dan verkrijgt men gelijkerwijze de verticale projectiën van de opvolgende schroefgangen.

Moest de schroeflijn geprojecteerd worden op een vlak, dat een willekeurig bepaalden stand met betrekking tot de as en het beginpunt had, dan zou men, na het verrigten der bovenaangewezene constructie, de doorgangen construeren van het vlak dat dien bepaalden stand had, en daarna volgens § 110 dit vlak als nieuw horizontaal vlak aannemen.

§ 193. WERKSTUK. *Na op den cirkelomtrek, die de horizontale projectie eener schroeflijn is, een willekeurig punt als horizontale projectie van een punt van den eersten schroefgang aangenomen te hebben, wil men de verticale projectie, de raaklijn, en het tangentiale vlak van dat punt construeren; zonder vooraf de verticale projectie der kromme te bepalen.*

Laat (M' , mM'') de as, (A' , A'') het beginpunt der schroeflijn, en P' de aangenomene projectie van een punt van den eersten schroefgang zijn (Fig. 141). Trekken wij dan uit P' eene raaklijn aan den cirkel $M'A'$; maken wij, van P' af gerekend, de lengte dier raaklijn $P'Q'$ gelijk aan de lengte van den cirkelboog $P'A'$; trekken wij daarna de lijn $Q'P$, die met $Q'P'$ eenen hoek gelijk aan den gegeven hellingshoek der schroeflijn maakt; en stellen wij eindelijk, uit P' op $Q'P'$ eene loodlijn, die $Q'P$ er-

gens in P ontmoet; dan is deze loodlijn $P'P$ de werkelijke hoogte van het punt van den eersten schroefgang, dat P' tot horizontale projectie heeft. Want stelt men zich voor, dat de regthoekige driehoek $PQ'P'$ om de lijn $Q'P'$ wordt opgerigt, tot dat hij loodrecht op het horizontale vlak komt, en dat daarna het vlak van dien driehoek om het horizontaal-projecterend cilindervlak der schroeflijn wordt gewikkeld, dan zal hierbij de regthoekszijde $P'Q'$ langs den boog $P'A'$, en het punt Q' in A' komen, waardoor de schuine zijde $Q'P$ het deel der schroeflijn wordt, dat $A'P'$ tot horizontale projectie heeft. Door $pP'' = P'P$ te nemen, wordt dus vooreerst de begeerde verticale projectie P'' gevonden.

Bij de oprigting van den driehoek $PQ'P'$ wordt $P'P$ eene beschrijvende lijn van het genoemde cilindervlak, die in het punt (P', P'') door PQ' onder het complement van den hellingshoek gesneden wordt. Derhalve wordt PQ' het verlengde van het element der schroeflijn dat zich in (P', P'') bevindt, dat is met andere woorden, de lijn PQ' wordt de raaklijn van het punt (P', P'') der schroeflijn. Daar nu deze raaklijn het horizontale vlak blijkbaar in Q' snijdt, behoeven wij slechts $Q'Q''$ loodrecht op de as en daarna $P''Q''$ te trekken, om de raaklijn $(P'Q', P''Q'')$ van het punt (P', P'') der schroeflijn te bekomen.

Trekken wij aan den cirkel $M'A'$ meerdere raaklijnen $R'S$, die van het raakpunt af gerekend even lang zijn als de overeenkomstige bogen $R'A'$, dan wordt desgelijks, in de hierdoor bepaalde punten S , het horizontale vlak gesneden door de raaklijnen van de zich in R' projecterende punten der schroeflijn. Door dus een genoegzaam aantal zoodanige punten S te construeren, verkrijgen wij de kromme lijn $A'SQ'S$ (*), in wier opvolgende punten het horizontale vlak door de opvolgende raaklijnen der schroeflijn gesneden wordt. Trekken wij dus door het punt Q' eene raaklijn TT , aan die kromme lijn, dan is volgens § 189 deze raaklijn de horizontale doorgang van het begeerde tangentiale vlak, waarvan dan weder, omdat het door het punt (P', P'') gaat, de verticale doorgang TT , onmiddellijk volgens § 85 gevonden wordt.

(*) Deze krommelijn is de zogenoemde *ontwinnende kromme van den cirkel*. Is namelijk om den cirkel $M'A'$ een volkomen buigbare en onrekbare draad gewonden, die in A' eindigt, en wordt die draad van den cirkel derwijze afgewonden, dat het afgewonden deel altijd in het vlak des cirkels regt gespannen blijft, dan zal zijn uiteinde A' blijkbaar de kromme lijn $A'SQ'S$ beschrijven.

De kromme lijn $A'SQ'S$ heeft (zie *Hoogere Meetk.* § 231) de eigenschap, dat de raaklijn in Q' loodregt op $P'Q'$ staat; tot het construeren van het tangentiale vlak (T, TT_{∞}) is het dus niet noodig die kromme lijn of eenige van hare punten werkelijk te construeren.

Het behandelde werkstuk kan tot opheldering dienen, van hetgeen wij in het laatste gedeelte van § 184 aanvoerden.

OVER DE WORDING EN CONSTRUCTIE

DER GEBOGENE OPPERVLAKKEN.

§ 194. Zooals in § 173 is opgemerkt, kunnen kromme lijnen, die aan geenerlei voorwaarden voldoen, geheel naauwkeurig door middel van projectievlakken voorgesteld worden. Met gebogene vlakken is het niet evenzoo gelegen; want het projecteren van al de verschillende punten eens gebogen vlaks, is aan hetzelfde bezwaar onderworpen, dat wij reeds in § 38 ten aanzien van een plat vlak leerden kennen.

De naauwkeurige voorstelling van gebogene vlakken, door middel van projectievlakken, moet zich alzoo noodwendig beperken tot zoodanige gebogene vlakken, die aan bepaalde voorwaarden voldoen, en waarvan dus de *wording*, dat is de wet volgens welke zij ontstaan of de wijze waarop zij voortgebracht worden, bekend is. Het zijn dan ook alleen dergelijke gebogene vlakken, die in de beschrijvende meetkunst een onderwerp van beschouwing kunnen uitmaken.

§ 195. De projectievlakken kunnen wel dienen om een gebogen vlak, dat aan geenerlei voorwaarde voldoet, *bij benadering* voor te stellen. Eene dergelijke voorstelling, die voorzeker in het werkdadige van groot nut kan zijn, maar geene wiskunstige bepaling van het gebogen vlak oplevert, is echter zoo eenvoudig, dat zij bijna geene aanwijzing behoeft.

Zoo kan b. v. het oppervlak van eenen berg voorgesteld worden door de horizontale projectiën $a'a'$, $b'b'$, $c'c'$, enz. (Fig. 142) van een aantal kromme lijnen, volgens welke dat oppervlak gesneden wordt door horizontale vlakken, op bepaalde hoogten $a_{II}a_{II}$, $b_{II}b_{II}$, $c_{II}c_{II}$, enz. genomen; maar deze voorstelling beslist

niets ten aanzien van den vorm, dien het oppervlak tusschen deze kromme lijnen heeft. Door bovendien nog meer stelsels van snijdende vlakken, b. v. een stelsel van evenwijdige verticale vlakken, te bezigen, kan men de voorstelling van het oppervlak wel eenigzins naauwkeuriger maken, maar zij bevat dan altijd nog slechts een net van kromme lijnen, waarin de tusschenruimten door de verbeelding op eene zoodanige willekeurige wijze kunnen aangevuld worden, als het best met den stoffelijken aard van het voorgestelde voorwerp strookt.

Op eene dergelijke wijze is men bij den scheepsbouw gewoon, den vorm van de buitenoppervlakte der schepen, door *waterlijnen*, *spanten*, en andere stelsels van doorsneden te bepalen.

§ 196. Elk gebogen vlak, dat door genoegzame voorwaarden bepaald is, kan beschouwd worden als de meetkundige plaats te zijn van de achtereenvolgende standen, die eene beweegbare regte of kromme lijn in de ruimte aanneemt, wanneer zij volgens eene bepaalde wet en geleidelijk, of alleen van plaats, of tevens van plaats en van gedaante, verandert.

De beweegbare lijn noemt men de *beschrijvende lijn*; door van de beschrijvende lijnen eens oppervlaks in het meervoud te spreken, bedoelt men niets anders dan de beschrijvende lijn in hare verschillende standen. De wet, die de beschrijvende lijn volgen moet om het oppervlak voort te brengen, wordt gewoonlijk, hetzij geheel hetzij ten deele, bepaald, door een of meer kromme of regte lijnen aan te wijzen, waarop zij steeds moet blijven rusten, of ten opzichte waarvan zij een bepaalden stand moet behouden; deze kromme of regte lijnen noemt men dan *rigtlijnen*. Indien de beschrijvende lijn eene regte lijn of eene vlakke kromme lijn is, kan hare beweging ook ten deele bepaald worden, door een plat vlak aan te wijzen, waaraan zij steeds evenwijdig moet blijven; zulk een vlak wordt dan *een rigtvlak* genoemd. Moet de beschrijvende lijn, bij hare beweging, altijd op het ronde oppervlak van eenig ligchaam blijven rusten, dan heet ook dit ronde oppervlak een *rigtvlak*.

Heeft de wijze, waarop een gebogen vlak ontstaat, ten gevolge dat het zamengesteld is uit deelen, waartusschen eene onmiskensbare afscheiding bestaat, dan heeten die deelen *de bladen* van het gebogen vlak.

Gebogen vlakken, die slechts van elkander verschillen door het

aannemen van andere rigtlijnen of rigtvlakken, beschouwt men als tot een en hetzelfde *geslacht* te behooren.

Daar elk gebogen vlak op ontelbaar vele wijzen door eenig stelsel van vlakken gesneden kan worden, is het ook vatbaar om op ontelbare manieren, telkens door eene andere beschrijvende lijn, voortgebragt of beschreven te worden. Een gebogen vlak kan dus gelijktijdig tot verschillende geslachten behooren. Zoo behoort een regt cirkelvormig kegelvlak (*Meetek.* § 407) zoowel tot het geslacht der omwentelingsvlakken, als tot dat der kegelvlakken.

Bij de wording van eenig omwentelingsvlak, zooals die in de meetkunst verklaard is (*Meetek.* § 406), is de lijn die men om de as laat wentelen de beschrijvende lijn, terwijl men den cirkel, door een bepaald punt van die lijn beschreven, als eene rigtlijn kan aannemen. Datzelfde omwentelingsvlak ontstaat echter ook, indien men de eerstbeschouwde beschrijvende lijn, in een van hare standen, tot rigtlijn, — en een cirkel, die zoowel van grootte als van plaats verandert, tot beschrijvende lijn neemt; het omwentelingsvlak wordt dan voortgebragt door een cirkelomtrek, die steeds op de nieuwe rigtlijn blijft rusten, terwijl zijn vlak loodrecht blijft op eene rechte lijn, waarlangs zijn middelpunt zich verplaatst. Het is eigenlijk alleen door deze laatste wijze van wording der omwentelingsvlakken te beschouwen, dat men hen allen kan aanmerken als tot een en hetzelfde geslacht te behooren.

§ 197. Is de beweging, en zoo het te pas komt ook de gelijktijdige verandering, die eene gegevene beschrijvende lijn ondergaat, met behulp van gegevene rigtlijnen of rigtvlakken, door eene aangewezene wet vastgesteld, en is bijgevolg het gebogen vlak, dat door deze beschrijvende lijn wordt voortgebragt, zoo in stand als in vorm bepaald, dan zal men die beschrijvende lijn in hare verschillende standen kunnen projecteren. Kiest men daartoe zoovele en zulke standen der beschrijvende lijn, als het geschiktst zijn om hunne aaneenschakeling duidelijk te doen inzien, dan heeft men door middel der projectievlakken eene voorstelling van het gebogen vlak verkregen, die volkomen naauwkeurig is, omdat men altijd bij magte is, de beschrijvende lijn in zoodanige tuschenstanden te construeren, als men tot het een of ander oogmerk noodig mogt hebben.

Het gebeurt niet zelden, dat de projectiën van alle mogelijke

standen der beschrijvende lijn, door de projectiën van een paar bijzondere standen, worden ingesloten. In zulke gevallen construeert men deze laatste projectiën bij voorkeur, omdat zij als grenslijnen bijzonder geschikt zijn, om de voorstelling van het gebogen vlak duidelijk te maken.

Na de voorgaande algemeene beschouwingen, zullen wij thans de voornaamste geslachten van gebogene vlakken afzonderlijk behandelen.

DE KEGELVLAKKEN.

§ 198. Wanneer eene regte lijn, als beschrijvende lijn, zich zoodanig beweegt, dat zij altijd door een en hetzelfde punt blijft gaan en langs eene kromme lijn van enkele of dubbele kromming glijdt, beschrijft zij *een kegelvlak*. Dit punt is *de top*, en deze kromme lijn *de rigtlijn* van het kegelvlak. Het kegelvlak zou in een plat vlak overgaan, indien de rigtlijn eene vlakke kromme en de top in haar vlak gelegen was; men onderstelt dus, dat dit het geval niet is.

Daar men zich de beschrijvende lijn aan weerszijden van den top onbepaaldelijk verlengd moet voorstellen, bestaat het kegelvlak uit twee aan weerszijden van den top gelegene deelen, die bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn. Elk dezer deelen is *een blad* van het kegelvlak.

Een kegelvlak blijft blijkbaar onveranderd, wanneer men de rigtlijn, door eene willekeurige kromme lijn op dat kegelvlak getrokken, als nieuwe rigtlijn vervangt.

Snijdt men het kegelvlak door platte vlakken, die door den top gaan, dan volgt uit de opgegevene wordingswijze onmiddellijk, dat de doorsneden beschrijvende lijnen en dus regte lijnen zijn.

Is de rigtlijn eene geslotene kromme lijn, zoo kan ook het kegelvlak door eenig plat vlak volgens eene geslotene kromme gesneden worden. Het ligchaam, dat dan door dit platte vlak en het kegelvlak begrensd wordt, heet *een kegel*, die het ingesloten deel van het platte vlak tot *grondvlak* of *basis* heeft.

De eenvoudigste kegel is *de rechte cirkelvormige*, die wij reeds in de meetkunst hebben leeren kennen. De *scheeve cirkelvormige kegel* heeft een cirkel tot grondvlak, maar de lijn, die het middel-

punt van dit grondvlak met den top vereenigt, staat niet loodrecht op het grondvlak.

§ 199. Elke kegel kan, even als dit in de meetkunst ten aanzien van den regten cirkelvormigen kegel verklaard is (*Meetk.* § 420), als eene piramide van een oneindig groot aantal zijden beschouwd worden; uit de eigenschappen der piramide (*Meetk.* § 356) volgt dan onmiddellijk, dat, wanneer een kegel gesneden wordt door een stelsel van evenwijdige vlakken, die al de beschrijvende lijnen snijden, de doorsneden gelijkvormige figuren zijn, wier lengte-afmetingen evenredig zijn met de afstanden die zij van den top hebben.

Het kegelvlak kan dus ook voortgebracht worden, door den omtrek van zulk eene doorsnede, als veranderende beschrijvende lijn. Die beschrijvende lijn moet dan gelijkvormig met zich zelf en haar vlak evenwijdig met zich zelf blijven, terwijl hare gelijkstandige punten zich bewegen langs rechte lijnen, die naar den top loopen, en hier als rigtlijnen te beschouwen zijn.

Volgens deze wordingwijze zouden echter niet alle kegelvlakken tot een en hetzelfde geslacht behooren. Daarom is men gewoon zich tot de in § 198 opgegevene wording te bepalen, terwijl men daarbij steeds eene rigtlijn bezigt, die zich in het horizontale projectie-vlak bevindt. Elk kegelvlak wordt dus gewoonlijk door zijnen top en zulk eene rigtlijn bepaald.

§ 200. WERKSTUK. *Wanneer een kegelvlak bepaald is door zijn top, en door eene rigtlijn van enkele of dubbele kromming, die zich in de ruimte bevindt, begeert men voor dat kegelvlak de nieuwe rigtlijn, die in het horizontale vlak gelegen is, te construeren.*

Zij (T' , T'') de top en ($a'b'$, $a''b''$) de rigtlijn in de ruimte (Fig. 148). Neem dan in die rigtlijn een willekeurig punt (p' , p'') aan, en trek uit den top (T' , T'') door dat punt (p' , p'') eene rechte lijn, zoo is dit de beschrijvende lijn in een van hare standen; construeer dus verder het ontmoetingspunt P van deze lijn met het horizontale vlak, zoo is dit punt P een gemeenschappelijk punt van het kegelvlak en het horizontale vlak, dat is: een punt van de begeerde nieuwe rigtlijn. Door nu deze constructie te herhalen, voor een genoegzaam aantal punten in de kromme lijn ($a'b'$, $a''b''$) aangenomen, zal men zoovele punten van de nieuwe rigtlijn APB bekomen, dat deze, met genoegzame naauwkeurigheid, uit de hand door die punten kan getrokken worden.

De alzoo geconstrueerde kromme lijn APB is blijkbaar de horizontale doorgang des kegelvlak; dat is: de gemeene doorsnede van het kegelvlak met het horizontale.

§ 201. WERKSTUK. *Een kegelvlak, waarvan de rigtlijn eene in het horizontale vlak liggende geslotene kromme is, op de projectievlakken voor te stellen.*

Indien (T' , T'') de top en ABCD de rigtlijn is (Fig. 144), zal elke rechte lijn, door dezen top en een willekeurig punt van de rigtlijn getrokken, een stand van de beschrijvende lijn zijn. Trekt men dus uit T' de raaklijnen $T'A$ en $T'C$ aan de rigtlijn, zoo verkrijgt men de beschrijvende lijnen ($T'A$, $T''A''$) en ($T'C$, $T''C''$), tusschen wier horizontale projectiën, als uiterste standen, die van al de overige beschrijvende lijnen vallen. Trekt men aan de rigtlijn de raaklijnen BB'' en DD'' loodregt op de as van projectie, dan verkrijgt men evenzoo de beschrijvende lijnen ($T'B$, $T''B''$) en ($T'D$, $T''D''$), wier verticale projectiën uiterste standen zijn.

Daar dus de punten des kegelvlak, wat hunne horizontale projectiën betreft de lijnen $T'A$ en $T'C$ en wat hunne verticale projectiën betreft de lijnen $T''B''$ en $T''D''$ tot grenzen hebben, maken deze vier lijnen, die men als onbepaaldelijk verlengd moet beschouwen, met de rigtlijn, de voorstelling van het kegelvlak uit, tot welks tweede blad de verlengden $T'a$, $T'c$, $T''b$ en $T''d$ behooren.

Ligt, zooals in onze figuur, de horizontale projectie T' van den top buiten de geslotene rigtlijn ABCD, dan is een gedeelte van die rigtlijn, hier het gedeelte ADC, onzichtbaar; en wel omdat het deel des kegelvlak, tot het deel ABC der rigtlijn behorende, er over heen gaat. Alzoo is ook onzichtbaar de horizontale projectie $T'D$ der beschrijvende lijn, die uit den top naar eenig punt van ADC loopt. Evenzoo is de verticale projectie $T''A''$ onzichtbaar, van de beschrijvende lijn, die tot eenig punt van het deel BAD der rigtlijn behoort.

Ligt T' binnen de geslotene rigtlijn ABCD, zooals in Fig. 145 is voorgesteld, dan blijft de geheele rigtlijn zichtbaar, terwijl het trekken der raaklijnen uit T' vervalst; de voorstelling van het kegelvlak op het horizontale projectievlak bestaat in dit geval eeniglijk uit het punt T' en de rigtlijn ABCD.

§ 202. WERKSTUK. *Een' kegel te projecteren, als het grondvlak, de hoogte, en de projectie van den top op het grondvlak, gegeven zijn.*

Gemakshalve plaatst men hierbij den kegel met zijn grondvlak

op het horizontale vlak, als wanneer de omtrek des grondvlak-
tevens de rigtlijn van het kegeloppervlak is. Laat dan ABCD
(Fig. 144, 145 of 146) het gegeven grondvlak, en T' de pro-
jectie van den top op het grondvlak, dus ook de horizontale
projectie van den top, zijn; indien men dan, na de lijn $T'T''$ regt-
hoekig door de as van projectie getrokken te hebben T'' gelijk
aan de gegevene hoogte neemt, is T'' de verticale projectie van
den top. Ligt het gegevene punt T' buiten het grondvlak, zooals
in Fig. 144, dan construeert men even als in het voorgaande
werkstuk de lijnen $T'A$, $T'C$, $T''B''$ en $T''D''$, die men nu echter
niet meer als onbepaaldelijk verlengd beschouwt. Hierdoor heeft
men dan onmiddellijk $T'ABCD$ voor de horizontale, en $T''B''D''$
voor de verticale projectie van den kegel. Ligt echter het punt
 T' binnen het grondvlak ABCD, zooals in Fig. 145 en 146, dan
vervalt het trekken der raaklijnen $T'A$ en $T'C$ in het horizontale
vlak; het opstaande oppervlak des kegels heeft dan eene in zijn
geheel zichtbare horizontale projectie $T'ABCD$, terwijl de gedeeltelijk
zichtbare verticale projectie even als in Fig. 144 verkregen wordt.

Is het grondvlak ABCD een cirkel, die T' tot middelpunt heeft,
zooals in Fig. 146, dan is de geprojecteerde kegel een regte cir-
kelvormige. Is echter ABCD wel een eirkel, maar T' zijn mid-
delpunt niet, zooals in Fig. 145, dan is de kegel een scheeve
cirkelvormige; trekt men dan door T' eene middellijn RS in het
grondvlak, zoo vindt men de punten R en S die de kortste en
langste beschrijvende lijnen op het oppervlak bepalen. Dit geldt
ook, indien het punt T' buiten den cirkel mogt liggen.

Moest een kegel in andere standen met betrekking tot het ho-
rizontale vlak geprojecteerd worden, dan zou men eene behoorlijke
toepassing van het werkstuk van § 110 kunnen maken, na vooraf
de boven aangewezen projectiën bepaald te hebben.

§ 203. WERKSTUK. *De verticale projectie van eenig punt eens ge-
geven kegelvlak te construeren, indien de horizontale projectie van
dat punt gegeven is.*

Zij M' de gegevene horizontale projectie van een punt des kegel-
vlak (Fig. 143, 144, 145 of 146); indien wij dan uit T' eene
lijn door M' trekken, die de in het horizontale vlak liggende
rigtlijn in eenig punt P snijdt, is deze lijn $T'P$ de horizontale
projectie van de beschrijvende lijn, waarop het bedoelde punt
zich bevindt; en door dan PP'' loodregt op de as te trekken,

vinden wij ook de verticale projectie $T''P''$ van de genoemde beschrijvende lijn. Daar alzoo $T''P''$ de verticale projectiën moet bevatten van de punten des kegelvlak, wier horizontale projectiën in $T'P$ gelegen zijn, is eene lijn, uit M' regthoekig door de as getrokken, genoegzaam om de begeerde verticale projectie M'' te bekomen.

Indien de lijn, uit T' door M' getrokken, de rigtlijn niet ontmoette of sneed, zou dit een bewijs zijn, dat het punt M' buiten de in § 201 aangewezen grenzen genomen was, en dus geenszins de horizontale projectie van een punt des kegelvlak zijn kon.

Wordt de rigtlijn door de lijn $T'M'$ meermalen, bijv. in de punten P en Q (Fig. 144, 145 en 146) gesneden, zoo zijn er ook meer beschrijvende lijnen, die hare horizontale projectiën langs $T'M'$, en dus ook meer punten des kegelvlak, die hunne horizontale projectiën in M' hebben. Zoo vinden wij in Fig. 144 twee punten (M', M'') en (M', m'') des kegelvlak, wier horizontale projectiën in het gegeven punt M' vallen.

Voorts kan een punt des kegelvlak, dat zich in het gegeven punt M' projecteert, zeer wel onder het horizontale vlak, of op het tweede blad van het kegelvlak liggen; hetgeen alleen van den stand der gegevens afhangt. Het punt (M', M'') van Fig. 145 verkeert in het eerste, — het punt (M', m'') van Fig. 146 verkeert in het laatste geval.

Wordt het kegelvlak door eene rigtlijn ($a'b', a''b''$) in de ruimte bepaald (Fig. 143), dan is het tot oplossing van ons werkstuk niet noodig de nieuwe rigtlijn APB te construeren. Het snijpunt p' toch van $T'M'$ met $a'b'$, wijst onmiddellijk in $a''b''$ het punt p'' aan, waardoor men de verticale projectie kan trekken der beschrijvende lijn, die het punt (M', M'') bevat.

Eindelijk is eene aandachtige beschouwing onzer figuren toereikend, om dadelijk in te zien hoe men omgekeerd de horizontale projectie van een punt eens kegelvlak construeren kan, indien de verticale projectie van dat punt gegeven is.

§ 204. Wordt eene rechte lijn derwijze bewogen, dat zij steeds door een en hetzelfde punt blijft gaan en ook steeds op het ronde oppervlak van eenig ligchaam blijft rusten, dan beschrijft die lijn blijkbaar een kegelvlak, dat het bedoelde ligchaam omvat, en uit dien hoofde een omhullingskegel van dat ligchaam genoemd wordt.

Bij deze omhulling, die wij ten aanzien van een bol reeds in

§ 159 leerden kennen, wordt de aaneenschakeling der punten, waarin de beschrijvende lijn op het oppervlak des ligchaams rust, *de aanrakingskromme* genoemd. Deze aanrakingskromme, die slechts in bijzondere gevallen eene vlakke kromme lijn zal wezen, is dan blijkbaar de rigtlijn van het omhullende kegelvlak.

DE CILINDERVLAKKEN.

§ 205. Wanneer eene rechte lijn, als beschrijvende lijn, zich zoodanig beweegt, dat zij altijd evenwijdig met eene gegevene rigting blijft en langs eene kromme lijn van enkele of dubbele kromming glijdt, beschrijft zij *een cilindervlak*, dat deze kromme lijn tot *rigtlijn* heeft. Een cilindervlak kan dus beschouwd worden als een kegelvlak met oneindig ver verwijderden top. Het cilindervlak zou in een plat vlak overgaan, indien de rigtlijn eene vlakke kromme was, en de rigting der beschrijvende lijn door eene rechte lijn in (of evenwijdig met) het vlak der rigtlijn bepaald werd; men onderstelt dus dat dit het geval niet is.

Een cilindervlak blijft blijkbaar onveranderd, wanneer men de rigtlijn door eene willekeurige kromme lijn, op dat cilindervlak getrokken, als nieuwe rigtlijn vervangt.

De cilindervlakken, die wij reeds als projecterende vlakken van kromme lijnen hebben leeren kennen, hebben de projectiën dier kromme lijnen tot rigtlijnen, terwijl hunne beschrijvende lijnen loodregt op de projectievlakken staan.

Wordt een cilindervlak gesneden door platte vlakken, die evenwijdig met de gegevene rigting der beschrijvende lijn zijn, dan volgt uit de opgegevene wordingswijze onmiddellijk, dat de doorsneden beschrijvende lijnen, en dus rechte lijnen, zijn.

Is de rigtlijn eene geslotene kromme lijn, zoo kan ook het cilindervlak door eenig plat vlak volgens eene geslotene kromme gesneden worden. Het ligchaam, dat dan door twee zulke onderling evenwijdige vlakken en het cilindervlak begrensd wordt, heet *een cilinder*, die de ingeslotene deelen dezer platte vlakken tot *grond- en bovenvlak* heeft.

Een cilinder heet *regt* of *scheef*, naargelang zijne beschrijvende lijnen al of niet loodregt op het grondvlak staan. De eenvoudigste cilinder is *de rechte cirkelvormige*, die wij reeds in de meetkunst

leerden kennen. *De scheeve cirkelvormige cilinder* heeft onderling gelijke cirkels tot grond- en bovenvlak, maar de lijn, die de middelpunten dezer cirkels vereenigt, staat niet loodrecht op deze vlakken.

§ 206. Elke cilinder kan (*Meetk.* § 424) als een prisma van een oneindig groot aantal zijden beschouwd worden; uit de eigenschappen van het prisma (*Meetk.* § 356) volgt dan, dat, wanneer een cilinder gesneden wordt door een stelsel van evenwijdige vlakken, die al de beschrijvende lijnen snijden, de doorsneden gelijke en gelijkvormige figuren zullen zijn.

Een cilindervlak kan dus ook voortgebragt worden, door den omtrek van zulk eene doorsnede als beschrijvende lijn. Die beschrijvende lijn moet zich dan zoodanig bewegen, dat haar vlak evenwijdig met zich zelf blijft, en dat al hare punten onderling evenwijdige rechte lijnen volgen, die dan hier als rigtlijnen voorkomen. Deze wordingswijze zou echter niet alle cilindervlakken tot een en hetzelfde geslacht brengen; daarom beschouwt men gewoonlijk alleen de in § 205 opgegevene wording, terwijl men daarbij steeds eene in het horizontale projectievlak liggende rigtlijn gebruikt. Elk cilindervlak wordt dus gewoonlijk bepaald door zulk eene rigtlijn, en door de projectiën van eene rechte lijn, die de rigting der beschrijvende lijnen aanwijst.

Voor zoover echter de rigting der beschrijvende lijnen evenwijdig met het horizontale vlak mogt loopen, kan het cilindervlak geene in het horizontale vlak liggende rigtlijn hebben; in dit geval is men dus verplicht, eene andere rigtlijn te behouden, die dan gemakshalve in eenig verticaal vlak kan genomen worden.

§ 207. **WERKSTUK.** *Wanneer een cilindervlak bepaald is door de rechte lijn, die de rigting der beschrijvende lijnen aanwijst, en door eene rigtlijn van enkele of dubbele kromming, die zich in de ruimte bevindt, begeert men voor dat cilindervlak de nieuwe rigtlijn, die in het horizontale vlak ligt, te construeren.*

De begeerde nieuwe rigtlijn, die blijkbaar niet anders dan de horizontale doorgang van het cilindervlak is, wordt hier volkomen op dezelfde wijze geconstrueerd als in § 200; alleen met dit onderscheid, dat men nu, door de punten der gegevene rigtlijn, beschrijvende lijnen evenwijdig met de gegevene rechte lijn trekt, en dan de ontmoetingspunten van deze beschrijvende lijnen met het horizontale vlak bepaalt.

Wij laten dus de uitvoering dezer constructie aan den lezer over; en merken alleen op, dat ons werkstuk blijkens het slot der voorgaande § vervalt, indien de rigting der beschrijvende lijnen evenwijdig met het horizontale vlak mogt gegeven zijn.

§ 208. WERKSTUK. *Een cilindervlak, waarvan de rigtlijn eene in het horizontale vlak liggende geslotene kromme is, op de projectievlakken voor te stellen.*

Zij ABCD (Fig. 147) de rigtlijn, en laat ($T'U'$, $T''U''$) de rigting der beschrijvende lijnen aanwijzen, dan zal elke regte lijn, door eenig punt van ABCD evenwijdig met ($T'U'$, $T''U''$) getrokken, een stand der beschrijvende lijn wezen. Trekt men dus, in het horizontale vlak en evenwijdig met $T'U'$, de raaklijnen Aa' en Cc' aan de rigtlijn; laat men daarna uit de raakpunten A en C loodlijnen AA'' en CC'' op de as vallen; en trekt men vervolgens de lijnen $A''a''$ en $C''c''$ evenwijdig met $T''U''$, zoo verkrijgt men de beschrijvende lijnen (Aa' , $A''a''$) en (Cc' , $C''c''$), wier horizontale projectiën de uiterste standen hebben. Trekt men aan de rigtlijn de raaklijnen BB'' en DD'' loodrecht op de as, daarna uit de raakpunten B en D de lijnen Bb' en Dd' evenwijdig met $T'U'$, en vervolgens de lijnen $B''b''$ en $D''d''$ evenwijdig met $T''U''$, zoo vindt men gelijkertijde de beschrijvende lijnen (Bb' , $B''b''$) en (Dd' , $D''d''$), wier verticale projectiën de uiterste standen hebben.

Daar dus de punten des cilindervlaks, wat hunne horizontale projectiën betreft de lijnen Aa' en Cc' en wat hunne verticale projectiën aangaat de lijnen $B''b''$ en $D''d''$ tot grenzen hebben, maken deze vier lijnen, die men als onbepaaldelijk verlengd moet beschouwen, met de rigtlijn, de voorstelling van het cilindervlak uit.

Even als bij het kegelvlak worden, door de raakpunten A en C, een zichtbaar en een onzichtbaar deel der rigtlijn van elkander afgescheiden. Bij de helling, die wij in onze figuur aan de lijn ($T'U'$, $T''U''$) gegeven hebben, is het deel ABC onzichtbaar, en dus ook de horizontale projectie Bb' der beschrijvende lijn tot eenig punt van dat deel behoorende. Desgelijks is de verticale projectie $A''a''$ onzichtbaar, van de beschrijvende lijn, die tot eenig punt van het deel BAD der rigtlijn behoort.

Staan de beschrijvende lijnen loodrecht op het horizontale vlak, zooals in Fig. 148 is voorgesteld, dan worden hare horizontale projectiën enkele punten, die op de rigtlijn ABCD gelegen zijn.

In dat geval bepaalt zich dus de voorstelling van het cilindervlak tot het aanwijzen van de uiterste standen $B''b''$ en $D''d''$ van de verticale projectiën der beschrijvende lijnen, terwijl de geheele rigtlijn zichtbaar blijft.

Wanneer de beschrijvende lijnen, zonder loodregt op het horizontale vlak te staan, de as van projectie regthoekig kruisen, zou men, om eene goede voorstelling des cilindervlaks te bekomen, een derde projectievlak moeten aannemen.

§ 209. WERKSTUK. *Eenen cilinder te projecteren, indien het grondvlak, de hoogte, en de rigting der beschrijvende lijnen, gegeven zijn.*

Den cilinder plaatst men met zijn gegeven grondvlak ABCD (Fig. 147) op het horizontale vlak, dan ligt zijn bovenvlak in een vlak, dat op de gegevene hoogte evenwijdig met het horizontale loopt, en waarvan dus de verticale doorgang $V''V''$ onmiddellijk kan getrokken worden. Daar de omtrek van het grondvlak tevens de rigtlijn van het cilinderoppervlak is, kan men volgens het voorgaande werkstuk de beschrijvende lijnen (Aa' , $A''a''$), (Bb' , $B''b''$), (Cc' , $C''c''$) en (Dd' , $D''d''$) construeren, wier projectiën de uiterste standen hebben. Construeert men dan verder de snijpunten (E' , E''), (F' , F''), (G' , G'') en (H' , H'') van deze beschrijvende lijnen met het vlak ($V''V''$), dan zijn dit vier punten van den omtrek des bovenvlaks. Maar het bovenvlak is gelijk en gelijkvormig met het grondvlak (§ 206) en projecteert zich op het horizontale vlak in zijne ware gedaante (§ 20), terwijl de vier geconstrueerde punten respectievelijk gelijkstandig met de punten A, B, C en D zijn. Men behoeft dus slechts de kromme lijn $E'F'G'H'$ te teekenen, die gelijk en gelijkvormig met ABCD is, en wel zoodanig, dat E' met A, en G' met C gelijkstandig worde, om terstond de horizontale projectie $E'F'G'H'$ van het bovenvlak te bekomen, dat blijkbaar $F''H''$ tot verticale projectie heeft.

Alzoo is dan $ABCDE'F'G'H'$ de horizontale en $D''B''F''H''$ de verticale projectie van den cilinder.

Staan de beschrijvende lijnen loodregt op het grondvlak, zooals in Fig. 148, dan vindt men, door het vlak ($V''V''$) op de gegevene hoogte te plaatsen, wederom de verticale projectie $D''B''F''H''$ van den cilinder, wiens horizontale projectie dan juist het grondvlak ABCD bedekt.

§ 210. WERKSTUK. *De verticale projectie van eenig punt eens ge-*

geven cilindervlaks te construeren, indien de horizontale projectie van dat punt gegeven is.

Laat het punt M' , dat naar behooren tusschen de grenslijnen Aa' en Cc' is genomen, de horizontale projectie van eenig punt van het in Fig. 147 voorgestelde cilindervlak zijn; trekken wij dan door M' en evenwijdig met $T'U'$ eene lijn, die de rigtlijn ergens in P snijdt; laten wij vervolgens de loodlijn PP'' op de as neder, en trekken wij $P''p''$ evenwijdig met $T''U''$, zoo is $(Pp', P''p'')$ de beschrijvende lijn, die het bedoelde punt bevat. Het punt M'' , waar $P''p''$ ontmoet wordt door eene lijn, uit M' regthoekig door de as getrokken, is dus de begeerde verticale projectie.

Indien de lijn, door M' evenwijdig met $T'U'$ getrokken, de rigtlijn meermalen snijdt, is zij ook de horizontale projectie van meerdere beschrijvende lijnen, en men vindt dan almede op het cilindervlak meerdere punten, die dezelfde horizontale projectie M' hebben. In onze figuur wordt de rigtlijn door Pp' in een tweede punt Q gesneden; hierdoor verkrijgen wij nog de beschrijvende lijn $(Qp', Q''q'')$, waarop het punt (M', m'') des cilindervlaks gelegen is.

Bij het rechte cilindervlak, in Fig. 148 voorgesteld, kan de horizontale projectie M' niet anders dan ergens op de rigtlijn $ABCD$ worden genomen; terwijl dan voor de verticale een willekeurig punt M'' , op de lijn uit M' regthoekig door de as getrokken, kan genomen worden.

Voor het overige gelden hier nog enkele soortgelijke opmerkingen, als wij in § 203 ten aanzien van het kegelvlak gemaakt hebben.

§ 211. Wanneer de beweegbare lijn, die wij in § 204 beschouwden, in plaats van door een bepaald punt te blijven gaan, steeds evenwijdig met zich zelf blijft, beschrijft zij een cilindervlak, dat den naam van *omhullingscilinder* draagt, en waarop volkomen toepasselijk is hetgeen wij in § 204 met betrekking tot den omhullingskegel aanvoerden.

DE OMWENTELINGSVLAKKEN.

§ 212. Wanneer eene rechte lijn, of eene kromme lijn van enkele of dubbele kromming, als beschrijvende lijn, zoodanig om eene

vaste rechte lijn wordt gewenteld, dat ieder punt dezer wentelende lijn een cirkelomtrek doorloopt, wiens middelpunt in – en wiens vlak loodregt op – de vaste lijn staat, brengt deze beschrijvende lijn *een omwentelingsvlak* voort. De vaste lijn, die *de as* van het omwentelingsvlak heet, wordt niet zelden, tot vermindering van dubbelzinnigheid, door het woord *omwentelings-as* aangeduid.

De cirkelomtrekken, door de verschillende punten der beschrijvende lijn doorloopen, noemt men *parallelcirkels*; zij hebben blijkbaar tot middelpunten de voetpunten der loodlijnen en tot stralen de loodlijnen zelve, die uit de punten der beschrijvende lijn op de as kunnen worden nedergelaten; vlakken, loodregt op de as gebragt, snijden dan ook het omwentelingsvlak volgens parallelcirkels.

Ligt de beschrijvende lijn niet met de as in een en hetzelfde platte vlak, zoo kan men in elk der parallelcirkels ééne middellijn kiezen, derwijze dat al die middellijnen zich in een en hetzelfde platte vlak bevinden; alsdan ligt ook de as in dat vlak, terwijl de uiteinden dezer middellijnen in het algemeen in twee vlakke kromme lijnen liggen, die, aan weerszijden van de as geplaatst, bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig zijn. Beschouwt men een dezer kromme lijnen als eene nieuwe beschrijvende lijn, die om dezelfde vaste as wentelt, dan doorloopen hare punten, als uiteinden der genoemde middellijnen, wederom dezelfde parallelcirkels; alzoo beschrijft dan ook deze nieuwe beschrijvende lijn wederom hetzelfde omwentelingsvlak. Elk omwentelingsvlak kan dus voortgebragt worden door de wenteling van eene beschrijvende lijn, die met de as in een en hetzelfde platte vlak ligt, en alzoo van enkele kromming is, of ook in bijzondere gevallen regt kan wezen.

Een dergelijke beschrijvende lijn heet, in elk van hare standen, *een meridiaan*; terwijl men den naam van *meridiaanvlak* geeft aan elk vlak, dat door de as gaat. Alle meridianen van een omwentelingsvlak zijn dus gelijk en gelijkvormig, en elk meridiaanvlak snijdt het omwentelingsvlak volgens twee bij tegenoverstand geplaatste meridianen. Wanneer een meridiaanvlak tevens een projectievlak is, of ook wanneer het evenwijdig met een projectievlak mogt zijn, onderscheidt men de in dat vlak gelegene meridianen door de benaming van *hoofdmeridianen*.

Uit het boven aangevoerde blijkt verder ten duidelijkste, dat

een omwentelingsvlak onveranderd blijft, wanneer men de beschrijvende lijn door eene willekeurige kromme lijn, op dat omwentelingsvlak getrokken, als nieuwe beschrijvende lijn, vervangt.

Een ligchaam dat begrensd wordt, hetzij alleen door een omwentelingsvlak, hetzij door een omwentelingsvlak en een of meer platte vlakken loodregt op de as, hetzij door twee of meer omwentelingsvlakken met gemeenschappelijke as, wordt een *omwentelingsligchaam* genoemd. De doorsneden van zulke lichamen, met hunne meridiaanvlakken, zijn hunne *beschrijvende figuren*. De omwentelingsligchamen zijn al of niet *ringvormig*, naargelang hunne beschrijvende figuren niet of al, ten deele door de as begrensd worden (*Meetk.* § 409).

§ 213. Na op een omwentelingsvlak een geheel willekeurige kromme lijn getrokken te hebben, kan men deze als rigtlijn aannemen, en het omwentelingsvlak laten ontstaan, door tot beschrijvende lijn den omtrek van een veranderlijken cirkel te nemen, die, steeds loodregt op de as blijvende, met zijn middelpunt de as, en met eenig punt van zijn omtrek de aangenomene rigtlijn volgt (§ 196). Uit deze wordingswijze geraakt men echter, even als uit die van de voorgaande §, tot het begrip van parallelcirkels en meridianen; en hierdoor wordt het dan verder tamelijk onverschillig, om bij voorkeur de eene of de andere wordingswijze te beschouwen.

Om ten aanzien van de omwentelingsvlakken alles zooveel mogelijk te vereenvoudigen, neemt men de projectievlakken gewoonlijk zoodanig aan, dat de omwentelings-as loodregt op een hunner, b. v. loodregt op het horizontale vlak komt te staan. Hierdoor zal elke parallelcirkel evenwijdig met het horizontale vlak worden, en zich dus op dat vlak in zijne ware gedaante en grootte projecteren; terwijl een der meridiaanvlakken evenwijdig met het verticale zal worden, en dus twee hoofdmeridianen zal bevatten, die zich mede in hunne ware gedaante en grootte op het verticale vlak projecteren.

Heeft men echter gelijktijdig twee omwentelingsvlakken te beschouwen, wier omwentelings-assen niet evenwijdig zijn, zoo kan men slechts één der assen loodregt op het horizontale vlak aannemen. Door in dit geval het verticale vlak evenwijdig met de beide assen te nemen, verkrijgt men dan evenwel weder in de beide omwentelingsvlakken hoofdmeridianen.

§ 214. WERKSTUK. *Een omwentelingsvlak, waarvan de meridiaan in gedaante en in stand ten opzichte van de omwentelings-as gegeven is, op de projectievlakken voor te stellen.*

Volgens hetgeen in de voorgaande § is opgemerkt, stellen wij de omwentelings-as loodregt op het horizontale vlak. Laat alzoo (M' , mM'') die as zijn (Fig. 149, 150 of 151); indien wij dan slechts aan weerszijden van mM'' , en bij tegenoverstand, de kromme lijnen $A''B''C''$ teekenen, die gelijk en gelijkvormig met den gegeven meridiaan zijn, en ten opzichte van mM'' den gegeven stand hebben, zijn deze kromme lijnen onmiddellijk de verticale projectiën der hoofdmeridianen, wier horizontale projectiën vallen langs eene lijn, door M' evenwijdig met de as van projectie getrokken. Deze kromme lijnen zijn blijkbaar tevens de grenzen, die de verticale projectiën van alle punten des omwentelingsvlaksluuiten.

Indien de kromme lijnen $A''B''C''$ zich, zooals in Fig. 149, uit eenig punt van mM'' onbepaaldelijk van mM'' verwijderen, is met hare afteekening de voorstelling van het omwentelingsvlak afgeloopen; want, voor de projectiën van de punten van het omwentelingsvlak, kunnen op het horizontale vlak, in dat geval, geene grenzen aangewezen worden.

Wordt echter in de verticale projectie van den hoofdmeridiaan, zooals in Fig. 150, een punt B'' gevonden, dat zich het verst van mM'' verwijderd, dan heeft het omwentelingsvlak een grootsten parallelcirkel, wiens straal in grootte door $B''b$ wordt voorgesteld, en wiens horizontale projectie dus onmiddellijk uit M' met $M'B' = bB''$ kan beschreven worden. Alsnu zullen de horizontale projectiën van de punten des omwentelingsvlaksluuiten den uit M' beschreven cirkel kunnen vallen, en hier bezigt men derhalve dezen cirkel, nevens de verticale projectiën der hoofdmeridianen, om het omwentelingsvlak voor te stellen.

Komt in de verticale projectie van den hoofdmeridiaan, zooals in Fig. 151 een punt B'' voor, dat zich het digtst bij mM'' bevindt, dan heeft evenzoo het omwentelingsvlak een kleinsten parallelcirkel, wiens horizontale projectie, die weder terstond uit M' met $M'B' = bB''$ kan beschreven worden, eene grens is, waar binnen geene punten van het omwentelingsvlak zich kunnen projecteren, en alzoo hier gebezigd wordt om de voorstelling te voltooien.

Waar een dergelijke kleinste parallelcirkel voorkomt, noemt men dien *de keel* van het omwentelingsvlak.

§ 215. WERKSTUK. *Een omwentelingsligchaam te projecteren.*

Hoe dit geschieden kan is uit het voorgaande werkstuk duidelijk. Zal het ligchaam alleen door een omwentelingsvlak ingesloten worden, zoo moet er een grootste parallelcirkel zijn, en dan heeft men, in de voorstelling van het omwentelingsvlak, gelijktijdig de projectie van het ligchaam. Zoo is reeds in Fig. 150 een omwentelingsligchaam geprojecteerd, dat ($M'B', A''bC''B''A''$) tot beschrijvende figuur heeft.

Wordt het ligchaam door een omwentelingsvlak en een plat vlak begrensd, zoo kan dit platte vlak niet anders dan loodregt op de omwentelings-as staan; bij den aangenomen stand dier as, is het dan evenwijdig met het horizontale projectievlak. Laat nu $V_{,,}V_{,,}$ de verticale doorgang van dit vlak zijn (Fig. 149), zoo is het deel $B''B''$ van dien doorgang, dat tusschen de verticale projectiën der hoofdmeridianen valt, de verticale — en dus een cirkel, uit M' met $M'B' = bB''$ beschreven, de horizontale — projectie van den cirkel, die mede het ligchaam begrenst. De laatst-beschreven cirkel is dus ook de horizontale, en $A''B''bB''A''$ de verticale projectie van een omwentelingsligchaam, dat ($M'B', A''bB''A''$) tot beschrijvende figuur heeft.

In Fig. 151, waar de as van projectie door de verticale projectiën der hoofdmeridianen in A'' gesneden wordt, kan een omwentelingsligchaam door het horizontale projectievlak en een daarmede evenwijdig vlak ($V_{,,}V_{,,}$) begrensd worden. Hier beschrijft men dan uit M' met mA'', bB'' en cC'' cirkels, om de horizontale projectie te bekomen van het omwentelingsligchaam, dat $mA''B''C''cC''B''A''m$ tot verticale projectie, en ($M'C', mbcC''B''A''m$) tot beschrijvende figuur heeft. Omdat in Fig. 151 de straal cC'' van het bovenvlak grooter dan de beide andere stralen is, zijn de horizontale projectiën der beide andere cirkels onzichtbaar. De cirkel met $M'B'$ beschreven stelde echter reeds vroeger de keel van het omwentelingsvlak voor, en is daarom niet gestipt.

§ 216. WERKSTUK. *Een omwentelingsvlak door zijne verticaal staande as en door de projectiën van zijne hoofdmeridianen gegeven zijnde, begeert men de projectiën van een anderen meridiaan te construeren.*

Daar de meridiaanvlakken loodregt op het horizontale vlak staan, is in Fig. 150 elke lijn $M'D'$, uit M' getrokken, de horizontale projectie van een meridiaan, wiens verticale projectie men con-

strueren kan, door na te gaan, waar de punten van den hoofdmeridiaan komen, indien men dezen zoo ver om de as (M' , mM'') laat wentelen, dat $M'B'$ in den stand $M'D'$ komt. Bij deze wenteling zal een willekeurig punt (N' , N'') van den hoofdmeridiaan zich zóó bewegen, dat de horizontale projectie van dit punt, langs den uit M' beschreven cirkelboog $N'P'$, in P' komt; terwijl zijne verticale projectie de lijn $N''n$ volgt, die loodregt op mM'' gerigt is. Men behoeft dus slechts uit P' eene lijn regthoekig door de as van projectie te trekken, om de verticale projectie P'' van het in den nieuwen stand gekomen punt (N' , N'') te vinden. Dit punt P'' is dus een punt van de verticale projectie van den meridiaan, die $M'D'$ tot horizontale projectie heeft; en de geheele verticale projectie $C''P''D''p''A''$ van dien meridiaan wordt dus verkregen, door de aangewezen constructie voor een genoegzaam aantal punten van den hoofdmeridiaan uit te voeren.

Bij de genoemde beweging van den hoofdmeridiaan, komt het tot den grootsten parallelcirkel behorende punt (B' , B'') in (D' , D''); daar nu uit de figuur onmiddellijk volgt $M'D' : bD'' = M'P' : nP''$, is ook $bB'' : bD'' = nN'' : nP''$. Na dus slechts het enkele punt D'' geconstrueerd te hebben, kan men de geheele verticale projectie van den meridiaan ook bekomen, door eene menigte loodlijnen als $N''n$ te trekken, en al die loodlijnen in dezelfde reden te verdeelen, waarin $B''b$ door het punt D'' verdeeld wordt.

§ 217. WERKSTUK. *De doorgangen te construeren van een omwentelingsvlak, dat even als in het voorgaande werkstuk gegeven is.*

Naargelang de as van projectie al of niet door de verticale projectiën van de hoofdmeridianen gesneden wordt, wordt ook het horizontale vlak al of niet door het omwentelingsvlak gesneden. Heeft er zoodanige snijding plaats, zooals in Fig. 151, dan zal blijkbaar een cirkel, in het horizontale vlak uit M' met $M'A' = mA''$ beschreven, tevens een parallelcirkel, en dus ook de horizontale doorgang van het omwentelingsvlak zijn.

Naargelang de as van projectie al of niet door de horizontale projectie van den grootsten parallelcirkel, indien er een zoodanige is, gesneden wordt, wordt ook het verticale vlak al of niet door het omwentelingsvlak gesneden. Is er geen grootste parallelcirkel, zooals in Fig. 149, dan is men zeker dat het omwentelingsvlak een verticalen doorgang heeft.

Om dezen doorgang te construeren, beschrijft men uit M' eenen

cirkel, die de as van projectie in twee punten S' snijdt, dan zal dit de horizontale projectie zijn van een parallelcirkel, wiens verticale projectie $B''B''$ gevonden wordt, door aan zijne horizontale projectie raaklijnen te trekken, die de as van projectie regthoekig snijden. De punten S'' nu, waar $B''B''$ door loodlijnen, uit S' op de as van projectie gesteld, ontmoet wordt, zijn punten, zoowel van het verticale vlak, als van den genoemden parallelcirkel en dus ook van het omwentelingsvlak; derhalve behooren de punten S'' tot den begeerden verticalen doorgang, waarvan men op deze wijze, door telkens andere cirkels uit M' te beschrijven, zoovele punten kan construeren als men goedvindt.

Beschrijft men uit M' eenen cirkel, die de as van projectie raakt, dan valt het raakpunt in m en men verkrijgt, even als boven handelende, het enkele punt T'' , dat naar het valt het laagste of hoogste punt van den gevraagden doorgang zal wezen. Daar de as vóór het verticale vlak staat, ligt deze doorgang op de achterste helft van het omwentelingsvlak en is dus onzichtbaar.

Verkeerden de hoofdmeridianen in het geval van Fig. 150, maar werd de as van projectie door de projectie van den grootsten parallelcirkel gesneden, dan zou men den verticalen doorgang volkomen op dezelfde wijze construeren. Men zou dan echter voor dien doorgang eene geslotene kromme verkrijgen, waarvan het hoogste en laagste punt gelijktijdig bepaald zou worden, door den cirkel, uit M' rakende aan de as van projectie beschreven.

§ 218. *WERKSTUK. De verticale projectie van eenig punt te vinden, gelegen op een omwentelingsvlak, dat op de gewone wijze is voorgesteld, indien de horizontale projectie van dat punt gegeven is.*

Is er geen grootste of kleinste parallelcirkel, zooals in Fig. 149, dan mag de gegevene horizontale projectie geheel naar welgevallen genomen worden; in het tegengestelde geval, mag zij niet buiten of binnen de vroeger aangewezen grenzen worden genomen (§ 214).

Laat dan P' (Fig. 149 of 150) de gegevene horizontale projectie zijn, zoo is een cirkel, uit M' met $M'P'$ beschreven, de horizontale projectie van den parallelcirkel, waarop het bedoelde punt zich bevindt. Raaklijnen aan deze, regthoekig door de as van projectie getrokken, wijzen verder dadelijk de verticale projectie $N''N''$ van dien parallelcirkel aan. Derhalve is dan het punt P'' , waar $N''N''$ ontmoet wordt door eene lijn, uit P' regthoekig door de projectie-as getrokken, de begeerde verticale projectie.

De cirkel, uit M' met $M'P'$ beschreven, kan gelijktijdig de horizontale projectie van meerdere parallelcirkels zijn, wier verticale projectiën altijd even als boven gevonden worden. In dat geval zijn er ook even zoovele punten op het omwentelingsvlak, die allen dezelfde horizontale projectiën P' hebben. In Fig. 150 b. v. zijn $N''N''$ en $n''n''$ de verticale projectiën van twee parallelcirkels, die dezelfde horizontale projectie hebben; hierdoor vinden wij ook twee punten (P', P'') en (P', p''), wier horizontale projectiën hetzelfde punt P' zijn.

Eene aandachtige beschouwing der figuur is genoegzaam, om in te zien, hoe omgekeerd de horizontale projectie van eenig punt des oppervlaks gevonden wordt, indien de verticale gegeven is.

§ 219. WERKSTUK. *De verticale projectiën der hoofdmeridianen te construeren van het omwentelingsvlak, voortgebragt door eene gegeeene beschrijvende lijn, die niet met de verticaal staande omwentelings-as in een en hetzelfde platte vlak ligt.*

Bij de oplossing van dit werkstuk is het tamelijk onverschillig, of de beschrijvende lijn eene rechte lijn, dan wel eene kromme lijn van enkele of dubbele kromming is. Dit zal van zelf blijken, indien wij eene rechte lijn ($A'B', A''B''$), die de as (M', mM'') kruist (Fig. 152), als beschrijvende lijn aannemen, zonder van haar regt zijn eenig gebruik te maken.

Laten wij, uit een willekeurig punt (s', s'') der beschrijvende lijn, eene loodlijn op de omwentelings-as vallen, dan is die loodlijn evenwijdig met het horizontale vlak; zij is dus even lang als hare horizontale projectie $M's'$, terwijl hare verticale projectie ss'' evenwijdig met de as van projectie en dus loodregt op mM'' is. Deze loodlijn is nu de straal en haar voetpunt (M', s) het middelpunt (§ 212) van den parallelcirkel, langs wiens omtrek het punt (s', s'') zich, bij de omwenteling der beschrijvende lijn, beweegt. Zetten wij dus de werkelijke lengte $M's'$ van dien straal, uit het punt s , aan weerszijden loodregt op mM'' uit, zoodat $sS'' = M's'$ is, dan behooren de punten S'' tot de verticale projectiën $R''T''S''$ der hoofdmeridianen, die alzoo in haar geheel verkregen worden, door de aangewezen constructie voor een genoegzaam aantal punten der beschrijvende lijn ($A'B', A''B''$) te herhalen.

Neemt men in de beschrijvende lijn het punt (t', t''), waarvan de horizontale projectie t' het dichtst bij M' ligt, dan verkrijgt men

in de verticale projectiën der hoofdmeridianen de punten T'' , die zich het digtst bij mM'' bevinden; want tT'' , die gelijk aan $M't'$ is genomen, is nu kleiner dan de straal van iederen anderen parallelcirkel. Alzoo is dan $T''T''$ de verticale projectie van de keel van het omwentelingsvlak.

Wanneer de horizontale projectie der beschrijvende lijn, noch door het punt M' gaat, noch een enkel punt is, bevat zij altijd een punt t' dat digter bij M' ligt dan hare andere punten. Beschrijvende kromme lijnen die de omwentelings-as niet snijden, en beschrijvende rechte lijnen die met deze as niet in een en hetzelfde vlak liggen, brengen dus altijd omwentelingsvlakken voort, die eene keel hebben.

§ 220. Is de beschrijvende lijn ($A'B'$, $A''B''$) van het voorgaande werkstuk, zooals dit in Fig. 152 is aangenomen, eene rechte lijn, dan zal men bevinden dat de kromme lijnen $R''T''S''$ de takken eener hyperbool zijn, die t tot middelpunt en $T''T''$ tot eerste as heeft. Wanneer men dus van twee elkander kruissende rechte lijnen, de eene ($A'B'$, $A''B''$) om de andere (M' , mM'') laat wentelen, beschrijft zij eene omwentelingshyperboloïde met één blad, wier keel door den kortsten afstand ($M't'$, tt'') dezer lijnen beschreven wordt.

§ 221. WERKSTUK. *Den gewonen cirkelvormigen ring te projecteren, en punten op zijn oppervlak aan te wijzen.*

De gewone cirkelvormige ring wordt voortgebracht, door de wenteling van een cirkel om eene as, die buiten dezen cirkel, doch in zijn vlak, ligt. Zulk een ring wordt dus bepaald door den beschrijvenden cirkel, en door den afstand van diens middelpunt tot de omwentelings-as. Die as wederom loodrecht op het horizontale vlak plaatsende, en haar alzoo door (M' , mM'') voorstellende (Fig. 153), vinden wij dadelijk de hoofdmeridianen ($A'B'$, $A''D''B''E''$), wier verticale projectiën gelijk aan den gegeven wentelenden cirkel zijn, en hare middelpunten C'' aan weerszijden, op den gegeven afstand $M''C''$, van de verticale projectie der omwentelings-as hebben. Beschrijven wij dus verder, uit M' met $M'A' = M''A''$ en met $M'B' = M''B''$, cirkels, dan zullen alle punten van den ring zich op het horizontale vlak tusschen de omtrekken dezer cirkels projecteren. Trekken wij voorts, evenwijdig met de as van projectie, de raaklijnen $D'D''$ en $E'E''$ aan de verticale projectiën der hoofdmeridianen, dan verkrijgen wij almede de figuur $E''B''D''D''B''E''$,

waarbuiten de verticale projectiën van de verschillende punten des rings niet vallen kunnen. Door bij de aanwijzing dezer grenzen de onzichtbare helften $D''A''E''$ van de verticale projectiën der hoofdmeridianen te voegen, is dan de ring geprojecteerd.

Tot het vinden van een punt op zijn oppervlak, kan men den weg volgen in § 218 aangewezen. Hier kunnen wij echter ook aldus handelen:

Laat vooreerst de horizontale projectie P' van het te vinden punt, binnen de bepaalde grenzen, naar welgevallen aangenomen worden; indien wij dan, op het binnen die grenzen vallende deel eener lijn, door M' en P' getrokken, een halven cirkel beschrijven, daarin $P'P$ loodregt op $M'P'$ stellen, en vervolgens, aan weerszijden van p , $pP'' = P'P$ nemen, verkrijgen wij twee punten (P' , P'') des oppervlaks; na al het vroeger reeds verhandelde, zal het wel onnoodig zijn, nog iets tot opheldering van deze constructie te zeggen. Laat ten andere Q'' als de verticale projectie van een punt des oppervlaks aangenomen zijn; indien wij dan door Q'' eene lijn evenwijdig met de as van projectie trekken, vinden wij qr en qs voor de afstanden, waarop het bedoelde punt van de omwentelings-as moet liggen; alzoo beschrijven wij uit M' met qr en met qs als stralen cirkelbogen, dan zullen deze, door hunne snijding met eene door Q'' getrokken loodlijn op de as van projectie, de vier punten (Q' , Q'') des oppervlaks doen kennen.

Was het punt Q'' binnen den cirkel $A''D''B''E''$ aangenomen, dan zouden er slechts twee punten van het oppervlak zijn, die Q'' tot verticale projectie hadden.

DE RINGVORMIGE OPPERVLAGKEN.

§ 222. Het oppervlak van den zoo even beschouwden ring, is het eenvoudigste ringvormige oppervlak. Hadden wij in plaats van een cirkel eene andere geslotene kromme, b. v. eene ellips, om eene lijn als as laten wentelen, zoo zouden wij almede een ringvormig oppervlak verkregen hebben; dezelfde beschrijvende figuur kan hierbij ringvormige oppervlakken van zeer verschillende gedaanten voortbrengen, naargelang van den stand, dien zij met betrekking tot de as heeft; maar al deze oppervlakken blijven dan

tot het geslacht der omwentelingsvlakken behooren. De wording der ringvormige oppervlakken is echter veel algemeener, zoodat zij slechts in zeer bijzondere gevallen omwentelingsvlakken zijn, zelfs al wilde men een cirkelomtrek tot beschrijvende lijn blijven gebruiken.

De ring b. v. in de voorgaande § beschouwd, wordt voortgebracht door een cirkel ($A'B', A''D''B''E''$), die zich zoodanig beweegt, dat zijn middelpunt den omtrek van een anderen cirkel ($C'F'C'F', C''C''$) als rigtlijn volgt, terwijl zijn vlak steeds loodregt op die rigtlijn blijft. Wanneer wij nu de beweging van den beschrijvenden cirkel evenzoo laten geschieden, met dit onderscheid, dat wij in plaats van den cirkel ($C'F'C'F', C''C''$) eene andere geslotene kromme van enkele of dubbele kromming tot rigtlijn kiezen, dan ontstaat er een ringvormig oppervlak, dat niet meer tot de omwentelingsvlakken behoort.

In plaats van den beschrijvenden cirkel met zijn middelpunt eene rigtlijn te doen volgen, en zijn vlak loodregt op de rigtlijn te doen blijven, kan men een of meer punten van zijn omtrek zich langs gegevene rigtlijnen laten bewegen, en zijn vlak aan andere voorwaarden onderwerpen, b. v. van steeds evenwijdig met zich zelf te blijven of van steeds door eene gegevene regte lijn te blijven gaan. Ook kan men voor de beschrijvende kromme eene willekeurige geslotene kromme lijn van dubbele of enkele kromming nemen. In alle gevallen zal echter de wet van beweging, met behulp van de noodige rigtlijnen en rigtvlakken, derwijze moeten vastgesteld worden, dat de beweging mogelijk, en volkomen bepaald is.

§ 223. Uit het aangevoerde ziet men, dat er talrijke geslachten van ringvormige oppervlakken kunnen zijn, terwijl ieder geslacht eene menigte van verscheidenheden kan opleveren. Niet zelden blijft men oppervlakken ringvormig noemen, al begrenzen zij geenen gesloten ring; somtijds noemt men hen dan *buisvormig*. Een dergelijk oppervlak wordt b. v. beschreven door den omtrek van een cirkel met standvastigen straal, dien men zoodanig zich laat bewegen, dat zijn middelpunt eene gewone schroeflijn volgt, terwijl zijn vlak steeds door de as van die schroeflijn blijft gaan. De bovenste helft van dit oppervlak wordt gebruikt tot het overwelen van wenteltrappen.

Ons bestek gedooft niet over de ringvormige oppervlakken

uitvoeriger te zijn, of in beschouwingen te treden over andere oppervlakken door kromme lijnen als beschrijvende lijnen voortgebracht. Wij zullen dus nog slechts eene korte beschouwing voordragen van de oppervlakken, die in het algemeen door regte beschrijvende lijnen kunnen voortgebracht worden.

DE ALGEMEENE ONTWIKKELBARE OPPERVLAGKEN.

§ 224. Alle gebogene vlakken, die door eene regte lijn als beschrijvende lijn kunnen voortgebracht worden, noemt men *regelrechte oppervlakken*, omdat er de scherpe kant van een liniaal of regel, volgens alle standen der beschrijvende regte lijn, op past.

Hoezeer alleen regelrechte oppervlakken ontwikkelbaar kunnen zijn, zijn niet alle regelrechte oppervlakken ontwikkelbaar. De regelrechte oppervlakken namelijk, kunnen al of niet ontwikkeld worden, naargelang door hunne wordingswijze al of niet de voorwaarde vervuld is, *dat elke twee op elkander volgende standen der beschrijvende regte lijn in een en hetzelfde platte vlak liggen*.

Dit een en ander volgt onmiddellijk, uit hetgeen wij in § 134 over de ontwikkelbaarheid aanvoerden. Immers de regelrechte oppervlakken, die aan de genoemde voorwaarde voldoen, maar ook geene andere gebogen vlakken, kunnen door regte lijnen (hier standen der beschrijvende lijn) in oneindig veel oneindig kleine deelen verdeeld worden, die ieder op zich zelf als plat mogen beschouwd worden. Zij zijn dus, met uitsluiting van alle andere gebogene vlakken, *ontwikkelbaar*.

De regelrechte oppervlakken, waarbij de genoemde voorwaarde niet vervuld is, noemt men *scheef*. De *ontwikkelbare* en de *scheeve oppervlakken* zijn alzoo twee hoofdklassen, waarin men de regelrechte oppervlakken verdeelen kan.

De kegel- en cilindervlakken zijn bijzondere geslachten der eerste hoofdklasse; de voorwaarde voor de ontwikkelbaarheid is bij de kegelvlakken vervuld door dat alle beschrijvende lijnen elkander in een en hetzelfde punt snijden; bij de cilindervlakken is zij vervuld, door dat alle beschrijvende lijnen evenwijdig zijn.

Tot de tweede hoofdklasse behoort onder anderen de omwentelingshyperboloïde, die wij reeds in § 220 leerden kennen.

§ 225. Elk ontwikkelbaar oppervlak, dat niet tot de bijzondere geslachten der kegel- en cilindervlakken behoort, en welks beschrijvende lijnen dus, noch door een vast punt gaan, noch evenwijdig zijn, noemt men een *algemeen ontwikkelbaar oppervlak*. Om zich van zulk een oppervlak en zijne wordingswijze een juist denkbeeld te verschaffen, zal men het best doen zich voor te stellen, dat het oppervlak werkelijk ontwikkeld en dus op een plat vlak uitgespreid is.

Laten, in dien ontwikkelden toestand des oppervlaks, Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , enz. (Fig. 154) onmiddellijk op elkander volgende standen der beschrijvende lijn verbeelden, die elkander telkens in nieuwe punten a , b , c , d , e , enz. snijden, dan zijn de afstanden ab , bc , cd , de , enz. dezer snijpunten, gelijk mede de hoeken AaB , BbC , CcD , DdE , enz., oneindig klein; en wel, omdat anders de standen Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , enz. der beschrijvende lijn, hoe onvolkomen de figuur dit onvermijdelijk ook moge voorstellen, niet onmiddellijk op elkander zouden volgen. Derhalve zijn de hoeken AaB , BbC , CcD , DdE , enz. de oneindig kleine platte deelen, waarin het oppervlak vóór zijne ontwikkeling door de beschrijvende lijnen Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , enz. kon verdeeld worden, terwijl ab , bc , cd , de , enz. de elementen eener kromme lijn $abcde$ zijn, die de beschrijvende lijnen Bb , Cc , Dd , Ee , enz., als verlengden dier elementen, tot raaklijnen heeft.

Door de genoemde oneindig kleine deelen, om de lijnen aB , bC , cD , dE , enz., volgens welke zij aan elkander sluiten, te laten wentelen, kan nu het ontwikkeld oppervlak weder in zijn niet ontwikkelden toestand teruggebragt worden. Hierbij blijven de beschrijvende lijnen wel de verlengden der elementen ab , bc , cd , de , enz., maar die elementen blijven niet in een en hetzelfde vlak; zij worden dus elementen eener kromme lijn van dubbele kromming, die de beschrijvende lijnen van het ontwikkelbare oppervlak tot raaklijnen heeft; en dit oppervlak is bijgevolg de meetkundige plaats van de raaklijnen, die aan de laatstgenoemde kromme lijn kunnen getrokken worden.

Een algemeen ontwikkelbaar oppervlak wordt dus voortgebragt door eene rechte lijn, die zich zoodanig beweegt, dat zij altijd eene als rigtlijn aangenomene kromme lijn van dubbele kromming blijft aanraken.

Deze kromme lijn noemt men de *keerlijn* van het oppervlak.

De beschrijvende lijn namelijk strekt zich in elk zijner standen aan weerszijden van het raakpunt uit; zooals dan ook de elementen *ab*, *bc*, *cd*, *de*, enz., hoezeer wij die in Fig. 154 slechts naar eene zijde verlengd hebben voorgesteld, naar beide zijden verlengd kunnen worden; hieruit volgt dat het oppervlak uit twee bladen bestaat, die door de keerlijn van elkander worden afgescheiden.

Wanneer nu een beweeglijk punt, zonder de rigting eener beschrijvende lijn te volgen, zich over het oppervlak van het eene blad naar het andere zou willen begeven, zou het, aan de keerlijn gekomen, de rigting zijner beweging plotseling moeten omkeeren. Aan deze omstandigheid heeft de keerlijn haren naam te danken.

§ 226. De keerlijn kan niet anders dan eene kromme lijn van dubbele kromming zijn; want wilde men eene vlakke kromme lijn als keerlijn aannemen, dan zou men, in plaats van een ontwikkelbaar gebogen vlak, een plat vlak verkrijgen. Liet men de keerlijn in een enkel punt overgaan, of liet men haar in 'toneindige verdwijnen, dan zou het ontwikkelbaar oppervlak in een kegel- of cilindervlak overgaan, tot welks bepaling dan nog eene nieuwe rigtlijn zou moeten gegeven worden.

§ 227. Uit het voorgaande volgt, dat de algemeene ontwikkelbare oppervlakken door hunne keerlijnen volkomen bepaald worden, en dat zij dus, daar men deze keerlijnen als rigtlijnen hunner wording kan aannemen, allen tot een en hetzelfde geslacht van gebogen vlakken behooren. Een dezer gebogen vlakken is *het ontwikkelbare schroefvlak*, dat voortgebragt wordt door eene beschrijvende rechte lijn, die altijd eene gewone schroeflijn blijft raken, en dus deze schroeflijn tot keerlijn heeft.

§ 228. WERKSTUK. *Een algemeen ontwikkelbaar oppervlak door de projectiën der keerlijn gegeven zijnde, wil men de verticale projectie vinden van het punt des oppervlaks, dat eene gegebene horizontale projectie heeft.*

Zij ($A'B'$, $A''B''$) de keerlijn (Fig. 137) en M' de gegebene horizontale projectie van een punt des oppervlaks. Trekt dan uit M' eene raaklijn aan $A'B'$, daarna uit het raakpunt P' regthoekig door de as eene lijn, die $A''B''$ in P'' ontmoet, en eindelijk uit P'' eene raaklijn $P''Q''$ aan $A''B''$, dan moet op deze raaklijn $P''Q''$ de begeerde verticale projectie M'' liggen, die hierdoor dus terstond

gevonden is. Immers de lijn ($P'Q'$, $P''Q''$) is, als raaklijn aan de keerlijn ($A'B'$, $A''B''$), eene beschrijvende lijn van het oppervlak, waarop dus het punt (M' , M'') als een punt dezer beschrijvende lijn, gelegen is.

Men ziet hieruit, dat de keerlijn alleen toereikend is, om het geheele oppervlak te doen kennen.

§ 229. WERKSTUK. *Den horizontalen doorgang van een algemeen ontwikkelbaar oppervlak te construeren.*

Trek aan de gegevene keerlijn ($A'B'$, $A''B''$) een aantal raaklijnen (Fig. 137); bepaal de ontmoetingspunten R' , Q' , S' , enz. van deze raaklijnen met het horizontale vlak; dan zullen deze punten tot den begeerden doorgang behooren. Die doorgang $R'Q'S'$ kan alzoo, na het bepalen van een toereikend aantal punten, met genoegzame naauwkeurigheid uit de hand getrokken worden.

Is het gegeven oppervlak een ontwikkelbaar schroefvlak, waarvan de keerlijn door haren straal, hellingshoek en verticaal staande as bepaald is, dan kan volgens § 193 de begeerde horizontale doorgang geconstrueerd worden, zonder dat men de verticale projectie der keerlijn noodig heeft. Die horizontale doorgang is blijkbaar de in Fig. 141 voorgestelde kromme lijn $A'SQ'S$, indien namelijk (M' , mM'') de as, $M'A'$ de straal en $PQ'P'$ de hellingshoek der als keerlijn aangenomene schroeflijn is.

Het ontwikkelbare schroefvlak wordt bijgevolg door een vlak, dat loodregt op de as der schroeflijn is, volgens de ontwindende kromme van een cirkel gesneden.

DE SCHEEVE OPPERVLAKKEN.

§ 230. Door *scheeve oppervlakken* (zie § 224) verstaat men alle regelrechte oppervlakken, die niet ontwikkelbaar zijn. Wordt dus de beweging eener rechte beschrijvende lijn door genoegzame voorwaarden bepaald, zoo zal men altijd moeten onderzoeken of zij al dan niet een scheef oppervlak voortbrengt; dat is: of elke twee opvolgende standen der beschrijvende lijn niet of al in een en hetzelfde platte vlak liggen.

Heeft het eerste plaats, dan kan men zich, tusschen elke twee dier opvolgende standen, het lijntje voorstellen, dat loodregt op

beide is; de meetkundige plaats, van de achtereenvolgende voetpunten dezer loodlijntjes of kortste afstanden, is dan eene rechte of kromme lijn, die men *de intrekkingslijn* van het scheeve oppervlak noemt; en wel omdat, waar deze lijn zich bevindt, het oppervlak op het naauwst ingetrokken schijnt te zijn.

Valt de rigting der genoemde loodlijntjes, of kortste afstanden, langs de intrekkingslijn, dan is deze gelijk aan hunne som; dit is echter niet altijd het geval. Bij de omwentelingshyperboloïde van § 220 b. v., is wel de omtrek van de keel eene intrekkingslijn; maar de kortste afstanden, tusschen elke twee op elkander volgende beschrijvende lijnen, maken met die intrekkingslijn eenen hoek; bijgevolg is daar de som der kortste afstanden de intrekkingslijn niet. Ons bestek gedooft niet hierover breedvoeriger uit te weiden.

§ 231. Onder de voorwaarden, waaraan men eene beschrijvende rechte lijn laat voldoen, zijn de meest gewone: dat men haar langs eene rigtlijn laat glijden; dat men haar evenwijdig met een plat rigtvlak laat blijven; dat men haar op een gebogen vlak laat rusten; dat men haar steeds een bepaalden hoek met eenige rigtlijn of met eenig rigtvlak laat maken; dat men haar deel, tusschen twee rigtlijnen begrepen, eene standvastige lengte laat behouden, en wat dies meer zijn moge. Om hare beweging volkomen te bepalen, zijn er, zooals in de volgende § blijken zal, *drie* zulke voorwaarden noodig, die echter noch onderling afhankelijk, noch met elkander in strijd mogen wezen; terwijl men bovendien in het oog moet houden, dat de vervulling van twee of drie voorwaarden somtijds slechts eene enkele voorwaarde schijnt uit te maken.

Eene dubbele voorwaarde b. v. is, het blijven gaan door een vast punt, als overeenkomende met het blijven rusten op twee rigtlijnen, die elkander in dat punt snijden; desgelijks het evenwijdig blijven met eene gegevene rigting, als overeenkomende met een evenwijdig blijven aan twee rigtvlakken, die elkander volgens de gegevene rigting snijden. Eene drievoudige voorwaarde is, het steeds raaklijn blijven aan eene gegevene kromme; want dit vordert ten eerste, dat de bewegende lijn door een punt dezer kromme ga; ten tweede, dat zij zich in het tangentiale vlak van dat punt bevinde; en ten derde, dat zij in dit vlak eenen bij-

zonderen stand aanneme. De genoemde dubbele voorwaarden, gevoegd bij het glijden langs ééne rigtlijn, gelijk mede de genoemde drievoudige voorwaarde alleen, zijn dan ook, zooals wij vroeger zagen, toereikend, om de beweging der beschrijvende lijn tot het voortbrengen van een kegelvlak, van een cilindervlak en van een algemeen ontwikkelbaar oppervlak, te bepalen.

§ 232. Om te doen zien, dat drie voorwaarden noodig en voldoende zijn, tot het vaststellen van de beweging eener beschrijvende rechte lijn, zullen wij aantoonen, dat men haar in het algemeen langs drie rigtlijnen AA, BB en CC kan doen glijden (Fig. 155), en dat hierdoor hare beweging volkomen bepaald is.

Vooraf merken wij op, dat de drie rigtlijnen noch allen, noch twee er van, in een en hetzelfde platte vlak mogen liggen. — Want lagen zij alle drie in een plat vlak, dan zou de beschrijvende lijn wel altijd in dat vlak blijven, maar hare beweging zou overigens onbepaald zijn, terwijl blijkbaar een der drie rigtlijnen overtollig zou wezen; hier zou men dus drie onderling afhankelijke voorwaarden aangenomen hebben. En lagen twee rigtlijnen in een en hetzelfde platte vlak, maar de derde daar buiten, dan zou men drie onderling strijdige voorwaarden hebben aangenomen; want twee dezer voorwaarden vorderen, dat de beschrijvende lijn in het genoemde platte vlak blijft, terwijl de derde vordert dat zij ook door punten buiten dit vlak gaan zou.

Wij onderstellen dus, dat er van de drie aangenomene rigtlijnen AA, BB en CC geene twee in een en hetzelfde platte vlak liggen.

Verbeelden wij ons nu dat eene rechte lijn, die steeds door een willekeurig punt P van AA blijft gaan, langs BB glijdende een kegelvlak beschrijft, en dat CC door dit kegelvlak in eenig punt R gesneden wordt; indien wij dan door de punten P en R eene rechte lijn DE trekken, zal deze op het genoemde kegelvlak liggen, en dus ook BB in eenig punt Q snijden; derhalve is DE eene rechte lijn, die op de drie rigtlijnen AA, BB en CC rust, en die; voor elk punt P dat men in AA kan aannemen, een bepaalden stand verkrijgt. Hieruit volgt dus, dat in het algemeen de beweging eener rechte beschrijvende lijn langs drie rigtlijnen mogelijk is, en door deze rigtlijnen volkomen bepaald wordt.

Het is hierbij onverschillig of de rigtlijnen rechte lijnen, dan wel

kromme lijnen van enkele of dubbele kromming zijn; was echter BB eene regte lijn, dan zou het kegelvlak, waarvan wij ons zoo even bedienden, een plat vlak worden, dat door zijne snijding met CC den stand DE der beschrijvende lijn leerde vinden.

Mogt dit kegelvlak of platte vlak, wáár ook het punt P in AA genomen werd, niet door CC gesneden worden, dan zouden de aangenomene rigtlijnen drie onderling strijdige voorwaarden behelzen. In zoodanige bijzondere gevallen, is het glijden der beschrijvende lijn langs de drie rigtlijnen onmogelijk; die gevallen kunnen zich voordoen, ook zonder dat twee rigtlijnen in eenig plat vlak liggen; zij kunnen zich zelfs voordoen, wanneer men drie kromme lijnen van dubbele kromming tot rigtlijnen heeft genomen.

§ 233 Indien men de beweging eener regte beschrijvende lijn door drie kromme lijnen als rigtlijnen bepaalt, zou het kunnen gebeuren, dat deze drie kromme lijnen gelegen waren, hetzij op een kegelvlak, hetzij op een cilindervlak, hetzij op een algemeen ontwikkelbaar oppervlak; alsdan zal de beschrijvende lijn niet anders dan deze oppervlakken kunnen voortbrengen. Maar, met uitzondering van deze bijzondere gevallen, moet eene regte lijn, die langs drie rigtlijnen glijdt, altijd een scheef oppervlak beschrijven.

Zoo kan b. v. de omwentelingshyperboloïde, die wij in § 220 leerden kennen, beschouwd worden als beschreven te zijn door eene regte lijn, die langs drie parallelcirkels glijdt.

§ 234. Men kan eene regte lijn ook langs twee rigtlijnen laten glijden, terwijl zij steeds evenwijdig blijft met een als rigtvlak aangenomen plat vlak. Neemt men hier voor rigtlijnen twee kromme lijnen, die op een cilindervlak gelegen zijn, en voor rigtvlak een vlak, dat evenwijdig met de beschrijvende lijnen van dit cilinder-vlak is, dan zal de bewegende lijn niet anders dan dit cilinder-vlak kunnen beschrijven; maar, met uitzondering van dit bijzondere geval, zal eene beschrijvende regte lijn, die langs twee rigtlijnen glijdt en evenwijdig met een rigtvlak blijft, altijd wederom een scheef oppervlak voortbrengen.

Een scheef oppervlak, dat op deze wijze ontstaan kan, wordt in het algemeen eene *cilindroïde* genoemd; het verkrijgt den bijzonderen naam van *conoïde*, indien ten minste eene der rigtlijnen eene regte lijn is; en zulk eene conoïde heet eene *regte conoïde*,

indien het rigtvlak loodregt op de regte rigtlijn staat, ten gevolge waarvan de beschrijvende lijn ook steeds loodregt op die regte rigtlijn moet blijven. Bij de regte conoïden is, blijkens § 230, de regte rigtlijn tevens eene intrekkinglijn.

§ 235. Het is uit § 231 duidelijk, dat men, nog op vele andere wijzen dan in de beide voorgaande §§, drie voorwaarden kan kiezen om de beweging eener regte lijn zóó te bepalen, dat zij een scheef oppervlak voortbrengt. Over de keuze van zulke voorwaarden zullen wij echter niet breedvoeriger uitweiden, en ons dus vergenoegen met hier eene opgave te laten volgen, van de meest voorkomende scheeve oppervlakken. Zij zijn:

1^o. *De hyperboloïde met één blad*. Deze ontstaat, wanneer de beschrijvende lijn langs drie regte lijnen glijdt, die niet evenwijdig met een en hetzelfde vlak zijn, en elkander twee aan twee in de ruimte kruissen. Zij heeft eene ellips tot keel, en kan, voor zekeren stand der rigtlijnen, overgaan in de omwentelingshyperboloïde van § 220.

2^o. *De hyperbolische paraboïde*. Deze ontstaat, wanneer de beschrijvende lijn, steeds evenwijdig met een plat rigtvlak blijvende, langs twee regte lijnen glijdt, die elkander in de ruimte kruissen en geen van beide evenwijdig met het rigtvlak zijn. Zij ontstaat almede, wanneer de beschrijvende lijn langs drie elkander twee aan twee kruissende regte lijnen glijdt, die evenwijdig met eenig plat vlak zijn. Zij behoort tot de conoïden, en wordt ook *conoïde van den tweeden graad* genoemd, omdat de vergelijkingen van alle andere conoïden tot hoogere graden opklimmen.

De hyperboloïde met één blad en de hyperbolische paraboïde zijn de eenige scheeve oppervlakken, wier vergelijkingen van den tweeden graad zijn. Zij worden alzoo te zamen *de scheeve oppervlakken van den tweeden graad* genoemd. De overige oppervlakken van den tweeden graad, met name: *de ellipsoïde*, *de hyperboloïde met twee bladen* en *de elliptische paraboïde*, kunnen niet door eene regte beschrijvende lijn voortgebracht worden, en behooren dus niet tot de scheeve oppervlakken.

3^o. *Het ronde opperlak van de kegelvormige wig van WALLIS*. Laat eene middellijn van een cirkel tevens de basis zijn van een regthoek, wiens vlak loodregt op het vlak van den cirkel is. Indien men dan de bovenzijde van den regthoek en de omtrek van

den cirkel tot rigtlijnen, en een vlak loodregt op de bovenzijde van den regthoek tot rigtvlak aanneemt, zal eene regte lijn, die langs deze rigtlijnen glijdt en evenwijdig met het rigtvlak blijft, het genoemde oppervlak beschrijven.

Dit gebogen vlak, dat volgens § 234 tot de regte conoïden behoort, bestaat blijkbaar uit twee bladen, die volgens de regte rigtlijn aan elkander sluiten; terwijl deze tevens eene intrekingslijn is.

Het ligchaam, dat door het eene blad en het vlak van den cirkel wordt ingesloten, is *de wig van WALLIS*; deze cirkel is *het grondvlak* of *de rug*, de bovenzijde des regthoeks is *de scherpe kant*, en de afstand tusschen het grondvlak en den scherpen kant is *de hoogte* der wig.

4°. *Het horizontale schroefvlak*. Dit oppervlak wordt beschreven door eene regte lijn, die langs eene gewone schroeflijn glijdt, en tevens de as dier schroeflijn regthoekig blijft snijden. Het behoort volgens § 234 almede tot de regte conoïden, en heeft de as der schroeflijn tot intrekingslijn.

5°. *Het hellende schroefvlak*. Dit schroefvlak ontstaat even als het vorige, met dit onderscheid, dat de beschrijvende lijn de as der schroeflijn steeds onder een standvastigen scherpen hoek blijft snijden. Het behoort niet tot de conoïden, want de beschrijvende lijn blijft niet evenwijdig met een en hetzelfde platte vlak.

6°. *Het welfvlak van het scheeve tongewelf*. Laten twee onderling gelijke halve cirkels, loodregt op een horizontaal vlak geplaatst zijn, zoodanig dat hunne in dit vlak liggende middellijnen de overstaande zijden van een scheefhoekig parallelogram zijn; laat voorts door het snijpunt der diagonalen van dit parallelogram eene regte lijn getrokken zijn, die de genoemde middellijnen regthoekig snijdt. Indien men dan deze regte lijn, benevens de halve cirkelomtrekken, als drie rigtlijnen aanneemt, zal eene regte beschrijvende lijn, die men langs deze rigtlijnen laat glijden, het welfvlak van het scheeve tongewelf voortbrengen.

Na deze opgave, zullen wij door eenige weinige werkstukken doen zien, hoe men zich bij de constructie der scheeve oppervlakken te gedragen heeft.

§ 236. **WERKSTUK.** *Het oppervlak te construeren, beschreven door eene regte lijn, die, steeds evenwijdig met het verticale projectievlak blijvende, langs twee gegevene regte lijnen glijdt.*

Laten $(A'B', A''B'')$ en $(CD', C''D'')$ de gegebene rigtlijnen zijn (Fig. 156); trekken wij dan evenwijdig met de as eene lijn, die de horizontale projectiën dier rigtlijnen ergens in E' en F' snijdt; bepalen wij daarna de verticale projectiën E'' en F'' van de tot onze rigtlijnen behoorende punten, die E' en F' tot horizontale projectiën hebben; en trekken wij eindelijk $E''F''$, dan is blijkbaar $(E'F', E''F'')$ een stand der beschrijvende lijn. Construeren wij evenzoo eenige andere van hare standen, zooals $(B'D', B''D'')$, $(G'H', G''H'')$, $(A'C', A''C'')$ enz., zoo verkrijgen wij eene voorstelling van het bedoelde scheeve oppervlak.

Hoezeer wij, duidelijkheidshalve, van de beschrijvende lijnen in onze figuur slechts de gedeelten hebben afgebeeld, die van de eene naar de andere rigtlijn loopen, moet men zich al de beschrijvende lijnen als onbepaaldelijk verlengd voorstellen. Hare verticale projectiën zijn dan in zooverre onzichtbaar, als wij dit door afgebrokene lijnen hebben aangewezen.

Is de horizontale projectie P' van een punt des oppervlaks gegeven, zoo behoeft men door deze slechts eene lijn $E'F'$ evenwijdig met de as te trekken, om dadelijk de lijn $E''F''$ te kunnen vinden, waarop de verticale projectie P'' van dat punt moet gelegen zijn.

§ 237. WERKSTUK. *Het oppervlak te construeren, beschreven door eene rechte lijn, glijdende langs drie gegebene rechte lijnen, waarvan er eene loodregt op het horizontale projectievlak staat.*

Laten (A', aA'') , $(B'C', B''C'')$ en $(D'E', D''E'')$ de gegebene rigtlijnen zijn (Fig. 157). Indien wij dan, uit de horizontale projectie A' der verticaal staande rigtlijn, eene lijn trekken, die de horizontale projectiën der beide andere rigtlijnen snijdt, b. v. in F' en G' , vinden wij onmiddellijk de punten F'' en G'' , door welke men de verticale projectie $M''F''G''$ kan trekken van eene rechte lijn, die $A'F'G'$ tot horizontale projectie heeft en in de punten (A', M') , (F', F'') , (G', G'') op de drie rigtlijnen rust. Na op deze wijze een aantal beschrijvende lijnen geconstrueerd te hebben, zooals $(A'B'D', L''B''D'')$, $(A'F'G', M''F''G'')$, $(A'T'K', N''I''K'')$, enz., hebben wij dan eene voorstelling van het bedoelde oppervlak.

Uit deze constructie blijkt tevens onmiddellijk, hoe men de verticale projectie P'' van eenig punt des oppervlaks kan vinden, indien de horizontale projectie P' van dat punt gegeven is.

Even als in het voorgaande werkstuk zal men zich de beschrijvende lijnen als onbepaaldelijk verlengd moeten voorstellen, en

hare onzichtbare gedeelten van de zichtbare behooren te onderscheiden.

§ 238. WERKSTUK. *Eene kegelvormige wig van WALLIS te projecteren.*

Plaatsen wij de wig met haar cirkelvormig grondvlak $A'CB'D$ op het horizontale vlak (Fig. 158 en 159), dan heeft haar scherpe kant, blijkens de in § 235 onder 3^o voorkomende opgave, eene middellijn $A'B'$ des grondvlak tot horizontale projectie; indien wij dus uit A' en B' lijnen regthoekig door de as OX trekken, en op die lijnen de hoogte $aA'' = bB''$ der wig uitzetten, verkrijgen wij de verticale projectie $A''B''$ van den scherpen kant. Deze verticale projectie zal echter, indien de as van projectie zooals O_1X_1 in Fig. 158 regthoekig op $A'B'$ genomen wordt, een enkel punt A_1'' zijn, welks afstand tot O_1X_1 de hoogte a_1A_1'' der wig is.

Daar de beschrijvende lijn, die het gebogen oppervlak der wig voortbrengt, steeds door eenig punt van den omtrek $A'CB'D$ gaat en evenwijdig blijft met een rigtvlak dat loodregt op $(A'B', A''B'')$ staat, worden de horizontale projectiën van de punten van het gebogen vlak begrensd door twee evenwijdige lijnen, die $A'B'$ in A' en B' regthoekig snijden. Neemt men echter van het oppervlak slechts dat gedeelte in aanmerking, waardoor het ligchaam der wig wordt ingesloten, dan is de cirkelomtrek $A'CB'D$ zelf de grens der horizontale projectiën. Derhalve is dan ook het grondvlak de horizontale projectie der wig. Hare verticale projectie is verschillend, naargelang van den stand, dien men aan het verticale vlak geeft; dat is, naargelang van de rigting, die men aan de as van projectie toekent.

Is de as evenwijdig met $A'B'$, zooals OX in Fig. 158, dan zal blijkbaar de regthoek $A''abB''$ de verticale projectie der wig zijn. Is echter de as loodregt op $A'B'$, zooals O_1X_1 in Fig. 158, dan heeft de wig den gelijkebenigen driehoek $A_1''cd$ tot verticale projectie. Elke halve koorde $N'M$, die men in het grondvlak loodregt op $A'B'$ trekt, is altijd de horizontale projectie van het deel eener beschrijvende lijn, dat tusschen de beide rigtlijnen begrepen is, en waarvan de verticale projectie, hetzij dan $N''M''$ of $A_1''M_1''$ onmiddellijk kan getrokken worden. De projectie $A_1''M_1''$ stelt het bedoelde deel der beschrijvende lijn in zijne ware lengte voor, en is volgens § 29 beter dan $N''M''$ geschikt, om die beschrijvende lijn te bepalen.

Indien alzoo de horizontale projectie P' van een punt des oppervlaks gegeven is, en men de projectie P'' van dat punt op het door OX bepaalde verticale vlak wilde vinden, zou men het door O_1X_1 bepaalde verticale vlak te hulp nemen, om door het trekken der lijnen $N'M$ en $A_1''M_1''$ de hoogte pP_1'' van het bedoelde punt boven het horizontale vlak te vinden, en vervolgens op $N''M''$ die hoogte $M''P'' = pP_1''$ uit te zetten.

Heeft de as een schuinen stand ten opzichte van $A'B'$, zooals OX in Fig. 159, dan kan men, door eenig punt (N' , N'') van den scherpen kant der wig, onmiddellijk de twee beschrijvende lijnen ($N'M$, $N''M''$) en ($N'm$, $N''m''$) trekken, wier horizontale projectiën te zamen in het grondvlak eene koorde Mm loodregt op $A'B'$ uitmaken; terwijl, voor den stand dien wij aan het punt (N' , N'') gaven, in onze figuur de ééne eene zichtbare, de andere eene onzichtbare verticale projectie heeft. Trekt men aan het grondvlak eene raaklijn QQ'' regthoekig op de as OX , zoo kan men, door QS' loodregt op $A'B'$ te laten vallen, de verticale projectie $Q'S'$ vinden der beschrijvende lijn, die tot het uiterste punt Q des grondvlak's behoort; terwijl blijkbaar bB'' de verticale projectie is van de beschrijvende lijn, tot het punt B' des grondvlak's en het uiterste punt (B' , B'') van den scherpen kant behorende. Construeert men evenzoo de verticale projectiën der beschrijvende lijnen, tot de verschillende punten van den boog QB' des grondvlak's behorende, dan zal men bevinden dat al die verticale projectiën raaklijnen zijn aan eene kromme lijn $Q''B''$, die door hare onderlinge snijding gevormd wordt; deze kromme lijn $Q''B''$, en eene daarmede bij tegenoverstand gelijke en gelijkvormige kromme lijn $R''A''$, begrenzen dus hier de verticale projectie $A''R''Q''B''$ der wig.

Hier kan blijkbaar, indien de horizontale projectie P' van een punt des oppervlaks gegeven is, de verticale projectie P'' van dat punt dadelijk, door het behoorlijk trekken der lijnen $N'M$ en $N''M''$ gevonden worden.

Even als de rechte lijnen aA'' en bB'' of cA_1'' en dA_1'' van Fig. 158, kunnen ook de kromme lijnen $R''A''$ en $Q''B''$ van Fig. 159 onbepaaldelijk verlengd gedacht worden; deze verlengde rechte of kromme lijnen zijn dan de grenzen van de verticale projectiën van alle punten van het oppervlak, zooals het door de onbepaaldelijk verlengde beschrijvende lijn wordt voortgebracht.

§ 239. WERKSTUK. *Eene schroef met vierkanten draad te projecteren.*

Zij (M' , mM'') de as (Fig. 160), en een cirkel uit M' met $M'A'$ beschreven het grondvlak van den cilinder, die *de spil* der schroef is. Indien dan een regthoek ($A'B'$, $A''B''C''D''$) zoodanig bewogen wordt, dat zijn vlak steeds door de as des cilinders blijft gaan, en dat twee zijner hoekpunten (A' , A'') en (A' , D'') op het oppervlak van de spil schroeflijnen doorloopen, beschrijft deze regthoek den vierkanten schroefdraad, die met de spil de schroef uitmaakt. Deze beide schroeflijnen hebben blijkbaar schroefgangen van gelijke hoogte; deze hoogte, die altijd grooter dan de hoogte $A''D''$ des regthoeks moet wezen, wordt gewoonlijk gelijk aan het dubbel van $A''D''$ genomen, om te maken dat er tusschen de opvolgende omgangen van den draad ruimten overblijven, wier afmetingen gelijk zijn aan die van den draad zelve.

Bij de opgegevene beweging van den regthoek zal, even als de zijde (A' , $A''D''$) steeds op het oppervlak der spil blijft, de zijde (B' , $B''C''$) steeds op het oppervlak van een anderen cilinder blijven die almede (M' , mM'') tot as, maar $M'B'$ tot straal heeft; de beide andere zijden van den regthoek beschrijven daarentegen (zie § 235, 4^o) horizontale schroefvlakken, die slechts in stand verschillen. De vierkante schroefdraad is dus een ligchaam, dat door vier gebogen vlakken, te weten twee concentrische cilindervlakken en twee onderling gelijke horizontale schroefvlakken, wordt ingesloten. De hoekpunten (B' , B'') en (B' , C'') van den regthoek doorloopen blijkbaar, op het oppervlak van den buitensten cilinder, schroeflijnen, wier schroefgangen al weder gelijke hoogten hebben als de vorigen.

Na dus $A''A_1'' = 2A''D''$ als de hoogte der schroefgangen aangenomen te hebben, kunnen wij terstond volgens § 192 de verticale projectiën construeren der vier schroeflijnen, die door de hoekpunten van den regthoek doorloopen worden; en door dan deze projectiën met de behoorlijke deelen van de grenslijnen der cilinders te verbinden, verkrijgen wij terstond de verticale projectie der schroef, zooals die in Fig. 160 is afgeteekend. Hare horizontale projectie bestaat blijkbaar alleen uit de cirkels met $M'A'$ en $M'B'$ beschreven, waarvan de eerstgenoemde de scheiding tusschen den draad en de spil aanwijst.

Wij hebben in onze verticale projectie weggelaten al wat zich

achter de spil bevindt en uit dien hoofde onzichtbaar is; terwijl wij de schroeflijnen en de grenzen der spil, voor zoover zij slechts door het oppervlak van den schroefdraad kunnen gezien worden, door gestipte lijnen hebben aangeduid.

Om den beschrijvenden regthoek van den schroefdraad in een willekeurigen stand aan te wijzen, behoeven wij, na het construeren der schroeflijnen, slechts in het horizontale vlak eenen straal $M'a'b'$, en vervolgens uit a' en b' lijnen regthoekig door de as van projectie te trekken; de punten a'' , b'' , c'' en d'' , waar deze lijnen de verticale projectiën der schroeflijnen ontmoeten, zijn dan de verticale projectiën van de hoekpunten des beschrijvenden regthoeks, die $a'b'$ tot horizontale projectie heeft. De lijnen $(a'b', a''b'')$ en $(a'b', d''c'')$, wier verticale projectiën bij deze constructie evenwijdig met de as van projectie moeten worden, zijn dan respectievelijk in het onderste en bovenste schroefvlak, dat den draad begrenst, standen der beschrijvende lijn.

§ 240. WERKSTUK. *Eene schroef met driekanten draad te projecteren.*

De driekante schroefdraad wordt door een gelijkbeenigen driehoek beschreven, die zich zoodanig beweegt, dat zijn vlak door de as van de spil der schroef blijft gaan, terwijl de uiteinden zijner basis op het oppervlak van die spil, en dus zijn top op het oppervlak van eenen buitencilinder, schroeflijnen doorloopen. De hoogte van den schroefgang is dan blijkbaar voor elk dezer schroeflijnen even groot. Die hoogte wordt doorgaans gelijk aan de basis van den beschrijvenden gelijkbeenigen driehoek genomen, waaruit dan volgt, dat het eene uiteinde van de basis dezelfde schroeflijn doorloopt als het andere, maar telkens eenen gang na elkander; terwijl er van de spil niets zichtbaar blijft.

Laat nu (M', mM'') de as (Fig. 161) en $M'A'$ de straal van de spil der schroef zijn, terwijl $(A'B', A''B''C'')$ de beschrijvende gelijkbeenige driehoek in een zijner standen is; construeren wij dan vooreerst, op den cilinder die $M'A'$ tot straal heeft, eene schroeflijn die door de punten (A', A'') en (A', C'') gaat, en wier schroefgangen dus $A''C''$ tot hoogte hebben; construeren wij verder, op den cilinder die $M'B'$ tot straal heeft, eene schroeflijn die door het punt (B', B'') gaat en van wier gangen de hoogte wederom gelijk aan $A''C''$ is; dan zijn deze beide schroeflijnen diegenen, waarlangs de hoekpunten des driehoeks zich bewegen. Trekken

wij vervolgens, aan de verticale projectiën der beide geconstrueerde schroeflijnen, gemeenschappelijke raaklijnen p en q , dan zullen deze raaklijnen voor de grenzen van de verticale projectie des driekanten schroefdraads mogen genomen worden; zoodat wij, door het construeren der beide schroeflijnen en het trekken der genoemde raaklijnen, de verticale projectie der schroef verkregen hebben, wier horizontale projectie weder uit de met $M'A'$ en $M'B'$ beschrevene cirkels bestaat.

Eigenlijk zou men de verticale projectiën behooren te construeren van al de schroeflijnen, die door de verschillende punten van de opstaande zijden des beschrijvenden driehoeks doorloopen worden; al die verticale projectiën zouden dan rakende zijn aan zekere kromme lijnen, waardoor zij omvat worden; en die kromme lijnen zouden dan de wezenlijke grenzen van de verticale projectie des schroefdraads zijn. Die grenzen wijken echter te weinig van de getrokken raaklijnen p en q af, dan dat die afwijking in eene gewone teekening zou te onderscheiden zijn, en daarom worden er deze raaklijnen voor genomen.

Wij merken nog op, dat onze raaklijnen q , in de nabijheid der binnenste schroeflijn, een klein onzichtbaar gedeelte hebben, dat er door de raaklijnen p wordt afgesneden; de inspringende hoekpunten, die de verticale projectie der driekante schroef vertoont, liggen dan ook zijdelings een weinig buiten de verticale projectie van de spil.

OVER DE DOORSNIJDING DER GEBOGENE OPPER- VLAKKEN.

DE DOORSNIJDING VAN GEBOGENE MET PLATTE VLAKKEN.

§ 241. Nadat de gebogene vlakken, op de boven verklaarde wijze, door middel van aangenomene projectievlakken zijn voorgesteld geworden, is het zeer gemakkelijk hunne gemeene doorsneden met platte vlakken te construeren. Hiertoe bieden zich twee verschillende wegen aan.

De *eerste*, die gewoonlijk bij uitsluiting gevolgd wordt als het gebogen vlak door eene rechte beschrijvende lijn is voortgebracht

bestaat daarin, dat men, voor eene menigte standen der beschrijvende lijn, haar snijpunt met het platte vlak construeert. Ieder zoodanig snijpunt is dan een punt van de begeerde gemeene doorsnede, omdat het, als een punt der beschrijvende lijn, zoowel op het gebogen vlak als in het platte vlak ligt. Heeft men dus van een genoegzaam aantal dezer snijpunten de projectiën gevonden, zoo zal men door deze onmiddellijk de projectiën der begeerde gemeene doorsnede uit de hand kunnen trekken.

De tweede weg, dien men volgen kan, bestaat daarin, dat men een stelsel van snijdende vlakken aanneemt, en voor ieder snijdend vlak zijne doorsnede, zoowel met het gebogene als met het platte vlak, bepaalt; de punten die deze beide doorsneden gemeen hebben, zijn dan punten van de begeerde doorsnede van het gebogene vlak met het platte, en deze zal derhalve door een genoegzaam aantal punten gevonden worden, indien men slechts een genoegzaam aantal snijdende vlakken bezigt. Het volgen van dezen weg, kan echter alleen van veel nut zijn, ingevalle men een stelsel van snijdende vlakken weet aan te nemen, wier doorsneden met het gebogen vlak onmiddellijk en zonder eenige constructie kunnen gevonden worden.

Er blijft ons slechts over de toepassing van de beide genoemde handelwijzen door eenige werkstukken op te helderen.

§ 242. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een kegelvlak met een plat vlak te construeren.*

Zij ABCD de in het horizontale vlak gelegene rigtlijn des kegelvlak, dat (T' , T'') tot top heeft (Fig. 162), en ($E, EE_{,,}$) het platte vlak. Door dan het punt (T' , T'') met eenig punt (P' , P'') van de rigtlijn te vereenigen, verkrijgen wij dadelijk eene beschrijvende lijn ($T'P'$, $T''P''$) van het kegelvlak; construeren wij dus, door middel van het horizontaal-projecterend vlak ($R, RR_{,,}$), het snijpunt (p' , p'') van de lijn ($T'P'$, $T''P''$) met het vlak ($E, EE_{,,}$), zoo is (p' , p'') een punt van de gevraagde doorsnede.

Wanneer, zooals in onze figuur, de rigtlijn in twee punten P' en Q' , door eene uit T' getrokken rechte lijn, gesneden wordt, vindt men twee beschrijvende lijnen ($T'P'$, $T''P''$) en ($T'Q'$, $T''Q''$), die hetzelfde horizontaal-projecterend vlak ($R, RR_{,,}$) hebben; hierdoor wordt het gemakkelijk beider snijpunten met het vlak ($E, EE_{,,}$) gelijktijdig te construeren, waardoor men dadelijk twee punten (p' , p'') en (q' , q'') der gevraagde doorsnede verkrijgt.

Door een genoegzaam aantal op deze wijze geconstrueerde punten, kan men dan uit de hand de in onze figuur voorgestelde projectiën der begeerde gemeene doorsnede trekken.

Construeert men de horizontale projectiën a' en c' van de punten, waarin het vlak $(E, EE_{//})$ gesneden wordt door de beschrijvende lijnen des kegelvlak, wier horizontale projectiën de uiterste standen $T'A$ en $T'C$ hebben, dan maken deze punten a' en c' de afscheiding uit, tusschen het zichtbare en onzichtbare deel van de horizontale projectie der doorsnede. In hare verticale projectie zijn die afscheidingspunten b'' en d'' evenzoo de verticale projectiën van de punten, waarin het vlak $(E, EE_{//})$ gesneden wordt, door de beschrijvende lijnen, wier verticale projectiën de uiterste standen $T''B''$ en $T''D''$ hebben.

Begeert men de ware gedaante en grootte der geconstrueerde doorsnede te vinden, dan behoeft men slechts het vlak $(E, EE_{//})$, met de daarin liggende kromme lijn, om zijn horizontalen doorgang op het horizontale vlak neer te slaan; hiertoe kan men den omgekeerden weg volgen, dien wij in § 137 en § 138 aanwezen.

Wij hebben in onze figuur eene geslotene rigtlijn aangenomen, en ook aan het vlak $(E, EE_{//})$ zulk eenen stand gegeven, dat wij voor de gevraagde doorsnede eene geslotene kromme vonden. Een kegelvlak met geslotene rigtlijn kan echter zeer wel door een plat vlak gesneden worden volgens eene kromme lijn, die oneindig voortloopende takken heeft. Een plat vlak, dat door den top gaat, snijdt het kegelvlak volgens een of meer beschrijvende lijnen, die onmiddellijk bepaald worden door de snijpunten van de rigtlijn met den horizontalen doorgang van het vlak. Een plat vlak, dat evenwijdig met het horizontale is, snijdt het kegelvlak volgens eene kromme lijn, die gelijkvormig met de rigtlijn is, en zich in hare ware gedaante en grootte op het horizontale vlak projecteert.

Zoo is b. v. in Fig. 162 de doorsnede des kegelvlak met het platte vlak $(V_{//} V_{//})$ eene kromme lijn, wier horizontale projectie $A_1'C_1'$ gelijkvormig met ABCD is en tevens de ware gedaante der doorsnede heeft, terwijl hare verticale projectie $B_1''D_1''$ langs den doorgang $V_{//} V_{//}$ valt. Door het construeren van zulk eene doorsnede, verkrijgt men de projectiën ABCD $A_1'C_1'$ en $B''B_1''D_1''D''$ van een afgeknotten kegel met willekeurig grondvlak ABCD.

§ 243. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een plat vlak met een gewonen cirkelvormigen kegel te construeren.*

In het voorgaande werkstuk den eersten der beide in § 241 aangewezen wegen gevolgd hebbende, zullen wij thans den tweeden weg volgen.

Laat (T' , T'') de top, en een cirkel, in het horizontale vlak uit T' met $T'A$ als straal beschreven, het grondvlak van den kegel zijn (Fig. 163); zij voorts ($E, EE_{,,}$) het platte vlak, dat wij loodregt op het verticale vlak zullen aannemen, dan hebben wij hierdoor dadelijk de verticale projectie $P''Q''$ der begeerde doorsnede. Snijden wij verder den kegel en het platte vlak door een vlak ($V_{,,}V_{,,}$), dat evenwijdig met het horizontale is, dan zullen in het horizontale vlak, een cirkel uit T' met $C''D''$ beschreven, en eene rechte lijn uit v'' rechthoekig door OX getrokken, respectievelijk de projectiën zijn der doorsneden van het vlak ($V_{,,}V_{,,}$) met den kegel en met het vlak ($E, EE_{,,}$); de snijpunten v' , van dien cirkel en die rechte lijn, zijn dus punten van de horizontale projectie der begeerde doorsnede. Deze wordt alzoo in haar geheel geconstrueerd, door telkens nieuwe snijdende vlakken ($V_{,,}V_{,,}$) aan te nemen, en voor ieder van hen de punten v' op de aangewezen wijze te bepalen.

Hier hebben wij dan een stelsel van snijdende vlakken, evenwijdig met het horizontale aangenomen. Van dit stelsel kunnen die vlakken, wier verticale doorgangen beneden P'' of boven Q'' vallen, niet gebruikt worden, omdat hunne doorsneden met den kegel en met het vlak ($E, EE_{,,}$) elkander niet snijden. Deze doorsneden, en dus ook hare horizontale projectiën, zullen elkander raken, indien de doorgang $V_{,,}V_{,,}$ van het snijdende vlak juist door P'' of Q'' gaat; hierdoor vindt men de uiterste punten P' en Q' van de horizontale projectie der begeerde doorsnede, zoodat dan ook (P' , P'') en (Q' , Q'') de snijpunten zijn van de beschrijvende lijnen ($T'A$, $T''A''$) en ($T'B$, en $T''B''$) met het vlak ($E, EE_{,,}$).

In plaats van de constructie der doorsnede op de aangewezen wijze uit te voeren, kan men gebruik maken van hetgeen in de hoogere meetkunst over de kegelsneden geleerd wordt. Men weet dan, dat de kegel door het vlak ($E, EE_{,,}$) gesneden wordt volgens eene ellips, die de lijn ($P'Q'$, $P''Q''$) tot groote as, en dus het midden (M' , M'') dier lijn tot middelpunt heeft; terwijl hare kleine as loodregt op het verticale vlak staat. Men behoeft dus slechts

$P''Q''$ in M'' middendoor te deelen, door M'' de lijn mm evenwijdig met OX te trekken, en op mm als middellijn een halven cirkel te beschrijven, om onmiddellijk de lengte $M''M$ van de halve kleine as der elliptische doorsnede te vinden. Deze kleine as, die het enkele punt M'' tot verticale projectie heeft, is evenwijdig met het horizontale vlak, en projecteert zich dus daarop in hare ware lengte; stelt men derhalve uit M' aan weerszijden op $P'Q'$ loodlijnen $M'R'$ en $M'S'$, die gelijk aan $M''M$ zijn, dan zijn $P'Q'$ en $R'S'$ de assen van de elliptische horizontale projectie $P'R'Q'S'$ der doorsnede. Daar $M''M < \frac{1}{2}mm$ is, terwijl men zich gemakkelijk zal overtuigen dat $mm = P'Q'$ is, is ook $R'S' < P'Q'$; zoodat hier de projectie van de groote as der doorsnede, ook de groote as van de projectie der doorsnede is.

Om de doorsnede in hare ware gedaante te verkrijgen, heeft men blijkbaar niets anders te doen dan eene ellips te beschrijven, wier assen in lengte gelijk aan $P''Q''$ en $R'S'$ zijn.

Stond het vlak $(E, EE_{//})$ niet zooals wij aannamen loodrecht op het verticale vlak, dan kan de constructie even als boven verrigt worden, nadat men een nieuw verticaal vlak loodrecht op den horizontalen doorgang des vlaks aangenomen, en daarop den kegel geprojecteerd heeft; hetgeen allergemakkelijkst is.

Wij hebben overigens aan het vlak $(E, EE_{//})$ zulk eenen stand gegeven, dat het al de beschrijvende lijnen beneden den top sneed, waardoor wij eene ellips tot doorsnede verkregen. Heeft het vlak $(E, EE_{//})$ een anderen stand, dan kan de doorsnede eene parabool of hyperbool zijn, waarvan men even als boven zoovele punten (σ' , σ'') kan construeren als men goedvindt.

§ 244. *WERKSTUK. De gemeene doorsnede van een cilindervlak met een plat vlak te construeren.*

Door elk punt van de gegevene rigtlijn des cilindervlak, kan men onmiddellijk eene beschrijvende lijn trekken, en, in elk dezer beschrijvende lijnen, haar snijpunt met het gegevene platte vlak bepalen. Door de projectiën dezer snijpunten, nadat daarvan een genoegzaam aantal geconstrueerd is, kunnen dan de projectiën der begeerde doorsnede uit de hand getrokken worden.

Wij laten aan den lezer over deze constructie werkelijk uit te voeren, en willen slechts opmerken, dat hier de ware gedaante der doorsnede en de afscheiding tusschen de zichtbare en onzicht-

bare deelen harer projectiën, evenzoo gevonden wordt, als in § 242 ten aanzien van het kegelvlak is aangewezen.

Staan de beschrijvende lijnen des cilindervlaks loodrecht op het horizontale, dan heeft zijne doorsnede, met elk willekeurig hellend vlak, de in het horizontale vlak liggende rigtlijn tot horizontale projectie; hare verticale projectie wordt dan volgens § 176 geconstrueerd. Zoo is b. v., in Fig. 134, $a''d''e''f''g''b''$ de verticale projectie van de doorsnede van het vlak (C_1CC_{11}) met een cilindervlak, welks rigtlijn de in het horizontale vlak liggende kromme lijn $A'B'$ is, en welks beschrijvende lijnen loodrecht op het horizontale vlak staan.

Staat het platte vlak loodrecht op het verticale, dan is de verticale projectie der doorsnede eene regte lijn, die langs den verticalen doorgang van dit vlak valt. Snijdt men b. v. den in Fig. 148 voorgestelden gewonen cilinder door het vlak (E_1EE_{11}) , zoo heeft de doorsnede de regte lijn $P''Q''$ tot verticale en den cirkel $ABCD$ tot horizontale projectie. Na hier in $P''Q''$ een willekeurig punt v'' aangenomen te hebben, vindt men dadelijk de horizontale projectiën v' , van de punten des cilindervlaks, die v'' tot verticale projectie hebben en dus tot de doorsnede behooren; trekt men dan verder door v'' eene lijn vv loodrecht op $P''Q''$, zoodanig dat aan weerszijden $v''v = \frac{1}{2}v'v'$ is, zoo zijn de punten v de verticale projectiën van de standen, die de punten (v', v'') der doorsnede verkregen zullen hebben, nadat men die doorsnede, door eene wenteling om de lijn $(BD, P''Q'')$, evenwijdig met het verticale vlak heeft laten worden. Door de constructie van een genoegzaam aantal zulke punten v , verkrijgt men dan de ware gedaante der doorsnede; te weten: eene ellips, die $P''Q''$ tot groote as heeft, en wier kleine as gelijk aan de middellijn van den cirkel $ABCD$ is.

§ 245. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een omwentelingsvlak met een plat vlak te construeren.*

Laat het omwentelingsvlak door zijne verticaal staande as (M', mM'') en door de verticale projectie $A''B''C''$ van zijnen hoofdmeridiaan (Fig. 164) gegeven zijn, terwijl (E_1EE_{11}) het gegebene platte vlak is. Om dan hunne gemeene doorsnede te construeren, zullen wij den tweeden in § 241 aangewezen weg dienen te volgen, en daartoe een stelsel van snijdende vlakken bezigen, die loodrecht op de omwentelings-as, en dus evenwijdig met het horizontale vlak zijn.

Zij ($V_{,,}V_{,,}$) een dezer snijdende vlakken, door welks doorgang mM'' in r , $A''B''C''$ in R'' , en $EE_{,,}$ in S'' gesneden wordt; indien wij dan in het horizontale vlak uit M' met rR'' als straal eenen cirkel beschrijven, is dit de horizontale projectie van den parallelcirkel, volgens welken het omwentelingsvlak door het vlak ($V_{,,}V_{,,}$) wordt gesneden; en zoo wij, na $S'S'$ loodregt op de as van projectie getrokken te hebben, $S'R'$ evenwijdig met $EE_{,,}$ trekken, is $S'R'$ de horizontale projectie van de lijn, volgens welke het vlak ($E,EE_{,,}$) door het vlak ($V_{,,}V_{,,}$) wordt gesneden. De snijpunten v' van de lijn $S'R'$ en den uit M' met rR'' beschreven cirkel, leeren ons dus dadelijk twee punten (v' , v'') kennen, die zoowel op het omwentelingsvlak als in het vlak ($E,EE_{,,}$) gelegen zijn, en die derhalve tot de begeerde gemeene doorsnede behooren. Door een genoegzaam aantal snijdende vlakken zooals ($V_{,,}V_{,,}$) te bezigen, zal men zoovele punten (v' , v'') der doorsnede kunnen construeren als men goedvindt, en hare projectiën kunnen dan, door de gelijknamige projectiën der geconstrueerde punten, uit de hand getrokken worden.

Het kan zooals in onze figuur gebeuren (en of dit gebeuren zal hangt van de gedaante van den meridiaan af) dat het snijdende vlak ($V_{,,}V_{,,}$) niet te hoog of te laag genomen mag worden, om te maken dat de cirkel en de lijn, door wier snijding de punten v' gevonden worden, elkander werkelijk snijden. Stond het vlak ($E,EE_{,,}$) loodregt op het verticale, dan zouden de punten, waar zijn verticale doorgang de projectiën van de hoofdmeridianen snijdt, onmiddellijk den hoogsten en laagsten stand der snijdende vlakken ($V_{,,}V_{,,}$) bepalen, even als dit in Fig. 163 het geval was. Hier heeft men dus tot die bepaling een nieuw vlak noodig, dat loodregt op het verticale is, maar overigens ten opzichte van het omwentelingsvlak volkomen denzelfden stand heeft als het vlak ($E,EE_{,,}$). Construeren wij diensvolgens op de gewone wijze het snijpunt (M' , D''), van de as (M' , mM'') met het vlak ($E,EE_{,,}$) en bezigen wij daarna de constructie van § 88, om den standhoek $m\hat{h}D''$ van het vlak ($E,EE_{,,}$) met het horizontale te vinden, zoo verkrijgen wij onmiddellijk het bedoelde nieuwe vlak ($h,h,h_{,,}$); immers de vlakken ($E,EE_{,,}$) en ($h,h,h_{,,}$) maken gelijke hoeken met het horizontale vlak, en dus ook met de omwentelings-as, terwijl zij door hetzelfde punt (M' , D'') van die as gaan. De snijpunten P'' en Q'' van den verticalen doorgang $h,h_{,,}$ met de verticale pro-

jectiën der hoofdmeridianen, bepalen alzoo de uiterste standen, die men aan de snijdende vlakken ($V_{,,}V_{,,}$) kan geven.

Heeft het omwentelingsvlak, zooals in onze figuur, een grootsten parallelcirkel, dan vindt men door het snijdende vlak te bezigen, waarin die grootste cirkel ligt, de punten c' en d' die, in de horizontale projectie der gevraagde doorsnede, het zichtbare van het onzichtbare deel afscheiden. Wil men ook in de verticale projectie der doorsnede die punten van afscheiding afzonderlijk construeren, zoonbreng men door de omwentelings-as een vlak (U,U) evenwijdig met het verticale, en construeer de gemeene doorsnede der vlakken (U,U) en ($E,EE_{,,}$); deze doorsnede zal blijkbaar door het punt (M',D'') gaan, en hare verticale projectie $T''D''$, die evenwijdig met $EE_{,,}$ loopt, zal de verticale projectiën der hoofdmeridianen in de begeerde punten van afscheiding a'' en b'' snijden. Deze punten a'' en b'' immers, zijn blijkbaar de verticale projectiën van de snijpunten van het vlak ($E,EE_{,,}$) met de hoofdmeridianen.

Begeert men de ware gedaante der geconstrueerde doorsnede te kennen, zoo behoeft men wederom niets anders te doen, dan het vlak ($E,EE_{,,}$), met de daarin zich bevindende kromme, op het horizontale vlak neder te slaan.

Hoe de doorsnede geconstrueerd wordt van een omwentelingsvlak, met een plat vlak dat door de omwentelings-as gaat, of met die as evenwijdig is, is reeds in § 216 en § 217 aangewezen.

§ 246. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een scheef oppervlak met een plat vlak te construeren.*

Construeert men eerst, volgens de opgegevene wording van het scheeve oppervlak, een genoegzaam aantal standen der beschrijvende lijn, en daarna de snijpunten van deze beschrijvende lijnen met het gegevene platte vlak, dan zal men door de projectiën dier snijpunten, de projectiën der begeerde doorsnede uit de hand kunnen trekken; terwijl de ware gedaante der doorsnede wederom door het neerslaan van het platte vlak wordt gevonden.

Zoo hebben wij b. v. in Fig. 156 de doorsnede van het aldaar voorgestelde scheeve oppervlak, met een plat vlak ($V,VV_{,,}$) geconstrueerd, dat loodregt op het horizontale vlak staat. Wegens dien bijzonderen stand van het vlak ($V,VV_{,,}$) viel de horizontale projectie der begeerde doorsnede langs den doorgang $VV_{,,}$, zoodat slechts hare verticale projectie behoefde geconstrueerd te worden; en deze kon terstond uit de hand getrokken worden, door de punten

B'', P'', Q'' , enz., die in de verticale projectiën der beschrijvende lijnen onmiddellijk bepaald werden, door middel van de punten B', P', Q' , enz., waarin de doorgang VV , de horizontale projectiën der beschrijvende lijnen sneed.

Door voorts, op den doorgang VV , loodlijnen uit B', P', Q' , enz. op te rigten, en deze loodlijnen $B'B, P'P, Q'Q$, enz. gelijk te nemen aan de hoogten der punten B'', P'', Q'' , enz. boven de as van projectie, verkregen wij de ware gedaante $BPQC$ der doorsnede.

DE DOORSNIJDING VAN GEBOGENE VLAKKEN ONDERLING.

§ 247. De constructie van de doorsneden der gebogene vlakken door platte, verschaft onmiddellijk de noodige hulpmiddelen, om ook de gemeene doorsneden van gebogene vlakken onderling te kunnen construeren. Construeert men namelijk de kromme of rechte lijnen, volgens welke twee gegebene gebogen vlakken door eenig nieuw aangenomen vlak, b v. door een plat vlak evenwijdig met het horizontale, gesneden worden, dan zullen de snijpunten dezer geconstrueerde lijnen, punten van de beide gebogen vlakken, en dus van hunne gemeene doorsnede zijn. Door een genoegzaam aantal nieuwe snijdende vlakken aan te nemen, kan men derhalve zoovele punten van de begeerde doorsnede vinden, als men verkiest. Die snijdende vlakken moeten hierbij zóó genomen worden, dat de kromme of rechte lijnen, volgens welke zij de gegebene gebogen vlakken snijden, gemeenschappelijke punten verkrijgen; kan men geene snijdende vlakken aanwijzen, die aan deze voorwaarde voldoen, dan snijden ook de gebogen vlakken elkander niet.

Waar het in bijzondere gevallen gemakkelijk mogt zijn, de punten te bepalen, waarin het eene gebogen vlak door de beschrijvende lijnen van het andere gesneden wordt, vindt men, door de aaneenschakeling dier snijpunten, almede de doorsnede der beide gebogen vlakken. Tot het bepalen van zulke snijpunten, zal men echter doorgaans door de genoemde beschrijvende lijnen wederom vlakken moeten brengen, en hierdoor komt men dan eigenlijk op de bovengenoemde aanwending van snijdende vlakken terug. In het bezigen van een stelsel snijdende vlakken, be-

staat dus in het algemeen de constructie van de doorsnijding der gebogen vlakken onderling.

Deze constructie, in het algemeen beschouwd, kan echter ten gevolge hebben, dat men, voor ieder punt der begeerde doorsnede, twee kromme lijnen van aanvankelijk onbekende gedaante zou moeten construeren, wier snijding dat punt deed kennen; en eené dergelijke constructie, hoezeer mogelijk, zou te langwijdig worden, om haar uitvoerlijk te mogen noemen. Deze zwaarigheid ontgaat men echter in de meest voorkomende gevallen, door de snijdende vlakken, in verband met de wording der gegevene gebogen vlakken, zóó aan te nemen, dat zij de gebogene vlakken snijden: hetzij volgens regte lijnen, hetzij volgens cirkels, hetzij volgens kromme lijnen wier nieuwe afteekening men ontwijken kan. De snijdende vlakken, die hiertoe in aanmerking komen, zijn doorgaans platte vlakken, die of allen door een en dezelfde regte lijn gaan, of allen onderling evenwijdig en dikwijls tevens evenwijdig met een der projectievlakken zijn; echter is er ook een geval, waarin men zich met vrucht van snijdende bolvormige oppervlakken kan bedienen. Dit alles zullen wij thans door de volgende werkstukken nader ophelderen.

§ 248. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van twee kegelvlakken te construeren.*

Vereenigt men de toppen der beide gegevene kegelvlakken door een regte lijn, en brengt men door deze lijn een plat vlak, dat de beide kegelvlakken snijdt, dan zal dit platte vlak, omdat het door de toppen gaat, de kegelvlakken snijden volgens beschrijvende lijnen, die zeer gemakkelijk te construeren zijn; en elk punt, waarin dan een beschrijvende lijn van het een kegelvlak door een beschrijvende lijn van het andere gesneden wordt, zal blijkbaar een punt van de begeerde gemeene doorsnede zijn. Om dus deze doorsnede te construeren, bedient men zich van snijdende platte vlakken, allen gaande door de lijn, die de toppen der beide kegelvlakken vereenigt. Deze snijdende vlakken zijn almede gemakkelijk te vinden; want, omdat zij door de genoemde vereenigingslijn gaan, zullen hunne horizontale doorgangen allen door het punt gaan, waar die vereenigingslijn of haar verlengde het horizontale vlak ontmoet. Trekt men dus door dat ontmoetingspunt een regte lijn, die de in het horizontale vlak liggende rigtlijnen der kegelvlakken beide snijdt, zoo is die lijn de hori-

zontale doorgang van zulk een een snijdend vlak, waarvan men dan verder weet, dat het door de beide toppen gaat.

Om b. v. de gemeene doorsnede te construeren van de oppervlakken der in Fig. 165 voorgestelde kegels, wier geslotene rigtlijnen ABCD en EFGH in het horizontale vlak gelegen zijn, hebben wij door hunne toppen (T' , T'') en (U' , U'') eene rechte lijn getrokken, en het ontmoetingspunt I van die lijn met het horizontale vlak geconstrueerd. Voorts hebben wij uit dit punt I eene lijn IK getrokken, die de beide rigtlijnen sneed; de eene in P en Q, de andere in R en S; hierdoor werd IK de horizontale doorgang van een plat vlak, dat, door de beide toppen gaande, het eene kegelvlak sneed volgens de beschrijvende lijnen ($T'P$, $T''P''$) en ($T'Q$, $T''Q''$), en het andere volgens de beschrijvende lijnen ($U'R$, $U''R''$) en ($U'S$, $U''S''$). De constructie dezer beschrijvende lijnen heeft ons dus, door hare onderlinge snijding, vier punten der begeerde gemeene doorsnede doen vinden, namelijk de punten die in onze figuur met de cijfers 1, 2, 3, 4 gemerkt zijn. De eigenschap, dat de beide projectiën van eenig punt in eene lijn moeten liggen, die de as regthoekig snijdt, verschaft hier dadelijk eene proef, op de naauwkeurige uitvoering der constructie.

De geconstrueerde punten zijn blijkbaar slechts zichtbaar, voor zoover zij door de snijding van twee zichtbare beschrijvende lijnen gevonden worden; want naargelang zij door de snijding van twee onzichtbare beschrijvende lijnen, of van eene zichtbare en eene onzichtbare worden verkregen, zullen de kegelvlakken beide, of een van beide, hen voor het oog des beschouwers verbergen. In onze figuur is dus, wat de horizontale projectiën aangaat, het punt 2 zichtbaar; terwijl het punt 4 door de beide kegelvlakken, de punten 1 en 3 slechts door een der kegelvlakken onzichtbaar gemaakt worden. Wat de verticale projectiën daarentegen betreft, is het punt 3 zichtbaar; terwijl de punten 1, 2 en 4 onzichtbaar zijn, omdat 1 zich achter de beide kegelvlakken-, 2 en 4 zich achter een hunner bevinden.

Door uit I meerdere lijnen te trekken, die ABCD en EFGH sneden, en voor elk dezer lijnen de constructie even als boven voor IK te verrigten, hebben wij, door aaneenschakeling der verkregene punten, een gedeelte *e3g4e* van de horizontale projectie der gevraagde doorsnede geconstrueerd; dit gedeelte is onzichtbaar, alzoo *e3g* door het eene kegelvlak en *e4g* door de beide kegel-

vlakken voor het oog bedekt wordt. De punten van afscheiding e en g zijn gevonden, door het bezigen der snijlijnen, uit I door de grenspunten E en G der rigtlijn $EFGH$ getrokken.

§ 249. Mogt het boven gebezigde punt I zóó komen te vallen, dat men uit dit punt geene regte lijn kon trekken, die de rigtlijnen $ABCD$ en $EFGH$ beide sneed, dan zou dit een bewijs zijn, dat de kegels elkander niet sneden.

Valt het punt I gelijk in onze figuur zoodanig, dat de rigtlijn $ABCD$ van den eenen kegel tweemaal gesneden wordt door elke lijn, die men uit I naar de rigtlijn $EFGH$ van den anderen kegel kan trekken, dan zal ook het oppervlak van den eersten kegel tweemaal gesneden worden door elke beschrijvende lijn van den tweeden, dat is met andere woorden: de tweede kegel zal den eersten *doorboren*. De doorsnede hunner oppervlakken bestaat dan uit twee van elkander afgezonderde geslotene kromme lijnen; deze worden door de benamingen *ingang* en *uitgang* van elkander onderscheiden. In Fig. 165 is dus $e3g4e$ de horizontale projectie van den ingang. Hierbij valt echter op merken, dat de ingang, in plaats van eene eigenlijk geslotene kromme, eene kromme lijn kan wezen met twee oneindig voortlopende en naar evenwijdigheid strevende takken. Dit bijzondere geval zal zich voordoen, indien de gegevene kegels toelaten dat eene beschrijvende lijn van de eene evenwijdig kan zijn met eene beschrijvende lijn van de andere; want alsdan zal een der snijdende vlakken door die evenwijdige beschrijvende lijnen gaan, en dus een oneindig ver van de toppen liggend punt als een punt van den ingang aanwijzen.

Komt het punt I zóó te vallen, dat men uit dit punt aan elk der rigtlijnen eene raaklijn kan trekken die de andere rigtlijn snijdt, dan heeft er wel snijding maar geene doorboring plaats, zoodat de oppervlakken der kegels elkander volgens eene enkele samenhangende kromme lijn snijden, die in het zooeven genoemde bijzondere geval wederom oneindig voortlopende takken zal hebben. Zoowel in dit geval als in dat van doorboring, kan voorts de betrekkelijke plaatsing van toppen en rigtlijnen ten gevolge hebben, dat de snijding geheel of ten deele slechts in de verlengde oppervlakken der kegels, of in de tweede bladen dier oppervlakken plaats heeft.

Mogt eindelijk het punt I ontbreken, omdat de toppen even hoog boven het horizontale vlak lagen, dan zou men de hori-

zontale doorgangen der snijdende vlakken evenwijdig moeten trekken met de horizontale projectie van de vereenigingslijn der toppen, en verder de constructie even als boven uitvoeren en beoordeelen.

§ 250. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van twee cilindervlakken te construeren.*

Deze doorsnede kan even als die van twee kegelvlakken geconstrueerd worden, mits men snijdende platte vlakken bezigt, die de beide gegevene cilindervlakken volgens beschrijvende lijnen snijden; en hiertoe moeten deze snijdende vlakken (zie § 205) evenwijdig zijn met de gegevene rigtingen der beschrijvende lijnen, zoowel van het eene als van het andere cilindervlak. Zulke snijdende vlakken zijn weder gemakkelijk te bekomen, want zij moeten evenwijdig zijn met een vlak, dat men brengen kan door twee lijnen, die, uit eenig punt in de ruimte, evenwijdig met de beide gegevene rigtingen der beschrijvende lijnen getrokken zijn.

Indien men dus, na deze lijnen getrokken te hebben, hare ontmoetingspunten met het horizontale vlak construeert, en door deze ontmoetingspunten eene regte lijn trekt, zullen de horizontale doorgangen der bedoelde snijdende vlakken evenwijdig met de laatstgenoemde regte lijn loopen. Trekt men dus zulk eenen doorgang, die de in het horizontale vlak liggende rigtlijnen beide snijdt, zoo bepalen deze snijpunten terstond de beschrijvende lijnen, die in het snijdende vlak liggen en dus, door hare onderlinge snijding, punten der gevraagde doorsnede doen kennen.

Mogt het onmogelijk zijn zulk eenen doorgang zóó te trekken, dat hij de beide rigtlijnen sneed, dan zou hieruit blijken dat ook de cilindervlakken elkander niet sneden.

Wij laten de uitvoering der constructie aan den lezer over. Alleen willen wij opmerken dat, zoo de rigtlijnen geslotene kromme lijnen zijn, de eene cilinder den anderen zal doorboren, indien de doorgangen der snijdende vlakken, die men door de verschillende punten van de rigtlijn des eersten cilinders trekken kan, allen de rigtlijn des tweeden cilinders in twee punten snijden. De begeerde doorsnede bestaat dan weder uit eenen ingang en eenen uitgang.

Zijn de beschrijvende lijnen van twee cilindervlakken met elkander evenwijdig, dan kunnen deze oppervlakken elkander blijk-

baar slechts volgens een of meer beschrijvende lijnen snijden, die onmiddellijk door de snijpunten hunner rigtlijnen bepaald worden.

§ 251. Hebben de gegeven cilindervlakken, beide of een van beide, hunne beschrijvende lijnen evenwijdig met het horizontale vlak, dan kan men voor zulke cilindervlakken geene in het horizontale vlak liggende rigtlijnen aannemen (zie § 206). Hiernaar zal dus de constructie hunner gemeene doorsnede, met behoud van de boven aangewezen snijdende vlakken, moeten gewijzigd worden.

Zoo hebben wij b. v. in Fig. 166 de gemeene doorsnede geconstrueerd van twee gewone cirkelvormige cilinders, wier beschrijvende lijnen evenwijdig met het horizontale vlak loopen. Hier hebben wij twee verschillende verticale projectievlakken, en dus ook twee assen van projectie OX en O_1X_1 aangenomen, zoodanig dat elk der verticale vlakken loodregt op de beschrijvende lijnen van een der cilinders is; diensvolgens zijn dan de rigtlijnen dezer cilinders cirkels $ABCD$ en $A_1B_1C_1D_1$, in de aangenomene verticale vlakken beschreven. De snijdende vlakken, volgens de aanwijzing der voorgaande § te bezigen, zijn hier evenwijdig met het horizontale vlak. Wij hebben dus, op gelijke afstanden boven OX en O_1X_1 lijnen $V_{II}V_{II}$ en $V_{III}V_{III}$ getrokken, die de cirkels $ABCD$ en $A_1B_1C_1D_1$ snijden; deze lijnen zijn dan de verticale doorgangen van een vlak, dat de beide cilinders volgens beschrijvende lijnen snijdt, wier horizontale projectiën niet anders zijn dan lijnen, uit de snijpunten P en Q regthoekig door OX , en uit de snijpunten P_1 en Q_1 regthoekig door O_1X_1 getrokken. De snijding dezer lijnen heeft ons de vier punten, die wij in de figuur met 1, 2, 3 en 4 gemerkt hebben, als punten van de horizontale projectie der begeerde doorsnede doen vinden, die wij in haar geheel geconstrueerd hebben, door een genoegzaam aantal snijdende vlakken te bezigen.

Omdat in onze figuur $Bb < B_1b_1$ en tevens $Db < D_1b_1$ is, wordt geen onzer cilinders door den anderen doorboord, zoodat hunne oppervlakken slechts eene enkele zamenhangende kromme lijn gemeen hebben; terwijl Bb de grootste en D_1b_1 de kleinste hoogte boven het horizontale vlak is, die men aan de snijdende vlakken geven kan. Trekken wij dus LL evenwijdig met OX op den afstand D_1b_1 , en H_1H_1 evenwijdig met O_1X_1 op den afstand Bb , zoo is op het eene verticale vlak de boog $LAPBQCL$, op het

andere verticale vlak de boog $H_1P_1A_1D_1C_1Q_1H_1$, de projectie van de gemeene doorsnede onzer cilindervlakken.

De snijdende vlakken, die door de lijnen LL en H_1H_1 bepaald worden, snijden slechts een onzer cilinders, terwijl zij den anderen raken. Zij leeren in de gevraagde doorsnede de hoogste en laagste punten vinden, die respectievelijk de punten h , k en de punten l , l tot horizontale projectiën hebben.

Omdat in onze figuur $Aa < A_1a_1$ is, zullen in de horizontale projectie slechts zichtbare punten opgeleverd worden, door snijdende vlakken niet lager dan A_1a_1 boven het horizontale vlak genomen; en het snijdende vlak, dat door A_1C_1 gaat, leert alzoo de punten i , i , i , i kennen, die in de horizontale projectie der doorsnede het zichtbare van het onzichtbare deel afscheiden. Het snijdende vlak, dat door AC gaat, leert evenzoo de afscheidingspunten k , k , k , k kennen, tusschen de deelen, die door slechts een der cilinderoppervlakken of door beide bedekt worden.

§ 252. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een kegelvlak met een cilindervlak te construeren.*

Trekt men door den top van het kegelvlak eene lijn, die evenwijdig met de beschrijvende lijnen van het cilindervlak is, en brengt men door deze lijn vlakken, die de beide gebogen vlakken snijden, dan zullen deze snijdingen plaats hebben volgens beschrijvende lijnen, die zeer gemakkelijk te construeren zijn, en wier snijpunten punten van de begeerde gemeene doorsnede zullen zijn.

Bepaalt men het ontmoetingspunt met het horizontale vlak, van de lijn door den kegeltop evenwijdig met de beschrijvende lijnen des cilindervlaks getrokken, dan behoort blijkbaar dit punt, even als het punt I in Fig. 165, tot de horizontale doorgangen van al de genoemde snijdende vlakken. Deze doorgangen kunnen dus onmiddellijk getrokken worden; en hunne snijpunten, met de in het horizontale vlak liggende rigtlijnen, wijzen onmiddellijk de beschrijvende lijnen aan, die in ieder snijdend vlak gelegen zijn.

Wij laten de uitvoering der constructie, volgens deze aanwijzing, aan den lezer over, en merken slechts op, dat het beoordeelen of de gebogen vlakken elkander werkelijk snijden, en of er bij geslotene rigtlijnen doorboring, hetzij van den kegel door den cilinder, hetzij van den cilinder door den kegel plaats heeft, evenzoo geschiedt als dit in § 249 ten aanzien van twee kegelvlakken verklaard is.

§ 253. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een gewonen cirkelvormigen kegel met een bol te construeren.*

Plaatsen wij den kegel met zijn grondvlak op het horizontale vlak, dan zullen snijdende vlakken, evenwijdig met het horizontale genomen, zoowel den kegel als den bol volgens cirkels snijden, die zich op het horizontale vlak in hunne ware gedaante projecteren, en zeer gemakkelijk te construeren zijn. Ieder zoodanig snijdend vlak zal dus, door de snijpunten dezer cirkels, twee punten van de gevraagde doorsnede doen kennen.

Zij namelijk (T' , T'') de as, (T' , T'') de top, en $T'A''B''$ de verticale projectie van den gegeven kegel (Fig. 167); zij voorts ($M'N'$, $M''N''$) de straal en (M' , M'') het middelpunt van den gegeven bol, welk middelpunt wij gemakshalve zullen onderstellen even ver vóór het verticale vlak te liggen als de as des kegels. Snijden wij nu kegel en bol door een vlak ($V_{,,}V_{,,}$), dat evenwijdig met het horizontale is, zoo wijzen de deelen van den doorgang $V_{,,}V_{,,}$, die binnen de verticale projectiën van kegel en bol vallen, de middellijnen en dus ook de stralen rs en mn aan van de cirkels, volgens welke kegel en bol door het vlak ($V_{,,}V_{,,}$) gesneden worden. Van deze cirkels kunnen wij dus de horizontale projectiën dadelijk, uit T' met rs , en uit M' met mn , beschrijven, en door hare snijding vinden wij dan de horizontale projectiën v' van twee punten der gevraagde doorsnede, die beide hunne verticale projectiën in v'' hebben. Een tweede snijdend vlak ($U_{,,}U_{,,}$), dat aan de andere zijde even ver als ($V_{,,}V_{,,}$) van het middelpunt (M' , M'') verwijderd is, snijdt den kegel volgens een cirkel wiens straal r_1s_1 van rs verschilt, maar den bol volgens een cirkel wiens straal m_1n_1 gelijk aan mn is; wij behoeven dus de reeds uit M' beschrevene projectie van laatstgenoemden cirkel, slechts wederom te snijden door een cirkel uit T' met r_1s_1 beschreven, ten einde de horizontale projectiën u' te bekomen, van twee andere punten der gevraagde doorsnede, die beide hunne verticale projectiën in u'' hebben.

Door een genoegzaam aantal snijdende vlakken zooals ($V_{,,}V_{,,}$) en ($U_{,,}U_{,,}$) te gebruiken, hebben wij de kromme lijn $P'v'e'u'Q'u'e'v'P'$ voor de horizontale, en de kromme lijn $P''v''e''u''Q''$ voor de verticale projectie der gevraagde doorsnede verkregen.

In de horizontale projectie der doorsnede zijn de punten v' onzichtbaar en de punten u' zichtbaar, omdat het vlak ($V_{,,}V_{,,}$) de onderste en het vlak ($U_{,,}U_{,,}$) de bovenste helft van den bol snijdt.

In de verticale projectie behoort zoowel v'' als u'' tot een zichtbaar en een onzichtbaar punt; wordende het onzichtbare door het zichtbare bedekt. Een snijndend vlak, door het middelpunt des bols gebragt, heeft ons de beide punten (e' , e'') der doorsnede doen vinden, die in hare horizontale projectie het zichtbare van het onzichtbare deel afscheiden. In de projectiën e' wordt de horizontale projectie der gevraagde doorsnede door die van den bol geraakt.

De laagste en hoogste standen, die men aan de snijdende vlakken geven kan, worden hier bepaald door de snijpunten P'' en Q'' van de projectie $T''A''$ met de verticale projectie des bols. Bij deze uiterste standen der snijdende vlakken, verkrijgen wij cirkels, die elkander in één punt raken, in plaats van elkander te snijden; zij leveren de punten (P' , P'') en (Q' , Q'') der doorsnede op.

Wij verkregen eene enkele zamenhangende kromme lijn tot doorsnede, omdat in onze figuur de projectiën $T''A''$ en $T''B''$ slechts een van beide door de verticale projectie van den bol gesneden werden; mogten zij er beide door gesneden worden, dan zou de kegel den bol doorboren, en zoowel voor den ingang als voor den uitgang zouden de snijdende vlakken een hoogsten en laagsten stand hebben. Een snijndend vlak door het middelpunt van den bol gebragt zou dan meestal buiten de vereischte grenzen vallen, zoodat de horizontale projectie der doorsnede die van den bol niet meer zou raken, en uit twee geslotene kromme lijnen zou bestaan, waarvan de eene onzichtbaar tot den ingang, de andere zichtbaar tot den uitgang zou behooren.

Liggen de as van den kegel en het middelpunt van den bol niet even ver vóór het verticale vlak, dan kan de constructie even als boven worden uitgevoerd; slechts zal men dan voor elk paar punten, wier horizontale projectiën v' door de snijding van twee cirkels gevonden zijn, ook verschillende verticale projectiën v'' verkrijgen, waardoor de verticale projectie der gevraagde doorsnede almede eene geslotene kromme zal worden. Maar men zou hier toch een nieuw verticaal vlak, in den boven gebezigten stand, moeten aannemen, indien men de hoogste en laagste standen der snijdende vlakken wilde bepalen, of ook indien men eenigen twijfel moest wegnemen of de kegel al dan niet den bol doorboorde.

§ 254. WERKSTUK *De gemeene doorsnede te construeren van een bol, met een scheeven kegel van willekeurig grondvlak.*

Om de gemeene doorsnede te construeren van den in Fig. 168

voorgestelden bol, die (M', M'') tot middelpunt heeft, met den scheeven kegel, wiens grondvlak AQCP in het horizontale vlak ligt en waarvan (T', T'') de top is, zullen wij snijdende platte vlakken gebruiken, die door den top des kegels gaan en loodrecht op het horizontale vlak staan. Eene willekeurige lijn $T'V$, uit T' zoodanig getrokken, dat zij zoowel de horizontale projectie van den bol als de rigtlijn AQCP snijdt, is dan de horizontale doorgang van zulk een snijdend vlak, dat door de lijn (T', tT'') gaat. Dit vlak snijdt den bol volgens een cirkel, die de koorde mn tot horizontale projectie heeft, en den kegel volgens twee beschrijvende lijnen, waarvan $T'P$ en $T'Q$ de horizontale projectiën zijn; die cirkel en die beschrijvende lijnen zullen zich op het verticale vlak in hunne ware gedaante en grootte projecteren, nadat wij het snijdende vlak, door eene wenteling om de lijn (T', tT'') evenwijdig met het verticale vlak hebben laten worden.

Hiertoe nemen wij vooreerst, op de as van projectie, $tP_1 = T'P$ en $tQ_1 = T'Q$, waarna wij $T''P_1$ en $T''Q_1$ trekken; na nn in m middendoorgedeeld te hebben, nemen wij verder op eene lijn, door M'' loodrecht op tT'' getrokken, $h''m_1 = T'm$, en beschrijven uit m_1 met $mn = \frac{1}{2}nn$ eenen cirkel, dan stellen deze cirkel, benevens de lijnen $T''P_1$ en $T''Q_1$ de doorsneden van het snijdende vlak met den bol en met den kegel, in hare ware gedaante en grootte voor. De vier snijpunten p , q , r en s van den beschreven cirkel met de lijnen $T''P_1$ en $T''Q_1$ wijzen dus aan, waar de in het snijdende vlak liggende punten der begeerde gemeene doorsnede zich op het verticale vlak, na de genoemde wenteling van het snijdende vlak, projecteren.

Brengen wij nu het snijdende vlak weder in zijn oorspronkelijken stand, dan veranderen noch de hoogten der genoemde punten boven het horizontale vlak, noch hunne afstanden tot de lijn (T', tT'') , welke afstanden gelijk zijn aan de loodlijnen uit p , q , r en s op tT'' neergelaten. Wij maken derhalve $T'p' = d''p$, $T'q' = e''q$, $T'r' = f''r$, $T's' = g''s$; en bepalen de punten p'' , q'' , r'' en s'' , waar lijnen, uit p' , q' , r' en s' loodrecht door de as van projectie getrokken, respectievelijk de lijnen $d''p$, $e''q$, $f''r$ en $g''s$ ontmoeten; dan zijn hierdoor de projectiën van de vier in het snijdende vlak liggende punten (p', p'') , (q', q'') , (r', r'') en (s', s'') der gevraagde gemeene doorsnede gevonden. Die doorsnede wordt alzoo in haar geheel verkregen, door de hier aangewezen constructie,

voor een genoegzaam aantal uit T' getrokken lijnen $T'V$, te herhalen, en de gevondene punten behoorlijk te verbinden.

Opdat de lijnen $T'V$ tot de constructie bruikbaar zijn, is het niet voldoende, dat zij zoowel de horizontale projectie van den bol als de rigtlijn AQCP snijden; maar hare snijding met de projectie van den bol moet ook eene koorde mn opleveren, die groot genoeg is om te maken dat de cirkel, uit m_1 met mn beschreven, de lijnen $T''P_1$ of $T''Q_1$ ten minste een van beide snijdt of ten uiterste raakt. Indien de kegel den bol doorboort, zullen blijkbaar alle lijnen uit T' tusschen $T'A$ en $T'C$ getrokken aan deze voorwaarde voldoen; heeft er geene doorboring plaats, dan wordt de voldoende stand der lijnen $T'V$ het gemakkelijkst door beproeving gevonden.

Dewijl in onze figuur de gegevens zóó genomen zijn, dat men uit T' aan de horizontale projectie van den bol eene raaklijn kan trekken, die de rigtlijn AQCP in twee punten snijdt, kan ook door den top des kegels een verticaal rakend vlak aan den bol gebragt worden, dat den kegel volgens twee beschrijvende lijnen snijdt. Daar die beschrijvende lijnen alzoo den bol niet snijden, heeft er geene doorboring plaats. In onze figuur zullen wij dus, mede wegens de gedaante, die wij aan de rigtlijn AQCP gaven, eene enkele zamenhangende kromme lijn tot doorsnede van bol en kegel verkrijgen. Het kunnen trekken der laatstgenoemde raaklijn is echter geen vereischte tot het niet bestaan van doorboring. Begeerde men hieromtrent een onderscheidend kenmerk, dan zou men den horizontalen doorgang moeten construeren van den kegel, die uit (T', T'') als top den bol omhulde (*); naargelang die doorgang de rigtlijn AQCP omgeeft, of in twee punten snijdt, wordt de bol door den kegel doorboord of volgens eene enkele zamenhangende kromme lijn gesneden. Heeft de rigtlijn AQCP zulk eene gedaante, dat zij door den genoemden doorgang des omhullingskegels in vier punten gesneden wordt, dan snijdt de kegel den bol in drie stukken, waarvan er een binnen den kegel valt, terwijl de beide andere, als bolvormige segmenten met gebogene grondvlakken, zich aan weerszijden buiten den kegel bevinden; en de

(*) Die doorgang wordt blijkbaar gevonden door uit den top, volgens § 160, raaklijnen aan den bol te trekken, en de ontmoetingspunten van die raaklijnen met het horizontale vlak te bepalen.

gemeene doorsnede bestaat dan, even als in het geval der doorboring, uit twee afzonderlijk staande geslotene kromme lijnen.

Voorts kunnen de beschrijvende lijnen, die aan den gegeven kegel en den gezegden ombullingskegel gemeen zijn, dienen om de uiterste standen, die men aan de lijnen T'V geven kan, te bepalen.

Ten slotte merken wij op, dat het verklaarde werkstuk eigenlijk neerkomt op het bepalen van de punten, in welke het oppervlak des bols door de beschrijvende lijnen van den kegel gesneden wordt; en dat wij hier slechts, tot het construeren dier snijpunten, aan de projecterende vlakken der snijdende lijnen eene andere beweging gegeven hebben, dan in het werkstuk van § 152.

§ 255. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede van een bol met een willekeurigen scheeven cilinder te construeren.*

Ook hier zou men slechts de snijpunten, van de beschrijvende lijnen des cilinders met het oppervlak van den bol, behoeven te construeren en verbinden. Deze constructie, hoe eenvoudig voor het begrip ook, zou echter in de uitvoering zeer omslagtig worden, en wij zullen dus eene andere voordragen, die tevens zeer geschikt is om te doen inzien, welk nuttig gebruik men somtijds van eene reeds in de figuur aanwezige kromme lijn maken kan.

Zij (M' , M'') het middelpunt van den bol, en ABCD de rigtlijn van den cilinder, die in Fig. 169 voorgesteld zijn. Snijden wij dan beide door een vlak ($V_{,,}V_{,,}$) evenwijdig met het horizontale projectievlak genomen, zoo is de doorsnede van dit vlak met den bol een cirkel, die (M' , m'') tot middelpunt heeft, wiens straal gelijk aan $m''n$ is, en wiens horizontale projectie fgh dus onmiddellijk uit M' met $m''n$ kan beschreven worden. De doorsnede van het vlak ($V_{,,}V_{,,}$) met den cilinder, is eene kromme lijn, die rs tot verticale projectie heeft, gelijk en gelijkvormig met de rigtlijn ABCD is (zie § 206), en waarvan de horizontale projectie almede gelijk en gelijkvormig met ABCD zal zijn. Indien men nu deze horizontale projectie construeerde, zou zij door hare snijding met den reeds beschreven cirkel fgh , punten van de gemeene doorsnede van bol en cilinder aanwijzen; maar hiertoe zou men dan de kromme lijn ABCD ter behoortliker plaats andermaal moeten afteekenen; dit kan echter ontweken worden. Verbeeldt men zich namelijk dat het snijdende vlak ($V_{,,}V_{,,}$) evenwijdig met zich zelf naar het horizontale vlak verschoven wordt, zoodat

al de punten van het vlak $(V_{II}V_{III})$ zich evenwijdig met de rigting van de beschrijvende lijnen des cilinders bewegen, dan zal zijne doorsnede met den cilinder juist de rigtlijn ABCD gaan bedekken; maar bij deze beweging van het vlak $(V_{II}V_{III})$, volgt het punt (M', m'') almede eene lijn, die evenwijdig met de cilinderlijnen is; indien men dus slechts het ontmoetingspunt m van deze lijn met het horizontale vlak bepaalt, en uit dat punt m met $m''n$ eenen cirkel beschrijft, zal die cirkel de doorsnede van het vlak $(V_{II}V_{III})$ met den bol zijn, nadat dit vlak door bovengenoemde beweging op het horizontale vlak is gekomen. In dat verplaatste vlak $(V_{II}V_{III})$ zijn derhalve de snijpunten u en v , van den laatstgenoemden cirkel met de rigtlijn ABCD, punten der begeerde doorsnede. Wordt verder dit verplaatste vlak in zijn vorigen stand teruggebragt, dan volgen de punten u en v wederom lijnen, die evenwijdig met de cilinderlijnen loopen; wij behoeven dus slechts uit u en v lijnen evenwijdig met Aa' te trekken, om, door hare ontmoeting met den cirkel fgh , eerst de horizontale projectiën u' en v' , en daarna ook de verticale projectiën u'' en v'' te bekomen, van de op hun eigenlijke plaats teruggebragte punten u en v .

Alzoo zijn dan (u', u'') en (v', v'') punten van de gevraagde doorsnede, waarvan men, door het bezigen van meerdere snijdende vlakken zooals $(V_{II}V_{III})$ zoovele punten kan construeren als men goedvindt. Op deze wijze hebben wij voor de horizontale projectie der doorsnede, de twee in onze figuur afgeteekende en op zich zelf staande geslotene kromme lijnen verkregen, waaruit blijkt dat de cilinder den bol doorboort.

Wat deze horizontale projectiën betreft is de ingang geheel onzichtbaar, omdat hij op de onderste helft van het oppervlak des bols, en ten deele op den onderkant des cilinders ligt; de uitgang daarentegen ligt op de bovenste helft van den bol en is dus ten deele zichtbaar, en wel voor zoover hij zich op den bovenkant des cilinders bevindt. De punten van afscheiding i verkrijgt men, indien het snijdende vlak $(V_{II}V_{III})$ zóó genomen wordt, dat de cirkel uit m beschreven de rigtlijn juist in A of C snijdt. Den hiertoe vereischten stand der snijdende vlakken, gelijk mede den hoogsten en laagsten stand dier vlakken, vindt men weder het gemakkelijkst door beproeving; hoezeer in onze figuur de snijdende vlakken zeker boven P en beneden Q moeten vallen, zijn P en Q geenszins de grenspunten, die hun hoogsten en laagsten stand bepalen.

Brengt men het snijdende vlak door het middelpunt des bols, en verschuift men het daarna op de bovengenoemde wijze, tot dat het op het horizontale vlak komt, zoo zal het middelpunt in M komen, en een cirkel uit M met den straal des bols beschreven, stelt dan de doorsnede van het snijdende vlak met den bol voor; daar laatstgenoemde cirkel de rigtlijn in onze figuur niet snijden maar geheel omgeven zal, zijn wij zeker dat de cilinder den bol doorboort; het vallen der rigtlijn binnen den alzo uit M beschreven cirkel, is echter geen vereischte opdat de doorboring plaats hebbe. Het eigenlijke kenmerk voor het al of niet plaats hebben der doorboring, zou afgeleid moeten worden uit eenen om den bol beschreven omhullingscilinder, wiens beschrijvende lijnen evenwijdig met die van den gegeven cilinder loopen.

Daar een snijdend vlak, door het punt (M', M'') gebragt, geene punten van de doorsnede leert vinden, is het verder duidelijk, dat er, zoowel beneden als boven het punt (M', M'') , een hoogste en een laagste stand voor de snijdende vlakken is. De snijdende vlakken die tusschen de grenzen beneden (M', M'') genomen worden leeren dan den ingang, die welke tusschen de grenzen boven (M', M'') genomen worden leeren den uitgang vinden.

§ 256. WERKSTUK. *De gemeene doorsnede te construeren van twee omwentelingsvlakken, wier assen elkander snijden.*

Volgens hetgeen wij aan het slot van § 247 gezegd hebben, zullen wij hier gebruik maken van snijdende bolvormige oppervlakken, die het snijpunt der omwentelings-assen tot middelpunt hebben en dus de gegeven omwentelingsvlakken volgens cirkels snijden (*Meetk.* § 408). En ten einde die cirkels de eenvoudigst mogelijke projectiën zouden verkrijgen, zullen wij de projectievlakken zoodanig aannemen, dat het horizontale vlak loodrecht op een der beide omwentelings-assen, en het verticale vlak evenwijdig met beide die assen is.

Laten dan $A''B''C''$ en $D''E''F''$ (Fig 170) de verticale projectiën zijn van de hoofdmeridianen der gegeven omwentelingsvlakken, wier assen (M', mM'') en $(N'M', N''M'')$ elkander in het punt (M', M'') snijden, zoo behoort een cirkelboog $G''H''G''H''$, uit M'' met eenen straal naar welgevallen beschreven, tot de verticale projectie van een bol, die (M', M'') tot middelpunt heeft. Deze cirkelboog wijst, door zijne snijding met de projectiën der hoofdmeridianen, onmiddellijk de koorden $G''G''$ en $H''H''$

aan, als de werkelijke lengten der middellijnen en tevens als de verticale projectiën der cirkels, volgens welke onze omwentelingsvlakken door het oppervlak van genoemden bol gesneden worden; het snijpunt i'' dezer koorden is dus de verticale projectie van een punt, dat zoowel op elk onzer omwentelingsvlakken als op het snijdend bolvormig oppervlak ligt, en dat alzoo tot de begeerde gemeene doorsnede behoort. Dit punt ligt op den omtrek van den parallelcirkel $G''G''$, wiens horizontale projectie, die terstond uit M' met $\frac{1}{2}G''G''$ als straal kan beschreven worden, door hare snijding met eene lijn uit i'' regthoekig door de as van projectie getrokken, de punten i' als horizontale projectiën van het genoemde punt aanwijst. Door deze eenvoudige constructie vinden wij dus twee punten (i' , i'') der begeerde gemeene doorsnede, waarvan wij op dezelfde wijze zoovele punten kunnen bepalen als wij verkiezen. De aaneenschakeling dier punten levert dan de kromme lijnen $P'k'i'Q'ik'P'$ als horizontale, en $P''k''i''Q''$ als verticale projectie van de gemeene doorsnede onzer omwentelingsvlakken op. Deze doorsnede bestaat dus uit twee deelen, wier verticale projectiën elkander bedekken. Hare grenspunten (P' , P'') en (Q' , Q'') zijn niet anders dan de snijpunten der hoofdmeridianen.

Het omwentelingsvlak, waarvan (M' , mM'') de as is, heeft in onze figuur een grootsten parallelcirkel; het sluit een omwentelingsligchaam in, welks horizontale projectie een cirkel is, uit M' met $M'B' = \frac{1}{2}B''B''$ beschreven; en een bolvormig oppervlak, uit (M' , M'') als middelpunt door dien grootsten parallelcirkel gebragt, snijdt het andere omwentelingsvlak zoodanig, dat de koorden $B''B''$ en $E''E''$ een gemeenschappelijk punt k'' verkrijgen. Hieruit volgt dat de geconstrueerde doorsnede eene geslotene kromme lijn is, die ten deele boven en ten deele beneden den grootsten parallelcirkel ligt; het onderste deel is in de horizontale projectie onzichtbaar, terwijl het bovenste zichtbaar is, omdat het door het andere omwentelingsvlak, wegens de gedaante die wij daaraan in onze figuur gaven, niet overdekt wordt. Eene lijn, uit k'' regthoekig door de as van projectie getrokken, wijst dan, door hare snijding met de horizontale projectie van den grootsten parallelcirkel, de punten k' als punten van afscheiding tusschen het zichtbare en onzichtbare deel aan.

§ 257. Indien van twee elkander snijdende omwentelingsvlakken de assen evenwijdig zijn, en men dan weder een horizontaal vlak

loodregt op, - en een verticaal vlak evenwijdig met die assen aanneemt, zal men de gemeene doorsnede, door het bezigen van platte, en wel van horizontale snijdende vlakken, evenzoo kunnen construeren als wij dit voor een bijzonder geval in § 253 hebben aangewezen.

Indien echter de omwentelings-assen elkander in de ruimte kruissen, kan men wel weder een horizontaal vlak loodregt op een der assen, en een verticaal vlak evenwijdig met beide aannemen, maar nu is er geen stelsel van snijdende vlakken te vinden dat de beide omwentelingsvlakken volgens cirkels zou snijden. In dit geval kan men van snijdende horizontale vlakken gebruik maken; deze snijden dan slechts het eene omwentelingsvlak volgens cirkels, en het andere volgens kromme lijnen, die men door eene aaneenschakeling van punten zou behooren te construeren, zoodat elk paar punten der begeerde gemeene doorsnede, de constructie van zulk eene kromme lijn zou vorderen. Hierdoor zou echter, zooals wij in § 247 opmerkten, het construeren van de gemeene doorsnede der omwentelingsvlakken, hoezeer mogelijk, te langwijdig worden, om het als uitvoerbaar te kunnen beschouwen.

DE ONTWIKKELING DER OPPERVLAGKEN.

§ 258. Reeds in § 224 hebben wij verklaard, welke gebogen vlakken ontwikkelbaar zijn; dat is, welke gebogen vlakken, nadat zoo noodig hun zamenhang volgens eene of andere lijn verbroken is (zie § 134), plat gebogen kunnen worden. Thans zullen wij kortelijk iets aanvoeren over de wijze, waarop die ontwikkeling kan volbragt worden; dat is, over het construeren der vlakke figuur, waarin het gebogen vlak, met de daarop aanwezige kromme lijnen, door platbuiging overgaat.

Vooraf merken wij op, dat die ontwikkeling, ook in de eenvoudigste gevallen, slechts bij benadering kan plaats hebben. Zoo is b. v. het ontwikkeld oppervlak van een regten cirkelvormigen cilinder een regthoek, waarvan de basis gelijk aan den omtrek van het grondvlak des cilinders is; maar eene regte lijn, die gelijk aan den omtrek eens cirkels is, kan slechts bij benadering gevonden worden.

§ 259. WERKSTUK. *Het oppervlak van een willekeurigen kegel te ontwikkelen.*

Zij TUV de perspectievische afbeelding van eenen willekeurigen kegel (Fig. 171), op wiens oppervlak eene kromme lijn AE naar welgevallen is aangenomen. Om dan tot de ontwikkeling van dit oppervlak, met de daarop aanwezige kromme lijn AE, te geraken, snijde men het kegelvlak volgens eene kromme lijn MR, door eenen bol, uit den top T met een willekeurigen straal beschreven, en trekke vervolgens een aantal beschrijvende lijnen, die de kromme lijnen AE en MR respectievelijk in A, B, C, D, E en in M, N, P, Q, R snijden.

Bij de ontwikkeling van het kegelvlak, blijven nu de punten M, N, P, Q en R op denzelfden afstand van het punt T, zoodat de kromme lijn MNPQR in een cirkelboog overgaat. Beschrijft men dus, in een plat vlak, uit eenig punt t (Fig. 172), met den straal des gebezigten bols, eenen cirkelboog; neemt men op dien boog achtereenvolgens deelen mn , np , pq en qr , die respectievelijk even lang zijn als de deelen MN, NP, PQ en QR der kromme lijn MNPQR; en trekt men vervolgens, uit t , rechte lijnen door de punten m , n , p , q en r , zoo stellen deze lijnen de in Fig. 171 getrokken beschrijvende lijnen voor, in den stand, dien zij na de ontwikkeling des oppervlaks verkregen hebben. En neemt men vervolgens op deze lijnen stukken ta , tb , tc , td en te , die respectievelijk even lang zijn als TA, TB, TC, TD en TE, dan zal blijkbaar eene kromme lijn, door de punten a , b , c , d en e getrokken, evenzoo de kromme lijn ABCDE van Fig. 171, in het ontwikkelde oppervlak voorstellen; mits men slechts een genoegzaam aantal beschrijvende lijnen des kegels gebezigd hebbe, ten einde te maken dat de punten a , b , c , d en e dicht genoeg bij elkander kwamen, om de kromme $abcde$ met genoegzame naauwkeurigheid te kunnen trekken. Het bezigen van een genoegzaam aantal beschrijvende lijnen, zal tevens ten gevolge hebben, dat men den afstand van m tot n gelijk aan dien van M tot N, den afstand van n tot p gelijk aan dien van N tot P, en zoo vervolgens, nemen kan.

Indien dus de kegel TUV, en de op zijn oppervlak aanwezige kromme ABCDE, door hunne projectiën gegeven zijn, zal men, door toepassing van vroeger verklaarde werkstukken, slechts de

zoo even aangewezen constructiën werkelijk moeten verrigten, ten einde de verlangde ontwikkeling te bekomen.

De uitvoering dier constructiën kan, in bijzondere gevallen, vrij eenvoudig worden, zooals uit het volgende werkstuk zal blijken.

§ 260. WERKSTUK. *Het ronde oppervlak van een schuin afgeknotten gewonen cirkelvormigen kegel te ontwikkelen.*

Laat den in Fig. 173 voorgestelden gewonen kegel schuin afgeknot zijn, door een vlak ($S, SS_{,,}$), loodrecht op het verticale projectievlak genomen; en laat het oppervlak van dien kegel, ter ontwikkeling, doorsneden zijn volgens eene schuine zijde ($T'A', T''A''$), die evenwijdig met het verticale vlak loopt, en waarvan dus de verticale projectie $T''A''$ tevens de werkelijke lengte voorstelt. Indien wij dan in een plat vlak, uit eenig punt T (Fig. 174), met eenen straal die gelijk aan $T''A''$ is, eenen cirkelboog beschrijven, en dien boog AA_1 zoo lang maken als de omtrek van het cirkelvormige grondvlak, verkrijgen wij den cirkelsector ATA_1 , die het ontwikkelde oppervlak des geheelen kegels is, en waarin dan T zijn top verbeeldt.

Om aan den boog AA_1 de vereischte lengte te geven, is het voldoende den omtrek des grondvlak op dien boog, door middel van een groot aantal kleine koorden, over te brengen, of ook kan men, met behulp van eenen transporteur, $\text{hoek } ATA_1 = \frac{T'A'}{T''A''} \times 360^\circ$

maken. (Zie *Meetk.* § 421, *Opm.*).

Verdeelen wij nu in Fig. 173 den omtrek des grondvlak, en in Fig. 174 den boog AA_1 , in eenzelfde aantal, b. v. in 12, gelijke deelen, en vereenigen wij de deelpunten met den top, dan verkrijgen wij in het ontwikkelde oppervlak de beschrijvende lijnen TA, TB, TC, TD , enz., die in Fig. 173 naar de deelpunten A', B', C', D' , enz. van den omtrek des grondvlak loopten.

De snijpunten dezer beschrijvende lijnen, met het vlak ($S, SS_{,,}$), kunnen in Fig. 173 onmiddellijk aangewezen worden; zoo is b. v. (a', a'') het snijpunt op ($T'A', T''A''$) en (c', c'') het snijpunt op ($T'C', T''C''$). Wat de beschrijvende lijnen betreft, die evenwijdig met het verticale vlak loopen, stellen tevens $T''a''$ en $T''g''$ de werkelijke lengten voor van de deelen, die zich tusschen den top en het vlak ($S, SS_{,,}$) bevinden; wat de overige beschrijvende lijnen betreft, kan de werkelijke lengte dier deelen op eene een-

voudige wijze gevonden worden. Trekken wij namelijk uit c'' , evenwijdig met de as van projectie, eene lijn $c''c$, die $T''A''$ in c ontmoet, dan is $T''c$ de werkelijke lengte van ($T'c$, $T''c''$); want wordt de driehoek ($T'C'$, $T''D''C''$) om de as des kegels gewenteld, tot dat $T'C'$ langs $T'A'$ komt, zoo zal ook $T''C''$ langs $T''A''$ en dus c'' in c komen, en in den nieuwen stand, dien de schuine zijde ($T'C'$, $T''C''$) dan verkregen heeft, projecteert zij zich op het verticale vlak in hare ware grootte. Door dus, uit de snijpunten van $SS_{,,}$ met de verticale projectiën der beschrijvende lijnen, lijnen evenwijdig met de as van projectie te trekken, vinden wij de werkelijke lengten $T''b$, $T''c$, $T''d$, $T''e$ en $T''f$ van de deelen der beschrijvende lijnen, tusschen den top en het vlak ($S, SS_{,,}$) begrepen.

Brengen wij nu al deze werkelijke lengten, in Fig. 174, van het punt T af, op de overeenkomstige lijnen TA, TB, TC, TD, enz. over, dan verkrijgen wij aldaar de punten a , b , c , d , enz., door welke wij de kromme lijn aga_1 kunnen trekken, die in het ontwikkelde oppervlak des kegels, de doorsnede van dat oppervlak met het vlak ($S, SS_{,,}$) voorstelt.

De vlakke figuur, door den cirkelboog AGA_1 , de kromme lijn aga_1 , en de rechte lijnen Aa en A_1a_1 ingesloten, is dus het ontwikkelde ronde oppervlak van den schuin afgeknotten kegel. Wordt die vlakke figuur dus behoorlijk rondgebogen, zoodat de lijnen Aa en A_1a_1 zich tot eene enkele rechte lijn vereenigen, dan zal de kromme lijn aga_1 in den omtrek van het ellipsvormig bovenvlak des afgeknotten kegels overgaan, terwijl de cirkelboog AGA_1 in den omtrek van het cirkelvormig grondvlak overgaat.

§ 261. WERKSTUK. *Het oppervlak van een willekeurigen cilinder te ontwikkelen*

Zij UV de perspectievische afbeelding van een willekeurigen cilinder, met eene op zijn oppervlak getrokken kromme lijn AE (Fig. 175). Laat dan dezen cilinder door een plat vlak, loodregt op zijne beschrijvende lijnen genomen, volgens de kromme lijn MR gesneden worden, en laten op zijn oppervlak eenige beschrijvende lijnen getrokken zijn, die de kromme lijnen AE en MR respectievelijk in A, B, C, D en E, en in M, N, P, Q en R snijden; dan zullen deze beschrijvende lijnen allen loodregt op de kromme lijn MNPQR staan.

Bij de ontwikkeling van het oppervlak, blijven de beschrijvende

lijnen evenwijdig met elkander en loodregt op de kromme lijn MNPQR; derhalve gaat die kromme lijn in eene regte over. Trekt men dus, in eenig plat vlak, eene regte lijn; neemt men op die lijn achtereenvolgens deelen mn , np , pq en qr (Fig. 176), die zoo lang zijn als de deelen MN, NP, PQ en QR der kromme lijn MNPQR; trekt men, door de punten m , n , p , q en r , lijnen regthoekig op mr ; neemt men op die lijnen, aan de behoorlijke zijde van mr , stukken ma , nb , pc , qd en re , die respectievelijk even groot zijn als MA, NB, PC, QD en RE; en trekt men eindelijk door de alsdan verkregen punten a , b , c , d en e eene kromme lijn, dan heeft men in Fig. 176 het ontwikkeld oppervlak van den cilinder verkregen, waarin nu $abcde$ en $mnpqr$, de kromme lijnen ABCDE en MNPQR van Fig. 175 voorstellen.

Zijn dus de cilinder UV, en de daarop aanwezige kromme lijn AE, door hunne projectiën gegeven, dan zal men de aangewezen constructiën, waarentrent overigens soortgelijke opmerkingen als in § 259 gelden, slechts werkelijk moeten uitvoeren, ten einde de verlangde ontwikkeling te bekomen.

In bijzondere gevallen kan de uitvoering dier constructiën, zooals in het volgende werkstuk blijken zal, weder zeer eenvoudig worden.

§ 262. WERKSTUK. *Het ronde oppervlak van een afgeknotten gewonen cirkelvormigen cilinder te ontwikkelen.*

Laat den gewonen cilinder, in Fig. 177 voorgesteld, afgeknott zijn door het vlak (S, SS_{II}) , loodregt op het verticale projectievlak genomen; dan wijst de verticale doorgang SS_{II} , voor elke beschrijvende lijn, die men uit een willekeurig punt P' van den omtrek des grondvlak kan trekken, terstond de werkelijke lengte $P''p''$ aan, van het deel dier beschrijvende lijn, dat zich tusschen het grond- en bovenvlak van den afgeknotten cilinder bevindt.

Verdeelen wij dus den omtrek des grondvlak in een zeker aantal, b. v. 12, gelijke deelen $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, enz.; trekken wij in eenig plat vlak eene regte lijn AA_1 (Fig. 178), die zoolang als die omtrek is, en verdeelen wij ook deze lijn in evenveel gelijke deelen AB, BC, CD, enz.; rigten wij uit de deelpunten loodlijnen Aa , Bb , Cc , enz. op, en maken wij deze loodlijnen gelijk aan de in Fig. 177 zichtbare werkelijke lengten $A''a''$, $B''b''$, $C''c''$, enz.; dan verkrijgen wij de punten a , b , c , d , enz., door welke wij de kromme lijn aga_1 kunnen trekken, die met de regte lijnen AA_1 , Aa en A_1a_1 het ontwikkelde ronde oppervlak van den afgeknotten

cilinder insluit. Wordt dus de verkregene vlakke figuur (Fig. 178) weder rond gebogen, zoodat de lijnen Aa en A_1a_1 zich vereenigen, en de regte lijn AA_1 de omtrek van het grondvlak van den cilinder wordt, dan zal de geconstrueerde kromme lijn ag''_1 in den omtrek van het ellipsvormig bovenvlak overgaan.

Wil men, tot meerdere naauwkeurigheid, tusschenpunten van de kromme lijn aga_1 bepalen, dan behoeft men blijkbaar, na in Fig. 177 het willekeurige punt P' aangenomen en de daartoe behoorende lijn $P''p''$ getrokken te hebben, slechts in Fig. 178 CP gelijk aan de lengte van den boog $C'P'$ en de loodlijn Pp gelijk aan $P''p''$ te nemen, om zulk een tusschenpunt p te bekomen.

§ 263. WERKSTUK. *Een algemeen ontwikkelbaar oppervlak te ontwikkelen.*

Laat $(A'F', A''F'')$ de keerlijn van het te ontwikkelen oppervlak zijn (Fig. 179), en zij $U'V'$ de horizontale projectie van eene op dat oppervlak gegevene kromme lijn. Nemen wij dan in de keerlijn een genoegzaam aantal punten (B', B'') , (C', C'') enz. aan, om de deelen $(A'B', A''B'')$, $(B'C', B''C'')$, enz. als regte lijntjes, of als elementen der kromme, te mogen beschouwen, en verlengen wij deze elementen, zoo zijn die verlengden $(A'P', A''P'')$, $(B'Q', B''Q'')$, enz. raaklijnen aan de keerlijn, en alzoo beschrijvende lijnen van het oppervlak. Door dus uit de punten P', Q' , enz., waar de horizontale projectiën van die beschrijvende lijnen de horizontale projectie $U'V'$ ontmoeten, lijnen regthoekig door de as te trekken, die de verticale projectiën dierzelfde beschrijvende lijnen in P'', Q'' , enz. snijden, vinden wij vooreerst de verticale projectie $P''Q''R''S''T''$ der op het oppervlak gegevene kromme lijn.

Indien de deelen $(A'B', A''B'')$, $(B'C', B''C'')$, enz. der keerlijn, klein genoeg genomen zijn, om als regte lijntjes beschouwd te mogen worden, verkeerren de deelen $(P'Q', P''Q'')$, $(Q'R', Q''R'')$, enz. der op het oppervlak gegevene kromme lijn, in hetzelfde geval. Hierdoor verkrijgen wij dan eene aaneenschakeling van driehoeken $(B'P'Q', B''P''Q'')$, $(C'Q'R', C''Q''R'')$, $(D'R'S', D''R''S'')$, $(E'S'T', E''S''T'')$, die zich allen op het te ontwikkelen oppervlak bevinden.

Na dus volgens § 69 de werkelijke lengten van de zijden van al die driehoeken geconstrueerd te hebben, kunnen wij daaruit niet alleen deze driehoeken in hunne ware gedaante zamenstellen, maar hen ook, in eenig plat vlak, met dezelfde punten en lijnen aan

elkander laten sluiten, als waarmede zij dit in de ruimte deden. Laten nu, in Fig. 180, BPQ, CQR, DRS en EST deze alzoo zamengestelde en aan elkander sluitende driehoeken zijn, dan is deze figuur blijkbaar het begeerde ontwikkelde oppervlak, waarin ABCDEF de keerlijn, en PQRST de op het oppervlak gegevene kromme voorstelt.

Men gevoelt dat deze constructie, die weder niets anders dan eene benaderingsconstructie is, naauwkeuriger uitkomsten zal opleveren, naargelang men in de kromme lijnen een grooter aantal punten neemt, en zoodoende de gebrokene lijnen, die men in plaats van de krommen bezigt, minder van de kromme lijnen zelve laat afwijken.

§ 264. De ontwikkeling van eenig oppervlak kan omgekeerd dienen, om op dat oppervlak kromme lijnen te beschrijven, die aan zekere voorwaarden voldoen. Zoo hebben wij b. v. in § 192 eigenlijk het ontwikkeld oppervlak des gewonen cilinders gebezigd, om de projectiën der gewone schroeflijn te vinden.

Laat, om een ander voorbeeld te nemen, in het ontwikkeld oppervlak van Fig. 180 eene regte lijn *pqrst* getrokken worden, en bepalen wij waar de punten *p*, *q*, *r*, *s* en *t* hunne projectiën in Fig. 179 zullen verkrijgen (te welken einde wij slechts B'P' en B''P'' door de punten *p'* en *p''* in dezelfde reden hebben te verdeelen waarin BP door *p* verdeeld is, evenzoo C'Q' en C''Q'' door *q'* en *q''* in dezelfde reden als CQ door *q*, en zoo vervolgens), dan verkrijgen wij de projectiën eener kromme lijn (*p'q'r's't'*, *p''q''r''s''t''*), die over het oppervlak de kortste weg is om van (*p'*, *p''*) naar (*t'*, *t''*) te komen.

Immers is het klaar, dat zoodanige kortste weg over eenig ontwikkelbaar oppervlak, na de ontwikkeling, niet anders dan eene regte lijn kan wezen.

OVER DE RAKENDE VLAKKEN

AAN DE GEBOGENE OPPERVLAKKEN.

§ 265. Even als men een oneindig klein gedeelte of element van eene kromme lijn, als een regt lijntje mag aanmerken, door welks verlenging eene raaklijn aan de kromme lijn ontstaat (zie § 181),

kan ook een oneindig klein gedeelte of *element* van een gebogen vlak, als een plat vlakje worden beschouwd, dat door zijne verlenging een rakend vlak aan het gebogene oplevert. Door een *rakend vlak* verstaat men alzoo het platte vlak, dat ontstaat, wanneer een element van een gebogen vlak naar alle zijden onbepaaldelijk verlengd wordt. Het rakende vlak heeft dus met het gebogene een element gemeen.

De elementen, die de rakende vlakken met de gebogene gemeen hebben, zijn zeer onderscheiden, naargelang de gebogene vlakken al of niet ontwikkelbaar zijn.

Daar namelijk de ontwikkelbare oppervlakken beschreven worden door regte lijnen, die zich zoodanig bewegen, dat elke twee op elkander volgende standen der beschrijvende lijn zich in een en hetzelfde platte vlak bevinden (zie § 224), zal men het gedeelte des oppervlaks, door twee oneindig dicht bij elkander gelegene beschrijvende lijnen ingesloten, als plat mogen aanmerken. Dit oneindig kleine gedeelte of element van het gebogen vlak, heeft dus in de rigting der beschrijvende lijn eene onbepaalde lengte, terwijl het slechts eene oneindig kleine breedte heeft. Hieruit volgt, *dat deze gebogene vlakken, met name de kegelvlakken, de cilindervlakken en de algemeene ontwikkelbare oppervlakken, door een rakend vlak volgens eene beschrijvende lijn geraakt worden; en deze lijn van aanraking is dan diegene, langs welke de twee oneindig dicht bij elkander liggende beschrijvende lijnen des elements, kunnen geacht worden zamen te vallen. Elk punt dezer lijn van aanraking, kan dan als een raakpunt van hetzelfde rakende vlak met het gebogene beschouwd worden.*

Van de niet ontwikkelbare oppervlakken daarentegen, kan in het algemeen geen gedeelte als plat worden aangemerkt, tenzij het in alle rigtingen oneindig klein zij; want bij de scheeve oppervlakken, hoezeer door regte lijnen beschreven, liggen geene twee opvolgende beschrijvende lijnen in een en hetzelfde platte vlak; en de overige onontwikkelbare oppervlakken kunnen zelfs niet door regte lijnen beschreven worden. Het element, dat al deze oppervlakken met een rakend vlak gemeen hebben, heeft dus, algemeen genomen, in geenerlei rigting eene eindige uitgebreidheid; en hieruit volgt *dat de niet ontwikkelbare oppervlakken door hunne rakende vlakken in het algemeen slechts in een enkel punt geraakt worden; en dit punt van aanraking, of raakpunt, is dan datgene, waarin het gemeenschap-*

pelijke element, wegens zijne oneindige kleinheid, kan geacht worden over te gaan.

De niet ontwikkelbare oppervlakken kunnen echter somtijds, met enkele bijzondere rakende vlakken, elementen gemeen hebben, die niet in alle rigtingen oneindig klein zijn, en uit dien hoofde kunnen geacht worden, in rechte of kromme lijnen over te gaan, die dan de lijnen van aanraking zijn. Zoo zal de wig van WALLIS, in Fig. 158 voorgesteld, de beschrijvende lijnen, door de punten C en D des grondvlakks gaande, tot lijnen van aanraking hebben met de platte vlakken, die men door deze punten en het scherp van de wig brengen kan. Zoo zal de cirkelvormige ring, in Fig. 153 voorgesteld, door horizontale vlakken langs $D''D''$ en $E''E''$ aangebragt, geraakt worden volgens cirkels, die $F'F'$ tot horizontale projectie hebben. Bij deze bijzondere rakende vlakken, kan elk punt der rechte of kromme lijn van aanraking, als *raakpunt* aangemerkt worden.

De loodlijn, die uit het raakpunt op het rakende vlak wordt opgerigt, noemt men *eene normaal* van het gebogen vlak; elk plat vlak door deze normaal gebragt, noemt men een *normaalvlak*, en de doorsnede, van zulk een normaalvlak met het gebogene, noemt men *eene normaalsnede*.

§ 266. Brengt men door het raakpunt een plat vlak, dat het gebogene volgens eene kromme lijn snijdt, dan wordt de raaklijn, die men uit het raakpunt aan deze kromme lijn kan trekken, ook *eene raaklijn aan het gebogen vlak* genoemd. Deze raaklijn nu zal altijd in het rakende vlak gelegen zijn; want, omdat de kromme lijn op het gebogen vlak ligt, zal, ter plaatse van het raakpunt, ook een element der kromme lijn op het element liggen, dat het gebogen vlak met het rakende vlak gemeen heeft; het verlengde element der kromme lijn ligt dus ook in het verlengde element van het gebogen vlak; dat is: de raaklijn ligt in het rakende vlak.

Daar nu de stand van een plat vlak, door twee in dat vlak liggende rechte lijnen, volkomen bepaald wordt, wordt ook het rakende vlak, dat door eenig punt van een gebogen vlak gebragt kan worden, bepaald door de beide raaklijnen, die men uit dat punt trekken kan aan de beide kromme lijnen, volgens welke twee willekeurige platte vlakken, door dat punt gebragt, het gebogen vlak snijden. Dat is, in korte woorden: *het rakende vlak wordt door de raaklijnen aan twee kromlijnige doorsneden bepaald*.

Bij de regelrechte oppervlakken, heeft men echter slechts ééne kromlijnige doorsnede noodig, omdat de regte beschrijvende lijn, die door het raakpunt gaat, altijd in het rakende vlak ligt. Immers bij de ontwikkelbare oppervlakken kan, volgens de voorgaande §, de kromme lijn van aanraking geene andere zijn, dan eene door het raakpunt getrokken beschrijvende lijn; en bij de scheeve oppervlakken bevat, ter plaatse van het raakpunt, het element des gebogen vlaks een oneindig klein deel van de beschrijvende lijn, weshalve die beschrijvende lijn geheel in het rakende vlak zal liggen. Bij de scheeve oppervlakken is echter de beschrijvende lijn, die door het raakpunt getrokken wordt, geene lijn van aanraking; zij is eene lijn, die aan het gebogene en aan het rakende vlak als doorsnede gemeen is.

Hozeer niet zelden een rakend vlak slechts een enkel punt met het gebogen vlak gemeen heeft, gebeurt het toch ook zeer dikwijls, dat de gebogene vlakken door hunne rakende vlakken tevens volgens kromme of regte lijnen gesneden worden. Een rakend vlak b. v., door het punt (B' , B'') van den ring van Fig. 153 gebragt, heeft niet anders dan dit enkele punt (B' , B'') met het oppervlak gemeen; maar een vlak dat dienzelfden ring in het punt (A' , A'') raakt, zal het oppervlak tevens snijden, volgens twee door het punt (A' , A'') gaande geslotene kromme lijnen. Zoo ook zal elk plat vlak, dat de wig van Fig. 158 in eenig punt van de beschrijvende lijn (MN' , $M''N''$), en dus niet volgens deze beschrijvende lijn, raakt, het oppervlak volgens de lijn (MN' , $M''N''$) snijden.

De snijding van gebogene vlakken, door hunne rakende vlakken, kan zelfs in bijzondere gevallen volgens de lijn van aanraking plaats hebben. Heeft b. v. de vlakke rigtlijn van een kegelvlak een buigpunt, dan zal een rakend vlak, door dit buigpunt gebragt, het kegelvlak, volgens de door dit punt gaande beschrijvende lijn, gelijktijdig raken en snijden.

§ 267. Wanneer door een gegeven punt van een gegeven oppervlak een rakend vlak gebragt moet worden, verkrijgt dit rakende vlak een bepaalden stand. Is er echter geen raakpunt gegeven, dan kan men het rakende vlak nog aan andere voorwaarden laten voldoen.

Daar namelijk de stand van een plat vlak, hetzij door eene regte lijn en een punt, hetzij door drie punten, bepaald wordt, zal men

het rakende vlak, naargelang het gegeven oppervlak al of niet ontwikkelbaar is, door één of twee buiten het oppervlak gegevene punten kunnen laten gaan. In plaats echter van het rakende vlak door zulk een gegeven punt te laten gaan, zal men het evenwijdig met eene gegevene rechte lijn kunnen laten worden, of het ook nog een ander gegeven onontwikkelbaar oppervlak kunnen laten raken. Neemt men hierbij in aanmerking: dat het brengen van een vlak door twee punten, overeenkomt met het brengen van een vlak door eene rechte lijn; en dat het brengen van een vlak evenwijdig met twee rechte lijnen, overeenkomt met het brengen van een vlak evenwijdig aan een ander vlak; dan ziet men gemakkelijk in, welke verscheidenheid van werkstukken men zich zoo al, bij het construeren van rakende vlakken, kan voorstellen.

§ 268. *Twee gebogen vlakken raken elkander, wanneer zij, in een gemeenschappelijk punt, door een en hetzelfde platte vlak geraakt worden; dit punt is dan hun raakpunt.* Gebogen vlakken kunnen eene reeks van zulke raakpunten gemeen hebben, en zij raken elkander dan volgens eene lijn, die zich op elk hunner bevindt. Deze *lijn van aanraking* kan zoowel regt, als van enkele of dubbele kromming zijn. Is zij regt of van enkele kromming, dan is zij tevens de lijn van aanraking, volgens welke de beide gebogen vlakken gelijktijdig door een en hetzelfde platte vlak geraakt worden.

Bij de onderlinge raking der gebogene vlakken, behoort ook die van de omhullings-kegels en cilinders, waarvan wij reeds in § 204 en § 211 spraken; en bij welke de aanrakingslijn meestal van dubbele kromming is.

Wij achten het onnoodig over dit een en ander breedvoeriger uit te weiden, en zullen dus thans de voornaamste der in de voorgaande § aangeduide werkstukken gaan behandelen, waarbij somtijds het gebruik der omhullings-kegels of cilinders kan te pas komen.

§ 269. *WERKSTUK. Aan een gegeven kegel- of cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat door een gegeven punt van het gebogen vlak gaat.*

● Laat op het kegelvlak in Fig. 181, en op het cilindervlak in Fig. 182 voorgesteld, (M' , M'') het gegeven punt zijn, waarvan de horizontale projectie naar welgevallen is aangenomen, terwijl daarna de verticale volgens § 203 en § 210 bepaald is; dan ken-

nen wij reeds dadelijk de beschrijvende lijn, die door het gegeven punt (M' , M'') gaat; namelijk ($T'P'$, $T''P''$) in Fig. 181 en ($P'p'$, $P''p''$) in Fig. 182. Deze beschrijvende lijn is nu, blijkens § 265, de lijn, volgens welke het gebogen vlak door het begeerde vlak geraakt moet worden; en het punt P' van de rigtlijn, dat tevens een punt van deze lijn van aanraking is, kan derhalve ook als raakpunt aangemerkt worden. Maar de rigtlijn is de kromlijnige doorsnede van het gebogen vlak met het horizontale; trekken wij dus in het horizontale vlak, door het punt P' eene raaklijn aan de rigtlijn, dan ligt deze raaklijn RR , volgens § 266 in het begeerde rakende vlak. Die raaklijn is derhalve de horizontale doorgang van dat vlak, waarvan de verticale doorgang $RR_{,,}$ dadelijk volgens § 85 kan geconstrueerd worden, omdat men een punt (M' , M'') van het vlak kent. Alzoo is ($R, RR_{,,}$) het gevraagde vlak, dat het gebogen vlak volgens eene door (M' , M'') gaande beschrijvende lijn raakt.

In Fig. 181 kan men, ter constructie van den verticalen doorgang $RR_{,,}$, zich ook van den top (T' , T'') des kegelvlak, als een bekend punt van het rakende vlak, bedienen.

Indien het kegel- of cilindervlak gegeven was, door middel eener rigtlijn in de ruimte, zou het ter oplossing van ons werkstuk niet noodig zijn eene nieuwe in het horizontale vlak liggende rigtlijn te construeren. Is b. v. (M' , M'') het gegeven punt, waardoor men een rakend vlak aan het in Fig. 143 voorgestelde kegelvlak wil brengen, dan zal men door het snijpunt (p' , p'') van de beschrijvende lijn ($T'M'$, $T''M''$) met de rigtlijn ($a'b'$, $a''b''$) eene raaklijn aan die rigtlijn kunnen trekken; en een vlak, door deze raaklijn en de beschrijvende lijn gebragt, zal dan het begeerde rakende vlak zijn.

§ 270. WERKSTUK. *Aan een gegeven kegel- of cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat door een gegeven punt buiten het gebogen vlak gaat.*

Laat in Fig. 181 en in Fig. 182, (N' , N'') het gegeven punt zijn, dat buiten het aldaar voorgestelde kegel- of cilindervlak naar welgevallen is aangenomen. Daar nu elk vlak dat het kegelvlak raakt door den top gaat, terwijl elk vlak dat het cilindervlak raakt evenwijdig met de beschrijvende lijnen is, zal in Fig. 181 eene lijn ($T'Q'$, $T''Q''$) door het gegeven punt (N' , N'') en den top, — en in Fig. 182 eene lijn ($Q'q'$, $Q''q''$) door het gegeven

punt (N' , N'') evenwijdig met de beschrijvende lijnen getrokken, in het begeerde rakende vlak liggen, waarvan de horizontale doorgang derhalve door het punt Q' moet gaan, waar het horizontale vlak door de lijn ($T'Q'$, $T''Q''$) of ($Q'q'$, $Q''q''$) ontmoet wordt. Trekken wij dus, na dit punt Q' geconstrueerd te hebben, door dat punt eene lijn, die de rigtlijn van het gebogen vlak ergens in P' raakt, zoo is deze raaklijn RR_1 de horizontale doorgang van het begeerde vlak; waarvan de verticale doorgang RR_2 weder volgens § 85 kan geconstrueerd worden, door op te merken dat in dit vlak elk punt (M' , M'') zal liggen, dat men in de beschrijvende lijn, die tot het raakpunt P' behoort, naar welgevallen kan aannemen.

Mogt de rigtlijn zóó gegeven zijn, dat men er, uit het geconstrueerde punt Q' , geene raaklijn aan kon trekken, dan zou door het gegeven punt (N' , N'') ook geen rakend vlak aan het kegel- of cilindervlak kunnen gebragt worden. Kan men uit het punt Q' twee of meer raaklijnen aan de rigtlijn trekken, dan verkrijgt men ook even zooveel rakende vlakken, die allen door het gegeven punt (N' , N'') gaan.

Mogt in Fig. 181 het punt (N' , N'') op gelijke hoogte als de top (T' , T'') boven het horizontale vlak liggen, dan zou de lijn, door die twee punten getrokken, het horizontale vlak niet in eenig punt Q' ontmoeten; maar in dat geval zou eene raaklijn, evenwijdig met de horizontale projectie $T'N'$ aan de rigtlijn getrokken, de horizontale doorgang van het begeerde rakende vlak zijn.

§ 271. WERKSTUK. *Aan een gegeven kegel- of cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat evenwijdig is met eene gegebene lijn.*

Laat ($E'F'$, $E''F''$), zoo in Fig. 181 als in Fig. 182, de gegebene lijn zijn, waarmede het rakende vlak, aan de aldaar voorgestelde kegel- en cilindervlakken te brengen, evenwijdig moet loopen.

Wat dan het kegelvlak van Fig. 181 betreft, is het klaar, dat eene lijn, uit den top evenwijdig met de gegebene lijn getrokken, in het begeerde rakende vlak moet liggen. De constructie van dit vlak (R, RR_2) is dus, ten aanzien van het kegelvlak, even als in het voorgaande werkstuk; met dit onderscheid, dat de lijn ($T'Q'$, $T''Q''$) nu uit den top (T' , T'') evenwijdig met de gegebene lijn ($E'F'$, $E''F''$), in plaats van door een gegeven punt (N' , N'') getrokken wordt.

Wat het cilindervlak van Fig. 182 betreft, merken wij op dat elk rakend vlak, omdat het evenwijdig met de beschrijvende lijnen is, ook evenwijdig zal zijn met de lijn $(G'H', G''H'')$, die wij, door een willekeurig punt (G', G'') van de lijn $(E'F', E''F'')$, evenwijdig met de beschrijvende lijnen kunnen trekken. Het begeerde rakende vlak, dat bovendien evenwijdig met $(E'F', E''F'')$ moet zijn, zal dus ook evenwijdig wezen met het vlak, dat wij door de beide lijnen $(E'F', E''F'')$ en $(G'H', G''H'')$ kunnen brengen. Door de ontmoetingspunten V , van deze lijnen met het horizontale vlak te bepalen, vinden wij dus den horizontalen doorgang V,V , van een vlak, waarmede het gevraagde vlak evenwijdig moet zijn. Trekken wij dus evenwijdig met V,V , eene lijn, die de rigtlijn in eenig punt P' raakt, dan is deze raaklijn RR , de horizontale doorgang van het begeerde rakende vlak, waarvan de verticale doorgang weder even als in de voorgaande werkstukken gevonden wordt. Die verticale doorgang kan echter ook evenwijdig getrokken worden, met den gemakkelijk te construeren verticalen doorgang van het vlak, door $(E'F', E''F'')$ en $(G'H', G''H'')$ gebracht.

Kunnen er twee of meer raaklijnen evenwijdig met V,V , aan de rigtlijn getrokken worden, dan zal men even zooveel rakende vlakken bekomen, die aan de vraag voldoen.

§ 272. Daar wij voor elk der drie voorgaande werkstukken geene afzonderlijke figuren wilden bezigen, hebben wij duidelijkheidshalve de gegevens zóó aangenomen, dat wij telkens hetzelfde vlak $(R,RR,,)$ tot uitkomst verkregen. Dit was echter onnoodig, en wij raden den lezer in het algemeen aan, om bij ieder werkstuk de lijnen der figuur, die tot andere werkstukken betrekking mogten hebben, weg te denken.

Als eene aanvulling op de drie voorgaande werkstukken, merken wij voorts op, dat er niet hegeerd kan worden, *aan een kegel- of cilindervlak een rakend vlak te brengen, dat door eene gegevene lijn gaat*. Door het werkstuk van § 270, kan men slechts door een punt der gegevene lijn zulk een rakend vlak brengen; en dan zou het toevalligerwijze kunnen gebeuren, dat het geconstrueerde vlak door de gegevene lijn ging; waartoe dan de doorgangen van dat vlak, door de ontmoetingspunten van de lijn met de projectievlakken, zouden moeten gaan.

§ 273. WERKSTUK. *Aan twee kegelvlakken met gemeenschappelijken*

top, of aan twee cilindervlakken met evenwijdige beschrijvende lijnen, een gemeenschappelijk rakend vlak te brengen.

Men trekke eene gemeenschappelijke raaklijn aan de beide in het horizontale vlak liggende rigtlijnen, dan zullen de beschrijvende lijnen, die tot de beide raakpunten behooren, in een en hetzelfde vlak liggen; want op de kegelvlakken gaan zij door den gemeenschappelijken top, en op de cilindervlakken loopen zij evenwijdig. Een vlak, door deze twee beschrijvende lijnen gebragt, heeft dan de getrokken raaklijn tot horizontalen doorgang, en raakt alzoo de beide kegel- en cilindervlakken volgens die beschrijvende lijnen.

Laten de rigtlijnen het trekken eener gemeenschappelijke raaklijn niet toe, dan kunnen de beide gebogene vlakken ook geen gemeenschappelijk rakend vlak hebben. Kan men aan de rigtlijnen meer gemeenschappelijke raaklijnen trekken, dan vindt men ook evenveel gemeenschappelijke rakende vlakken.

§ 274. Er kan niet begeerd worden, *aan twee willekeurige kegel- of cilindervlakken een gemeenschappelijk rakend vlak te brengen.* Want de horizontale doorgang van zulk een vlak, zou niet anders dan eene gemeenschappelijke raaklijn aan de beide rigtlijnen kunnen wezen; doch, na het trekken van die gemeenschappelijke raaklijn, zou het eene toevalligheid zijn, dat de beschrijvende lijnen, die tot de raakpunten behooren, in een en hetzelfde vlak lagen. In dat geval zou dit vlak de beide gebogene vlakken raken, maar anders bestaat er zulk een gemeenschappelijk rakend vlak niet.

§ 275. WERKSTUK. *Door een gegeven punt van een omwentelingsvlak, een rakend vlak aan dat gebogen vlak te brengen.*

Brengt men door het gegeven punt twee platte vlakken, waarvan het eene loodregt op de omwentelings-as staat, terwijl het andere door die as gaat, zoo zijn de kromlijnige doorsneden, van deze vlakken met het omwentelingsvlak, een parallelcirkel en een meridiaan. Trekt men dus, uit het gegeven punt, raaklijnen aan beide, dan liggen deze lijnen in het begeerde rakende vlak, waarvan diensvolgens de doorgangen gemakkelijk gevonden worden.

Laat alzoo (M' , mM'') de omwentelings-as en ($M'B'$, $A''B''C''$) de hoofdmeridiaan van het omwentelingsvlak zijn (Fig. 183). Zij voorts (P' , P'') het gegeven punt, waarvan, nadat de horizontale projectie P' willekeurig was aangenomen, de verticale P'' volgens § 218 bepaald is; dan kunnen wij hierdoor reeds den uit M' met $M'P'$ beschreven cirkel als de horizontale, — en de lijn $p''p''$ als

de verticale projectie van den door het punt (P', P'') gaanden parallelcirkel; indien wij dus $P'Q'$ rakende aan den cirkel $M'P'$, en $P''Q''$ evenwijdig met de as van projectie trekken, is $(P'Q', P''Q'')$, als raaklijn aan dien parallelcirkel in (P', P'') , eene lijn die in het te vinden vlak ligt. Daar deze lijn evenwijdig met het horizontale vlak loopt, en het verticale in Q'' ontmoet, weten wij dus reeds terstond, dat de horizontale doorgang van het te vinden vlak evenwijdig met $P'Q'$ is, en dat de verticale doorgang door Q'' gaat.

Eene lijn D_1D_2 , door M' en P' getrokken, is de horizontale doorgang van het meridiaanvlak, dat door (P', P'') gaat; wentelen wij dit meridiaanvlak om de as (M', mM'') , tot dat de doorgang D_1D_2 , in den stand d_1d_2 , komende, evenwijdig met de as van projectie wordt, dan zal het meridiaanvlak evenwijdig met het verticale vlak worden, zoodat de meridiaan van het punt (P', P'') langs den hoofdmeridiaan zal vallen, terwijl het punt (P', P'') zelf in (p', p'') zal komen. Trekken wij dus $p'r'$ evenwijdig met de as van projectie, en $p''r''$ rakende aan de verticale projectie van den hoofdmeridiaan, zoo is $(p'r', p''r'')$ de lijn, die den verplaatsten meridiaan in (p', p'') raakt, en het horizontale vlak in r' ontmoet. Nemen wij vervolgens op D_1D_2 een stuk $M'R' = M'r'$, dan zal R' de plaats zijn waar het ontmoetingspunt r' zal komen, als het verplaatste meridiaanvlak weder in zijn vorigen stand gebragt wordt, en dus het punt (p', p'') weder in (P', P'') komt. De raaklijn uit het punt (P', P'') aan den meridiaan van dat punt getrokken, ontmoet dus het horizontale vlak in R' , en daar deze raaklijn in het te vinden vlak ligt, is dus R' een punt van zijn horizontalen doorgang. Daar nu de evenwijdigheid van dien doorgang met $P'Q'$ reeds gebleken is, trekken wij door het verkregene punt R' eerst R_1R_2 evenwijdig met $P'Q'$, en daarna RR_2 , door het reeds gevondene punt Q'' , dan zal (R_1RR_2) het vlak zijn, waardoor het omwentelingsvlak in (P', P'') geraakt wordt.

Het punt (M', S'') , waarin de as (M', mM'') door de getrokken raaklijn $(p'r', p''r'')$ gesneden wordt, zal, bij de wenteling van het meridiaanvlak, niet van plaats veranderen. De door P'' gaande verticale projectie van de lijn, die den meridiaan in (P', P'') raakt, gaat dus zoowel door S'' , als door het voetpunt R'' der loodlijn die men uit R' op de as van projectie kan neerlaten.

§ 276. Daar de raaklijn aan den parallelcirkel loodregt op het

meridiaanvlak van het raakpunt staat, en het rakende vlak door deze raaklijn gaat, blijkt uit het voorgaande werkstuk nog onmiddellijk, *dat elk rakend vlak aan eenig omwentelingsvlak loodregt staat op het meridiaanvlak van het raakpunt.*

§ 277. WERKSTUK. *Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, dat loodregt op een gegeven meridiaanvlak is, en bovendien door een gegeven punt buiten het omwentelingsvlak gaat.*

Naardien de doorgangen van het begeerde vlak door het voorgaande werkstuk gevonden worden, zoodra slechts het raakpunt bekend is, behoeven wij alleen aan te wijzen, hoe hier het raakpunt gevonden wordt.

Zij (M' , mM'') de as van het in Fig 184 voorgestelde omwentelingsvlak, D,D , de horizontale doorgang van het gegeven meridiaanvlak, en (T' , T'') het gegeven punt. Projecteren wij dan dit punt op dit meridiaanvlak, dat is, construeren wij volgens § 108 de loodlijn ($T'v'$, $T''v''$), die uit het punt (T' , T'') op het meridiaanvlak valt, zoo zal deze loodlijn (*Meetk.* § 322, 3^o) in het begeerde rakende vlak liggen, en haar voetpunt (v' , v'') zal in de doorsnede van dat rakende vlak met het meridiaanvlak liggen. Maar volgens § 266 is deze doorsnede eene raaklijn aan den in dit meridiaanvlak liggenden meridiaan en raakt zij dien meridiaan in het te vinden raakpunt; dit te vinden raakpunt is alzoo geen ander, dan het raakpunt dat men verkrijgt, door uit het punt (v' , v'') eene raaklijn aan den door D,D , bepaalden meridiaan te trekken.

Tot het trekken van deze raaklijn, laten wij het meridiaanvlak, met het daarin liggende punt (v' , v''), door eene wenteling om de as (M' , mM''), evenwijdig met het verticale vlak worden, zoodat de doorgang D,D , evenwijdig met de as van projectie wordt en in den stand d,d , komt. Door $M't = M'v'$ te nemen, en uit t eene lijn regthoekig door de as van projectie te trekken, vinden wij dan punt t'' als de verticale projectie van de projectie van het punt (T' , T'') op het verplaatste meridiaanvlak. Dewijl dan t'' de verticale projectie van het verplaatste punt (v' , v'') is, en de in het verplaatste vlak liggende meridiaan niet anders dan de hoofdmeridiaan is, behoeven wij volgens § 182 slechts uit t'' eene lijn te trekken, die de verticale projectie van den hoofdmeridiaan ergens in p'' raakt, om dadelijk, niet alleen de verticale projectie $t''p''$ der bedoelde raaklijn in het verplaatste meridiaanvlak, maar

ook de beide projectiën p'' en p' van haar raakpunt met den meridiaan te vinden. Door middel van den tot het punt ' p' , p'' ' behoorenden parallelcirkel, wiens horizontale projectie den doorgang D,D , in P' snijdt, vinden wij dan verder, dat het raakpunt (p' , p'') in (P' , P'') komt, wanneer het meridiaanvlak weder in den vorigen stand gebragt wordt. Derhalve is dan (P' , P'') het raakpunt van het omwentelingsvlak, met een rakend vlak, dat door het punt (T' , T'') gaat en loodregt op het door D,D , bepaalde meridiaanvlak staat.

Indien de gedaante der meridianen toelaat, dat men uit t'' meerdere raaklijnen aan de verticale projectiën der hoofdmeridianen kan trekken, zullen deze raaklijnen ieder in het bijzonder een rakend vlak doen vinden, dat aan de vraag voldoet. Hoezeer in onze figuur nog zulk eene tweede raaklijn uit t'' zou kunnen getrokken worden, hebben wij de constructie van dit tweede antwoord uit de figuur weggelaten, opdat daarin door de veelheid van lijnen geene onduidelijkheid zou te weeg gebragt worden.

Valt het punt t'' zoodanig, dat het trekken der genoemde raaklijnen onmogelijk wordt, dan laten de gegevens het bestaan van het begeerde rakende vlak niet toe.

§ 278. Wanneer men het zoo even gevondene raakpunt (P' , P'') met het gegeven punt (T' , T'') vereenigt, verkrijgt men eene lijn ($T'P'$, $T''P''$), die in het rakende vlak ligt, en dus almede (zie § 266) het gebogen vlak in (P' , P'') raakt. De constructie der voorgaande § lost dus tevens het werkstuk op: *Om uit een gegeven punt buiten een omwentelingsvlak, eene raaklijn aan dit gebogen vlak te trekken, zoodanig dat het raakpunt op een gegeven meridiaan valt.*

§ 279. WERKSTUK. *Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, dat loodregt op een gegeven meridiaanvlak, en evenwijdig met eene gegevene lijn is.*

Even als in het werkstuk van § 277, behoeven wij slechts het onbekende raakpunt te vinden.

Bezigen wij andermaal het omwentelingsvlak van Fig. 184; zij D,D , wederom de horizontale doorgang van het gegeven meridiaanvlak, en laat ($E'F'$, $E''F''$) de gegevene lijn zijn. Indien wij dan twee willekeurige punten (E' , E'') en (F' , F'') van die lijn evenzoo behandelen als het punt (T' , T'') in § 277, verkrijgen wij de lijn $e'f''$, als de verticale projectie van de projectie der lijn ($E'F'$, $E''F''$)

op het gegevene, en in den stand d, d , overgebragte, meridiaanvlak.

Trekken wij evenwijdig met $e''f''$ eene lijn, die de verticale projectie van den hoofdmeridiaan ergens in p'' raakt en op het omwentelingsvlak een punt (p', p'') aanwijst, dan zal een rakend vlak, door dit punt (p', p'') gebragt, blijkbaar evenwijdig zijn met elke lijn, die $e''f''$ tot verticale projectie heeft, en dus ook met de projectie van $(E'F', E''F'')$ op het verplaatste meridiaanvlak. Wordt dus dit verplaatste meridiaanvlak weder in zijn vorigen stand gebragt, waardoor zijn punt (p', p'') in (P', P'') komt, dan zal een rakend vlak door (P', P'') gebragt evenwijdig zijn met de projectie van $(E'F', E''F'')$ op het door D, D , gaande meridiaanvlak; en daar dit rakende vlak tevens loodrecht op het meridiaanvlak is, zal het dus ook evenwijdig met $(E'F', E''F')$ zelve zijn. Derhalve is dan (P', P'') het te vinden raakpunt.

Alleen om zonder opoffering van duidelijkheid het bezigen eener nieuwe figuur uit te sparen, hebben wij de gegevene lijn $(E'F', E''F'')$, zóó aangenomen, dat wij hier hetzelfde raakpunt als in § 277 tot uitkomst verkregen; dit was echter onnoodig.

Wijders merken wij op, dat dit werkstuk, even als dat van § 277, meer antwoorden toelaat, indien men aan de verticale projectiën der hoofdmeridianen meer raaklijnen evenwijdig met $e''f''$ kan trekken; maar dat hier het trekken van ten minste ééne raaklijn altijd mogelijk is.

§ 280. Wanneer men door het gevondene punt (P', P'') eene lijn $(Q'R', Q''R'')$ evenwijdig met $(E'F', E''F'')$ trekt, ligt deze lijn $(Q'R', Q''R'')$ in het rakende vlak (*Meetk.* § 312, *Gev.* 3^o), weshalve zij het gebogen vlak almede in (P', P'') raakt. De voorgaande constructie lost dus tevens het werkstuk op: *Om aan een omwentelingsvlak eene raaklijn evenwijdig met een gegeven lijn te trekken, zoodanig dat het raakpunt op een gegeven meridiaan ligt.*

§ 281. WERKSTUK. *De kromme lijn te construeren, volgens welke het oppervlak van een omwentelingsligchaam geraakt wordt door een omhullingskegel, wiens top buiten dat ligchaam naar welgevallen gegeven is.*

Elke raaklijn, uit den gegeven top aan het omwentelingsvlak getrokken, is eene beschrijvende lijn van den omhullingskegel, en haar raakpunt is een punt van de begeerde aanrakingskromme (zie § 204). Daar nu in § 278 gebleken is, hoe men op elken

willekeurigen meridiaan een of meer punten kan construeren, waarin het gebogen vlak geraakt wordt door raaklijnen uit den gegeven top getrokken, zal men, door deze constructie voor een genoegzaam aantal meridianen te verrigten, de projectiën van zoo veel raakpunten kunnen bekomen, dat men daardoor de projectiën der begeerde aanrakingskromme met genoegzame naauwkeurigheid kan trekken.

Er blijft ons dus alleen over, sommige bijzondere punten der aanrakingskromme aan te wijzen. Hierbij zullen wij onderstellen dat, zooals in Fig. 185, waar (T', T'') den gegeven top des omhullingskegels voorstelt, het omwentelingsligchaam alleen door een omwentelingsvlak begrensd wordt, dat een grootsten parallelcirkel heeft.

Trekken wij *vooreerst* uit T' raaklijnen aan de horizontale projectie van den grootsten parallelcirkel, dan vinden wij, door de raakpunten a' en b' , dadelijk twee punten (a', a'') en (b', b'') der aanrakingskromme. Immers de raaklijnen $T'a'$ en $T'b'$ kunnen beschouwd worden als de horizontale doorgangen van verticale vlakken, die door (T', T'') gaan en het omwentelingsvlak in (a', a'') en (b', b'') raken; waaruit volgt dat het omwentelingsvlak door lijnen, uit (T', T'') naar de punten (a', a'') en (b', b'') getrokken, in diezelfde punten geraakt wordt. Deze punten wijzen, in de horizontale projectie der aanrakingskromme, de afscheiding tusschen een zichtbaar en een onzichtbaar deel aan. Kon men de raaklijnen $T'a'$ en $T'b'$ niet trekken, omdat het punt T' binnen den cirkel lag, dan zou de aanrakingskromme, wat hare horizontale projectie betreft, of geheel zichtbaar, of geheel onzichtbaar zijn.

Trekken wij *ten tweede* uit T'' raaklijnen aan de verticale projectiën der hoofdmeridianen, dan vinden wij, door de raakpunten c'' en d'' , evenzoo de punten (c', c'') en (d', d'') der aanrakingskromme, die in hare verticale projectie de afscheiding van een zichtbaar en een onzichtbaar deel zijn. En kon men de raaklijnen $T''c''$ en $T''d''$ niet trekken, omdat het punt T'' tusschen de projectiën der hoofdmeridianen lag, dan zou ook weder de aanrakingskromme, wat hare verticale projectie betreft, of geheel zichtbaar, of geheel onzichtbaar zijn.

Brengen wij *ten derde* door het punt (T', T'') een meridiaanvlak, dat wij door omwenteling, even als in § 277, evenwijdig met

het verticale vlak laten worden, waardoor het punt (T' , T'') in (t' , t'') komt; trekken wij in dit verplaatste meridiaanvlak de raaklijnen ($t'r'$, $t''r''$) en ($t's'$, $t''s''$), en brengen wij het daarna in zijn vorigen stand, waardoor de raakpunten (r' , r'') en (s' , s'') in (l' , l'') en (i' , i'') komen, dan zijn blijkbaar (l' , l'') en (i' , i'') de laagste en hoogste punten der aanrakingskromme; en deze wordt dan door de gevondene zes punten (a' , a''), (b' , b''), (c' , c''), (d' , d''), (l' , l'') en (i' , i'') reeds ten ruwste bepaald.

Door, volgens § 278, nog een aantal raakpunten op andere willekeurige meridianen te construeren, verkrijgen wij voorts de begeerde aanrakingskromme ($a'i'd'b'l'c'$, $a''i''d''b''l''c''$) in haar geheel.

In de onderstelling, dat de omhullingskegel slechts van den top af tot aan de aanrakingskromme voortgaat, wordt een gedeelte van den grootsten parallelcirkel en van de hoofdmeridiaan, zooals wij dit in de figuur aangewezen hebben, onzichtbaar.

Bepaalt men de punten, waarin de geconstrueerde raaklijnen het horizontale vlak ontmoeten, dan verkrijgt men hierdoor den horizontalen doorgang, dat is de in het horizontale vlak liggende rigtlijn, van den omhullingskegel.

§ 282. Voor zoover het omwentelingsligchaam een bol mogt zijn, hebben wij reeds in § 160 de aanrakingskromme leeren vinden. In dat geval is de omhullingskegel een rechte cirkelvormige, en dus zijne rigtlijn of doorsnede met het horizontale vlak eene ellips, waarvan de assen zoo in stand als in grootte gemakkelijk te bepalen zijn.

Moet b. v., om den in Fig. 186 voorgestelden bol, uit (T' , T'') als top een omhullingskegel beschreven worden, dan trekken wij uit dien top door het middelpunt (M' , M'') eene lijn ($T'I$, $T''I''$), waarvan wij het ontmoetingspunt I met het horizontale vlak bepalen; het horizontaal-projecterend vlak van deze lijn slaan wij op het horizontale vlak neder, waardoor de punten (T' , T'') en (M' , M'') in T en M komen; na dan verder, uit M met den straal des bols, den cirkel beschreven te hebben, volgens welken het neergeslagen vlak den bol snijdt, trekken wij uit T raaklijnen aan dien cirkel. Het deel AB van de verlengde TM' , dat tusschen deze raaklijnen begrepen is, is dan de groote as der bedoelde ellips, wier middelpunt O dus ook dadelijk bekend wordt. Trekken wij voorts door dit middelpunt de lijn mn , die in m

loodregt op TI staat en TB in n ontmoet; beschrijven wij, uit m met mn als straal een halven cirkel, en trekken wij daarin eene ordinaat Oh loodregt op mn , zoo is deze Oh de grootte van de halve kleine as der ellips. Door dus $OC = OD = Oh$ loodregt op AB te stellen, vinden wij de kleine as CD der begeerde ellips, die alzoo in haar geheel zal kunnen beschreven worden.

Hetgeen wij vroeger over de snijding van den regten cirkelvormigen kegel door een plat vlak aanvoerden (zie § 243), zal tot verklaring dezer constructie voldoende zijn.

§ 283. WERKSTUK. *De kromme lijn te construeren, volgens welke het oppervlak van een omwentelingsligchaam geraakt wordt, door een omhullingscilinder, waarvan de rigting der beschrijvende lijnen naar welgevallen gegeven is.*

Even als in § 281 voor den omhullingskegel slechts eene toepassing van § 278 vereischt werd, zal men voor den omhullingscilinder slechts § 280 op verschillende meridianen behoeven toe te passen, om zooveel punten van de begeerde aanrakingskromme te vinden als men verkiest. Is b. v. ($E'F'$, $E''F''$) de gegevene rigting van de beschrijvende lijnen van den cilinder, die het in Fig. 184 voorgestelde omwentelingsligchaam moet omhullen, dan is het aldaar geconstrueerde punt (P' , P'') een punt van de aanrakingskromme.

Voorts worden hier de punten van afscheiding, tusschen de zichtbare en onzichtbare deelen, gevonden: in het horizontale vlak, door raaklijnen evenwijdig met $E'F'$ aan de horizontale projectie van den grootsten parallelcirkel, — in het verticale vlak, door raaklijnen evenwijdig met $E''F''$ aan de verticale projectiën der hoofdmeridianen te trekken; terwijl in een meridiaanvlak, waarvan de horizontale doorgang evenwijdig met $E'F'$ is, de raaklijnen zullen moeten getrokken worden, die de hoogste en laagste punten bepalen. Dit alles zal, na hetgeen hieromtrent in § 281 met betrekking tot den omhullingskegel gezegd is, wel geene nadere opheldering behoeven; evenmin als dat de rigtlijn of horizontale doorgang van den omhullingscilinder gevonden wordt, door de ontmoetingspunten met het horizontale vlak te bepalen, van de beschrijvende lijnen des cilinders, die tot constructie der aanrakingskromme gediend hebben.

§ 284. Is het omwentelingsligchaam een bol, dan is de omhullingscilinder een rechte cilindervormige, en zijne rigtlijn of zijn

horizontale doorgang is wederom eene ellips, die nog eenigzins gemakkelijker te bepalen is dan voor een omhullingskegel.

Moet b. v. de in Fig. 187 voorgestelde bol omhuld worden door een cilinder, wiens beschrijvende lijnen evenwijdig met $(E'F', E''F'')$ loopen, zoo trekken wij door zijn middelpunt (M', M'') eene lijn $(M'I, M''I'')$ evenwijdig met $(E'F', E''F'')$, en bepalen haar ontmoetingspunt I met het horizontale vlak; het horizontaal-projecterend vlak dezer lijn slaan wij op het horizontale vlak neder, waardoor wij MI als neergeslagene lijn, en den uit M beschreven cirkel als doorsnede van den bol verkrijgen; trekken wij dan aan dien cirkel raaklijnen evenwijdig met MI, zoo bepalen deze raaklijnen, door hare snijpunten met $M'I$, de groote as AB der begeerde ellips, wier middelpunt O nu juist in I valt; terwijl haar kleine as CD gelijk aan de middellijn van den bol is, en dus dadelijk in hare ware lengte kan getrokken worden.

§ 285. WERKSTUK. *Door eene gegevene lijn een vlak te brengen, dat een gegeven omwentelingsvlak raakt.*

Daar de oplossing van dit werkstuk weder alleen op het vinden van het onbekende raakpunt nederkomt, zal men, uit de constructie van MONGE, in § 166 ten aanzien van den bol voorgedragen, gemakkelijk inzien, dat men ten aanzien van elk omwentelingsvlak op eene dergelijke wijze zal kunnen handelen. Neemt men namelijk in de gegevene lijn twee willekeurige punten aan, en beschrijft men uit die punten als toppen volgens § 281 twee kegels, die het omwentelingsvlak omhullen, dan zal het snijpunt der gevondene aanrakingskrommen het te vinden raakpunt zijn. Deze constructie, die evenveel rakende vlakken zal opleveren als er snijpunten van de beide aanrakingskrommen gevonden worden, is echter zeer werkelijk; derhalve zullen wij nog eene andere doen kennen, waarbij wij gebruik zullen maken van de omwentelings-hyperboloïde (zie § 220), die door de gegevene lijn beschreven wordt, indien zij om de as van het omwentelingsvlak wentelt.

Aanvankelijk merken wij op, dat in Fig. 152 eene lijn $M'q'$, evenwijdig met de projectie-as getrokken, het punt q'' als raakpunt van $A''B''$ met de aldaar geconstrueerde hyperbool aanwijst, en dat dus de verticale doorgang van een vlak, dat door de gegevene lijn gaat en loodrecht op het vlak van den hoofdmeridiaan der hyperboloïde staat, de verticale projectie van dien hoofdmeridiaan in een punt q'' van de verticale projectie der gegevene lijn zal raken.

Laat nu in Fig. 188 het gegeven omwentelingsvlak voorgesteld zijn, dat (M' , mM'') tot as heeft, en zij ($A'B'$, $A''B''$) de gegebene lijn; indien men zich dan verbeeldt, dat een meridiaanvlak, door het nog onbekende raakpunt gebragt, om de as wentelt, het nog onbekende rakende vlak en de daarin liggende gegebene lijn ($A'B'$, $A''B''$) met zich voerende, zal deze lijn de omwentelings-hyperboloïde beschrijven, waarvan men volgens § 219 de verticale projectie $R''T''S''$ des hoofdmeridiaans kan construeren. Is nu door deze wenteling het meridiaanvlak evenwijdig met het verticale geworden, dan is het onbekende rakende vlak loodregt op het vlak van den hoofdmeridiaan gekomen, en zal dus, naar hetgeen wij aanvankelijk opmerkten, eenen verticalen doorgang verkregen hebben, die de hyperbool $R''T''S''$ raakt in een punt van de verticale projectie der in haren nieuwen stand gekomene lijn ($A'B'$, $A''B''$). Maar de verticale doorgang van het verplaatste onbekende rakende vlak, moet nu ook de verticale projectie van den hoofdmeridiaan des omwentelingsvlak's raken; trekken wij dus eene gemeenschappelijke raaklijn aan de beide kromme lijnen, dan is deze raaklijn $p'q''$ de verticale doorgang van het verplaatste rakende vlak, dat nu het omwentelingsvlak in (p' , p'') raakt.

Daar het raakpunt q'' een punt van de verticale projectie der verplaatste lijn ($A'B'$, $A''B''$) is, vinden wij door $q''Q''$ evenwijdig met - en $Q''Q'$ loodregt door - de as van projectie te trekken, dat, na eene terugbrenging van het verplaatste meridiaanvlak in zijn vorigen stand, het punt (Q' , Q'') een in dat meridiaanvlak liggend punt der gegebene lijn ($A'B'$, $A''B''$) is. Trekken wij dus $M'Q'$, zoo is dit de horizontale doorgang van het teruggebragte meridiaanvlak, zoodat wij op $M'Q'$ slechts $M'P' = M'p'$ behoeven te nemen, om te vinden dat het reeds verkregene raakpunt (p' , p''), door de terugbrenging in (P' , P'') komt. Het alzoo geconstrueerde punt (P' , P'') is dus het begeerde raakpunt.

Kan men meerdere gemeenschappelijke raaklijnen aan de verticale projectiën der hoofdmeridianen van het gegeven omwentelingsvlak en van de geconstrueerde omwentelings-hyperboloïde trekken, zoo levert elk dezer gemeenschappelijke raaklijnen een antwoord op ons werkstuk.

§ 286. **WERKSTUK.** *Aan een gegeven omwentelingsvlak een rakend vlak te brengen, evenwijdig met een gegeven vlak.*

Beschrijft men volgens § 283 twee verschillende cilinders, die

het omwentelingsvlak omhullen, en wier beschrijvende lijnen evenwijdig met het gegeven vlak loopen, dan zal het snijpunt van de verkregene aanrakingskrommen het raakpunt zijn, van het omwentelingsvlak met het begeerde rakende vlak, dat hierdoor onmiddellijk geconstrueerd kan worden.

De constructie van dit rakende vlak kan echter veel eenvoudiger geschieden. In Fig. 183 namelijk, waar het aldaar voorgestelde omwentelingsvlak door het vlak (R, RR_{II}) in (P', P'') geraakt wordt, is blijkbaar $p''r''m$ de standhoek van dit vlak met het horizontale, en eenig vlak (E, EE_{II}) dat evenwijdig met (R, RR_{II}) is, zal dan een even grooten standhoek met het horizontale vlak maken. Indien dus (E, EE_{II}) het gegeven vlak is, construeren wij eerst zijnen standhoek $f''gf''$ met het horizontale; daarna trekken wij, evenwijdig met $f''g$, eene raaklijn aan de verticale projectie van den hoofdmeridiaan; vervolgens trekken wij uit M' eene lijn, die regthoekig op E, E gerigt is, en op die lijn nemen wij $M'R' = mr''$; eindelijk trekken wij door het gevondene punt R' den doorgang R, R evenwijdig met E, E , en daarna den doorgang RR_{II} evenwijdig met EE_{II} , zoo zal (R, RR_{II}) het gevraagde vlak zijn, waarvan men dan tevens het raakpunt (P', P'') vindt, door $M'P' = M'p'$ te nemen.

§ 287. WERKSTUK. *Een vlak te construeren, dat gelijktijdig eenen gegeven kegel met willekeurige rigtlijn, en eenen gegeven bol raakt.*

Men construeere volgens § 282 den horizontalen doorgang van den omhullingskegel, die uit den top des gegeven kegels om den bol beschreven kan worden. Daarna construeere men volgens § 273 een vlak, dat zoowel dien omhullingskegel als den gegeven kegel raakt; dan zal dat vlak blijkbaar ook den bol raken, en dus het begeerde zijn.

§ 288. WERKSTUK. *Een vlak te construeren, dat gelijktijdig eenen gegeven cilinder met willekeurige rigtlijn, en eenen gegeven bol raakt.*

Hier construeere men volgens § 284 den horizontalen doorgang van den cilinder, die den bol omhult, en wiens beschrijvende lijnen evenwijdig loopen met de beschrijvende lijnen van den gegeven cilinder. Daarna brenge men, volgens § 273, een gemeenschappelijk rakend vlak aan de beide cilinders, dan zal dit het begeerde vlak zijn.

OVER DE PERSPECTIEF.

§ 289. Wij zien de voorwerpen door middel van lichtstralen, die uit al hunne zichtbare punten naar ons oog loopen, en zich dáár als in een enkel punt verzamelen; zoodat wij, van *het oog* sprekende, bepaaldelijk dit punt zullen bedoelen. De lichtstralen zijn, bij het gewone zien, regte lijnen. Wordt dus, tusschen eenig voorwerp en het oog, een doorschijnend plat of gebogen vlak geplaatst, zoodat de regte lijnen, uit al de punten die men in het voorwerp onderscheiden kan naar het oog getrokken, dit platte of gebogene vlak snijden, dan zal de aaneenschakeling van die snijpunten, mits altijd gezien uit het punt waar het oog zich bevond, eene juiste voorstelling van de gedaante van het voorwerp opleveren. Deze voorstelling wordt eene volkomene afbeelding, indien zij in al hare punten gelijke tint, kleur en lichtsterkte heeft, als in het voorwerp zelf.

Hoezeer men zich, tot het vervaardigen van zulke afbeeldingen wel van gebogen vlakken, en zelfs van een stelsel afzonderlijk staande platte of gebogene vlakken, kan bedienen (*), beeldt men de voorwerpen doorgaans op enkele platte vlakken af; en wel, in hunnen bepaalden stand met betrekking tot eenig horizontaal vlak of *grondvlak* (†). Derhalve wordt dan ook het bovengenoemde doorschijnende vlak altijd als een verticaal staand plat vlak beschouwd, dat men gewoonlijk *het glas* of *het tafereel* noemt; terwijl de gemeene doorsnede van glas en grondvlak den naam van *grondlijn*, en de projectie van het oog op het glas den naam van *oogpunt* draagt. Door *eene ooglijn* en door *een oogvlak*, verstaat men eene regte lijn en een plat vlak, die door het oog gaan.

Het snijpunt, van elken naar het oog loopenden lichtstraal met het glas, is *de perspectief van het punt*, waaruit die lichtstraal voortkomt; de aaneenschakeling dier snijpunten, voor de lichtstralen van alle punten, die tot eenige regte of kromme lijn be-

(*) Zoo kan men b. v., tot het vervaardigen van een *panorama*, het oppervlak van een gewonen cilinder bezigen, in wiens verticaal staande as het oog, op eene behoorlijke hoogte boven den grond, geplaatst is; terwijl men tot *tooneeldécoratiën* van een zeker aantal schermen gebruik maakt.

(†) Bij teekeningen van *landschappen*, is dit grondvlak de oppervlakte van den beganen grond.

hooren, is *de perspectief van die rechte of kromme lijn*; het zamenstel van de perspectieven der rechte of kromme lijnen, die men in eenig voorwerp onderscheidt, maakt *de perspectief van het voorwerp* uit; en het construeren dezer perspectieven, op het glas zelf als vlak van teekening, is het zoogenoemde *in perspectief brengen*, dat wij in de volgende §§ zullen behandelen.

De geheel op natuurkundige gronden berustende *luchtperspectief*, die de bepaling van tint, kleur en lichtsterkte der afbeeldingen ten onderwerp heeft, zal dus geen punt van onze beschouwingen uitmaken.

§ 290. Door het gedeelte van eenig voorwerp, dat naar het oog gekeerd is, wordt het overige gedeelte voor het gezigt bedekt; de rechte of kromme lijnen, die het zichtbare en onzichtbare deel van elkander afscheiden, maken *den schijnbaren omtrek* uit. Wanneer eene ooglijn langs den schijnbaren omtrek glijdt, doorloopt zij, naargelang die schijnbare omtrek uit rechte lijnen zamengesteld of kromlijvig is, het oppervlak van eene piramide of van eenen kegel, die het voorwerp omhult. De doorsnede van die piramide of van dien kegel met het glas, is dan de perspectief van den schijnbaren omtrek, en tevens de omtrek van het beeld des voorwerps op het glas.

Om eene perspectievische voorstelling duidelijker te maken, worden niet zelden ook de onzichtbare lijnen in perspectief gebragt; deze worden dan, even als onzichtbare projectiën, door gestipte lijnen aangeduid.

§ 291. Men kan onderstellen dat het voorwerp tusschen het oog en het tafereel, of ook dat het oog tusschen het tafereel en het voorwerp geplaatst is; alsdan zullen de lichtstralen, die uit de punten des voorwerps naar het oog loopen, het tafereel slechts kunnen ontmoeten, nadat zij naar deze of gene zijde verlengd zijn. Deze ontmoetingspunten zullen dan mede eene soort van perspectief opleveren, waarbij het beeld in het eerste geval grooter dan het voorwerp, en in het tweede geval omgekeerd en ten onderste boven geplaatst zal zijn.

Men kan almede onderstellen, dat het oog op een oneindigen afstand van glas en voorwerp geplaatst is; alsdan worden de lichtstralen evenwijdige lijnen, wier ontmoetingspunten met het tafereel al wederom eene soort van perspectief geven. Indien hierbij de lichtstralen loodregt op het tafereel ondersteld worden, is deze

soort van perspectief blijkbaar niet anders dan eene gewone projectie.

§ 292. Hoezeer het klaar is, dat bij de eigenlijke perspectieven, waar volgens § 289 het glas tusschen het oog en het voorwerp staat, de betrekkelijke plaatsing van oog en voorwerp zóó moet genomen worden, dat juist die gedeelten, waarvan men zulks begeert, zich in de te verkrijgen afbeelding het best laten onderscheiden, vallen er, omtrent die betrekkelijke plaatsing, nog eenige bijzonderheden in acht te nemen.

Wat de plaatsing des voorwerps betreft, komt een meer of min verwijderden stand achter het glas in aanmerking. Klaarblijkelijk zal, voor denzelfden stand van het oog, het perspectievische beeld kleiner zijn, naarmate het voorwerp verder achter het glas geplaatst wordt; terwijl de grootte van het beeld door de natuurlijke grootte van het voorwerp minder zal overtroffen worden, naarmate het laatste digter bij het glas gebragt wordt. Men zou dus den afstand van het voorwerp achter het glas, kunnen regelen naar de grootte, die men aan het beeld verkiest te geven; maar dit is blijkbaar overtollig, omdat men het voorwerp, reeds vóór dat het in perspectief gebragt wordt, naar eene willekeurige schaal kan vergrooten of verkleinen.

Wat de plaatsing van het oog betreft, merken wij vooreerst op, dat de natuurlijkste stand, om voorwerpen te beschouwen, is er zich midden tegen over te stellen. Daarom is het verkiesselijk het oog zóó te plaatsen, dat de uitgestrektheid, die men overzien wil, zich nagenoeg even ver uitbreide aan weerszijden van een verticaal vlak, door het oog loodregt op het glas gebragt; ten gevolge hiervan zal dan eene verticale lijn, door het oogpunt getrokken, het glas in twee nagenoeg gelijke deelen verdeelen. Verder komt dan eene hoogere of lagere plaatsing van het oog, en zijn afstand tot het glas, in aanmerking.

§ 293. Uit de bepalingen van § 289 volgt terstond, dat de hoogte van het oogpunt boven de grondlijn, tevens de *hoogte van het oog* boven het grondvlak is. Deze hoogte kan, wanneer het grondvlak een willekeurig horizontaal vlak is, naar welgevallen genomen worden; en men neemt haar dan grooter of kleiner, naargelang men de voorwerpen, als uit een hooger of lager standpunt beschouwd, wil afbeelden.

Wanneer echter het grondvlak, zooals bij teekeningen van land-

schappen, gebouwen, enz., de oppervlakte van den beganen grond is, wordt tot de natuurlijkste afbeelding der voorwerpen vereischt, dat de hoogte van het oog met die van een gewoon mensch, als beschouwer, overeenkomt. Hier moet dan het oogpunt, volgens dezelfde schaal die men tot afmeting der in perspectief te brengen voorwerpen bezigt, op deze hoogte boven de grondlijn geplaatst worden.

Somtijds echter neemt men het oogpunt merkelijk hooger, en onderstelt men dus dat de beschouwer op eene verhevenheid geplaatst is; de perspectievische afbeelding, die men in dit geval verkrijgt, wordt *eene vogelvlugt-perspectief* genoemd.

§ 294. Ten aanzien van den afstand van het oog tot het glas, de *distantie* genoemd, valt het volgende op te merken.

De ondervinding leert, dat de ruimte, die men in het geheel zonder zich te bewegen overzien kan, begrensd wordt door het oppervlak van een gewonen kegel, die eenen tophoek van 90° heeft, en uit het oog als top, om de gezichts-as als as, beschreven is; dat echter de lichtstralen, die ook binnen deze grens een te grooten hoek met de gezichts-as maken, geen zeer duidelijk gezigt geven op het punt van waar zij uitgingen; en dat alzoo binnen een dergelijken kegel, die slechts eenen tophoek van 30° heeft, de ruimte begrepen is, waarvan men in eens een duidelijk overzigt kan nemen. Daar nu, bij een tophoek van 90° , de hoogte des kegels gelijk aan de halve middellijn van zijn grondvlak is, terwijl bij een tophoek van 30° de hoogte nagenoeg gelijk aan het dubbel van die middellijn is, volgt uit het aangevoerde dat men eenig voorwerp, b. v. een gebouw, wel eenigzins overzien kan, indien men zich daarvóór plaatst, op eenen afstand half zoo groot als de grootste afmeting (hetzij dan hoogte of breedte), die het voorwerp vertoont; maar dat men zich op eenen afstand, die het dubbel van deze grootste afmeting is, zal moeten plaatsen, om het geheel als met een enkelen oogopslag duidelijk te kunnen overzien.

Hieruit volgt dan verder, dat bij eene perspectievische teekening, die men in eens duidelijk zal kunnen overzien, ook de distantie ten minste nagenoeg het dubbel moet zijn van de grootste afmeting, hetzij hoogte of breedte, die de teekening zal verkrijgen; en dat zoo men dit duidelijk overzigt aan de bereiking van andere oogmerken mogt willen opofferen, de distantie in allen

gevalle niet kleiner dan de helft van de grootste afmeting der teekening zal mogen zijn.

Opdat voorts perspectievische teekeningen eene juiste voorstelling der in perspectief gebragte voorwerpen vertoonen, moeten zij uit hetzelfde punt gezien worden (zie § 289), waar men bij hare vervaardiging onderstelde dat het oog geplaatst was (*). Daar echter de afstand van duidelijk zien voor een gewoon oog op 2 à 3 palm kan gesteld worden (*Natuurk.* 1865, blz. 346), is het voor een scherp zien nadeelig, dat de beschouwer der teekening haar op een kleineren of op een veel grooteren afstand van zijn oog zou moeten houden. Het is daarom, dat men de distantie voor zeer kleine teekeningen nooit kleiner dan 2 palm, en voor groote teekeningen niet grooter dan nagenoeg het dubbel van hare grootste afmeting neemt.

§ 295. Na de voorgaande verklaringen, zullen wij thans de voornaamste hulpmiddelen tot het in perspectief brengen van voorwerpen aanwijzen. Hoezeer wij daarbij geene andere voorwerpen dan punten, lijnen, of bekende meetkundige figuren zullen bezigen, zal dit voldoende zijn om te doen inzien, hoe men zich bij andere voorwerpen te gedragen heeft. Verder zullen wij den stand van het voorwerp en van het oog met betrekking tot het glas, steeds als willekeurig gegeven beschouwen, daar men altijd zal kunnen onderstellen, dat die stand, in overeenstemming met het vroeger aangevoerde, is bepaald geworden.

§ 296. Aanvankelijk willen wij echter, uit de reeds gegevene bepalingen, eenige eenvoudige gevolgen afleiden, en tevens die bepalingen door eene figuur nader ophelderen.

Laat derhalve GS het glas en GV het horizontale vlak of grondvlak voorstellen (Fig. 189), zoo is hunne gemeene doorsnede GR de grondlijn. Zij verder O het oog, waaruit loodlijnen OO' en OO'' op het verlengde grondvlak en op het glas zijn neergelaten, dan is O'' het oogpunt, OO'' de distantie, en OO' de hoogte van het oog, die gelijk is aan de hoogte van het oogpunt O'' boven de grondlijn GR. Laat eindelijk uit O, naar eenige punten A, B, E en F, die zich aan de andere zijde van het glas bevinden, de ooglijnen OA, OB, OE en OF getrokken zijn, die het glas

(*) Dat de teekening eene vrij goede voorstelling blijft geven, ook dan wanneer zij uit eenig ander punt gezien wordt, kan slechts uit gewoonte verklaard worden.

in de punten a , b , c en f snijden, dan stellen deze snijpunten de perspectieven van de punten A, B, E en F voor.

Alsnu blijkt gemakkelijk het volgende:

1°. *Eene regte lijn, wier verlengde door het oog gaat, heeft een enkel punt tot perspectief.* Immers de ooglijnen, naar de verschillende punten van zulk eene lijn AC getrokken, vallen langs elkander, en snijden het glas in een en hetzelfde punt a , dat alzoo de perspectief van de lijn AC is.

2°. *De perspectief van eene gegevene regte lijn* (mits zij niet in het zoo even genoemde bijzondere geval verkeert) *is wederom eene regte lijn, vallende langs de doorsnede van het glas met het oogvlak, dat door de gegevene lijn gaat.* Want de ooglijnen, naar de verschillende punten van zulk eene lijn AB getrokken, liggen in het door AB gebragte oogvlak, en snijden dus het glas in eenig punt van de lijn ab , volgens welke het glas door dat oogvlak gesneden wordt.

Heeft de lijn eene bepaalde lengte AB, dan zijn de perspectieven van hare uiteinden A en B, ook de uiteinden van hare perspectief ab . De perspectief van eene regte lijn zal dus gevonden zijn, zoodra men twee van hare punten, of wel hare uiteinden, in perspectief gebragt heeft.

3°. *De perspectief van eene verticale lijn is insgelijks verticaal.* Zoo namelijk de lijn AB verticaal stond, zou (Meetk. § 321) zoo-wel het oogvlak OAB als het glas een verticaal vlak zijn; hunne doorsnede zou dus almede eene verticale lijn zijn (Meetk. § 323, *Gev.* 2°), en langs deze doorsnede valt de perspectief ab .

4°. *De perspectief van eene lijn, die evenwijdig met de grondlijn is, is almede evenwijdig met de grondlijn.* Want zoo de lijn AB evenwijdig met de in het glas liggende lijn GR was, zou zij ook evenwijdig met het glas zijn, en het oogvlak OAB zou dan (Meetk. § 312, *Gev.* 2°) het glas snijden volgens eene lijn ab , die evenwijdig met AB liep en dus ook evenwijdig met GR zou wezen.

5°. *Wanneer eene lijn het glas ontmoet, is dit ontmoetingspunt een punt van hare perspectief.* Immers het punt d , waar de lijn Ad het glas ontmoet, is tevens het punt waar het glas gesneden wordt, door eene naar dat punt d getrokken ooglijn.

6°. *De perspectief van eene gegevene kromme lijn kan wel in een bijzonder geval regt zijn, maar zal in het algemeen wederom eene kromme lijn wezen; en deze is dan de doorsnede van het glas, met*

een kegelvlak, dat het oog tot top en de gegevene kromme lijn tot rigtlijn heeft. De regte lijn ab b. v. kan de perspectief eener kromme lijn zijn, maar daartoe wordt gevorderd, dat de ooglijnen, die men naar de verschillende punten der kromme lijn trekken kan, allen in het oogvlak liggen, dat men door ab kan brengen. Eene kromme lijn van dubbele kromming, gelijk mede eene vlakke kromme lijn, die niet in het bijzondere geval verkeert van in eenig oogvlak te liggen, zooals b. v. EF , heeft dus altijd eene kromme lijn ef tot perspectief.

7°. *De perspectief van een punt, dat aan twee regte of kromme lijnen gemeen is, hetzij dan een snijpunt of een raakpunt, is ook een gemeenschappelijk punt van hare perspectieven.* De ooglijn b. v., die naar het snijpunt E van de regte lijn Ad met de kromme lijn EF getrokken wordt, snijdt het glas in een punt e , dat zoowel tot de perspectief ad van de regte lijn Ad , als tot de perspectief ef van de kromme lijn EF behoort.

8°. *Wanneer eene regte en eene kromme lijn, of twee kromme lijnen, elkander raken, zullen in het algemeen ook hare perspectieven elkander raken; en de perspectief van het raakpunt, zal het raakpunt der perspectieven zijn.* Dit volgt onmiddellijk daaruit, dat men de raking, b. v. van de regte lijn AB met de kromme lijn EF in het punt F , kan beschouwen als het gemeen hebben van twee oneindig dicht bij elkander gelegene punten; twee zulke punten in F , hebben dan ook twee zoodanige punten in f , tot perspectieven.

9°. *De perspectief van eene vlakke figuur, wier vlak evenwijdig met het glas is, is gelijkvormig met de figuur zelve.* Dit blijkt uit de bekende eigenschap, dat doorsneden van piramiden of kegels, evenwijdig met hunne grondvlakken genomen, ook met die grondvlakken gelijkvormig zijn. Daar alzoo tot de gelijkvormigheid van eene vlakke figuur en hare perspectief, een bijzondere stand dier vlakke figuur gevorderd wordt, zal deze gelijkvormigheid in het algemeen geen plaats hebben.

§ 297. Wanneer, op twee willekeurig aangenomene projectievlakken, zoowel de doorgangen van het glas, als de projectiën van het oog en van eenige in perspectief te brengen punten gegeven waren, zou men het werkstuk van § 83 kunnen toepassen, om de punten te construeren, in welke het glas, door ooglijnen naar de bedoelde punten getrokken, gesneden werd. Van deze

snijpunten zou men dan echter slechts de projectiën verkregen hebben, zoodat men nog het glas, met die punten er in, zou moeten neerslaan, om deze punten als op het glas zelf getee-kend, dat is, om hen als perspectieven der bedoelde punten te bekomen. Dit neerslaan ontwijkt men, door het glas als ver-ticaal projectievlak aan te nemen; hierdoor toch vindt men de snijpunten der ooglijnen met het glas onmiddellijk op het glas zelf getee-kend, terwijl bovendien de constructie dier snijpunten nu slechts de meer eenvoudige toepassing van het werkstuk van § 68 vordert.

Derhalve neemt men dan ook steeds het glas als het verticale projectievlak aan, waarvóór het oog, en waaráchter de in per-spectief te brengen punten of voorwerpen zich bevinden; terwijl men verder het grondvlak als het horizontale projectievlak aan-neemt, en diensvolgens de grondlijn de as van projectie wordt.

§ 298. Laat alzoo GR de als as van projectie aangenomene grond-lijn zijn (Fig. 190); zij (O' , O'') het oog dat vóór, — en (t' , t'') een in perspectief te brengen punt dat áchter — het als verticaal projectievlak aangenomen glas geplaatst is. Trekken wij dan $O't'$ en $O''t''$, en rigten wij op de as, uit het punt waar zij door $O't'$ gesneden wordt, eene loodlijn op, die $O''t''$ in t ontmoet, dan is t , als snijpunt van de ooglijn ($O't'$, $O''t''$) met het glas, de perspectief van het punt (t' , t'').

Brengt men op deze wijze al de hoekpunten van een veelvlak-kig ligchaam, of van eene regtlijnige figuur, in perspectief, en maakt men daarna gebruik van het in § 296 onder 2° aange-voerde, dan verkrijgt men de perspectief der geheele figuur.

Laat b. v. het zooveen in perspectief gebragte punt (t' , t'') de top zijn van eene driehoekige piramide, wier grondvlak $a'b'c$ op het horizontale vlak, en tot meerdere eenvoudigheid, met een hoekpunt c in de grondlijn ligt, dan is vooreerst dat punt c zijne eigene perspectief (zie § 296, 5°). Trekken wij naar de punten a' en b' , wier verticale projectiën a'' en b'' in de as liggen, de ooglijnen ($O'a'$, $O''a''$) en ($O'b'$, $O''b''$), en bepalen wij de punten waar deze ooglijnen het verticale vlak snijden, dan zijn deze snij-punten a en b de perspectieven van de hoekpunten a' en b' . Door dus de punten a , b en c met elkander en met het punt t te vereenigen, verkrijgen wij de perspectief $tabc$ der driehoekige pi-ramide.

Het punt t' , als voetpunt van de loodlijn, die uit den top der piramide op het grondvlak $a'b'c$ valt, heeft zijne verticale projectie in v'' . Door dus het snijpunt van de ooglijn ($O't'$, $O''v''$) met het verticale vlak te bepalen, vinden wij ook de perspectief v van het genoemde voetpunt. Trekken wij alzoo tv , dan is dit, in de perspectievische voorstelling der piramide, de loodlijn die uit den top op het grondvlak valt.

Is een veelvlakkig ligchaam in stand en gedaante gegeven, op eene andere wijze dan door zijne projectiën op glas en grondvlak, zoo zal men, om het door de boven aangewezen constructie in perspectief te kunnen brengen, vooraf die projectiën moeten bepalen. Deze voorafgaande handeling kost niet zelden meer moeite dan het in perspectief brengen zelf.

§ 299. Uit het voorgaande ziet men, dat het eenvoudige werkstuk van § 83, of liever het nog eenvoudiger werkstuk van § 68, eene natuurlijke en duidelijke leerwijze oplevert, die, strikt genomen, tot het in perspectief brengen van voorwerpen genoegzaam is. Uit Fig. 190, waar wij slechts een zoo eenvoudig voorwerp als eene driehoekige piramide, die nog bovendien een hoekpunt in de grondlijn had, in perspectief bragten, ziet men echter tevens, dat deze leerwijze bijna onmisbaar aanleiding tot verwarring moet geven; niet alleen wegens de menigte constructie-lijnen, maar vooral ook wegens het door elkander vallen van projectiën en perspectieven.

In het werkdadige volgt men dan ook altijd andere leerwijzen, die gemakkelijker en spoediger tot het doel voeren, en die hoofdzakelijk de volgende stelling tot grondslag hebben.

§ 300. *STELLING. Van eene gegebene regte lijn, die niet evenwijdig met het glas is, is de perspectief altijd gerigt naar het punt, waar het glas ontmoet wordt door eene lijn, uit het oog evenwijdig met de gegebene lijn getrokken.*

Laat wederom GS het glas, GV het grondvlak, GR de grondlijn, O het oog, en O'' het oogpunt verbeelden (Fig. 191). Zij voorts AB eene gegebene regte lijn, die niet evenwijdig met het glas is, en die dus, zoo zij verlengd wordt, het glas ergens in a ontmoet; indien dan eene lijn, uit O evenwijdig met AB getrokken, het glas ontmoet in o , liggen de punten a en o , en dus ook de regte lijn ao , in het platte vlak, dat men door de evenwijdige lijnen AB en Oo kan brengen, weshalve de doorsnede

van dit vlak met het glas langs ao valt. Maar dit vlak is het oogvlak dat door AB gaat; derhalve valt dan ook de perspectief van AB langs ao ; die perspectief is dus naar het punt o gerigt.

Elke lijn, die uit O naar eenig punt P van AB getrokken wordt, zal het glas in eenig punt van ao tusschen a en o snijden; dit snijpunt, dat digter bij o zal vallen naargelang het punt P verder achter het glas genomen wordt, zal echter nimmer juist in o kunnen komen, tenzij P een punt van AB is dat oneindig ver achter het glas ligt. Het punt o behoort dus eigenlijk niet tot de perspectief der als eindig beschouwde lijn AB , maar kan als het eindpunt van de perspectief der oneindig ver naar achteren verlengde lijn AB beschouwd worden.

Van eene rechte lijn, die evenwijdig met het glas is, is de perspectief evenwijdig met de lijn zelce. Immers de doorsnede van het glas, met het oogvlak dat door deze lijn gaat, is met haar evenwijdig (Meethk. § 312, Gev. 2°).

§ 301. Wanneer cenige andere lijnen, A_1B_1 , A_2B_2 , enz., die het glas in a_1 , a_2 , enz. ontmoeten, evenwijdig met AB zijn (Fig. 191), zijn zij ook evenwijdig met Oo , weshalve volgens de voorgaande stelling, de perspectieven van al die lijnen mede naar het punt o gerigt zijn. *Van eenige evenwijdige lijnen, die niet evenwijdig met het glas zijn, loopen dus de perspectieven naar een en hetzelfde punt van het glas.* Dit punt, dat men het vergaarpunt dier perspectieven noemt, kan blijkens de voorgaande § beschouwd worden als de gemeenschappelijke perspectief, van de oneindig ver achter het glas liggende punten der evenwijdige lijnen.

Uit de laatste opmerking der voorgaande § blijkt voorts, *dat evenwijdige lijnen, die tevens evenwijdig met het glas zijn, ook evenwijdige perspectieven hebben, zoodat bij deze het vergaarpunt ontbreekt.*

§ 302. Stonden de lijnen AB , A_1B_1 , A_2B_2 , enz. (Fig. 191) loodrecht op het glas, dan zou ook Oo loodrecht op het glas staan, waardoor het punt o in het oogpunt O'' zou komen. *Van alle lijnen, die loodrecht op het glas staan, loopen dus de perspectieven naar het oogpunt als vergaarpunt.*

§ 303. Indien de lijnen AB , A_1B_1 , A_2B_2 , enz. (Fig. 191) evenwijdig met het grondvlak waren, zou ook de lijn Oo evenwijdig met het grondvlak loopen, zoodat dan het punt o zou gelegen zijn in eene lijn HH , door het oogpunt O'' evenwijdig met de

grondlijn, op het glas getrokken. Deze lijn HH bevat alzoo al de vergaarpunten van horizontale evenwijdige lijnen; zij bevat dus ook de perspectieven van de oneindig ver achter het glas liggende punten des grondvlak, en wordt uit dien hoofde *de horizon* genoemd. *De vergaarpunten der perspectieven van horizontale evenwijdige lijnen, liggen dus altijd in den horizon.*

Alle punten van het oogvlak, dat men door HH brengen kan, liggen op gelijke hoogte als het oog boven het grondvlak, en hebben hunne perspectieven in de lijn HH. De perspectief van eenig punt valt dus boven, in, of beneden den horizon, naargelang dat punt hooger, even hoog of minder hoog dan het oog ligt.

§ 304. Door op den horizon, aan weerszijden van het oogpunt O'' , de distantie uit te zetten, dat is (Fig. 191), door $O'D = O''D = QO''$ te nemen, verkrijgt men in den horizon twee punten D, die *de distantiepunten* genoemd worden, en die men van elkander door de benamingen *regter- en linker-distantiepunt* onderscheidt. De lijn OD, die het oog met zulk een distantiepunt vereenigt, is blijkbaar eene horizontale lijn, die het glas onder eenen hoek van 45° ontmoet.

Onderstellen wij dus, dat de lijnen AB, A_1B_1 , A_2B_2 , enz. horizontale evenwijdige lijnen zijn, die het glas ontmoeten onder hoeken van 45° , wier openingen naar de regterzijde gekeerd zijn, dan zal de lijn OD, uit het oog naar het regterdistantiepunt getrokken, evenwijdig met de lijnen AB, A_1B_1 , A_2B_2 , enz. zijn, zoodat nu het punt o in het regterdistantiepunt D zal vallen. *Horizontale evenwijdige lijnen, die het glas onder hoeken van 45° ontmoeten, hebben dus de vergaarpunten harer perspectieven in een der distantiepunten, en wel in het regter- of linker-distantiepunt, naargelang de genoemde hoeken van 45° hunne openingen naar de regter- of linkerzijde gekeerd hebben.*

Zijn de stand van het oog en de distantie, volgens de opmerkingen van § 292 en § 294 bepaald geworden, dan volgt daaruit, dat de distantiepunten aan weerszijden buiten de grenzen der te verkrijgen teekening zullen vallen.

§ 305. Door middel van een der distantiepunten, kan de perspectief van een gegeven punt gevonden worden, zonder dat men de horizontale projectie van het oog behoeft.

Wil men b. v. (Fig. 192) het punt (P' , P''), door middel van

het linkerdistantiepunt D , in perspectief brengen, dan trekke men uit P'' , naar de regterzijde, eene met de grondlijn evenwijdige lijn $P''r$, die gelijk is aan den afstand $P'p''$ van P' tot de grondlijn; daarna vereenige men D met r , en O'' met P'' , dan zal het snijpunt p dezer vereenigingslijnen de perspectief van het punt (P', P'') zijn.

Wanneer men namelijk, na $p''r' = P''r = P'p''$ genomen te hebben, $P'r'$ trekt, waardoor *hoek* $P'r'p'' = 45^\circ$ wordt, zijn $P'r'$ en $P''r$ de projectiën van eene horizontale lijn, die door het punt (P', P'') gaat, en het glas, onder eenen hoek van 45° , in het punt r ontmoet; de perspectief van deze lijn loopt dus uit r (zie § 296, 5°), naar D als vergaarpunt (zie § 304). Voorts is $O''P''$ de perspectief van eene lijn, die in P'' loodregt op het glas staat (zie § 302), en dus almede door het punt (P', P'') gaat. Daar alzoo langs Dr en $O''P''$ de perspectieven vallen van twee lijnen, die beide door het punt (P', P'') gaan, moet het snijpunt p de perspectief van (P', P'') zijn (zie § 296, 7°).

Trekt men $P''r = P'p''$ naar de linkerzijde, dan verkrijgt men een punt r , waaruit men eene lijn naar het regterdistantiepunt moet trekken; deze lijn zal dan $O''P''$ in hetzelfde punt p snijden. Omdat hier het punt (P', P'') regts van O'' ligt, zou het zelf verkiesselijker geweest zijn het regterdistantiepunt te gebruiken; want hierdoor zou men eene lijn Dr verkregen hebben, die $O''P''$ onder een grooteren hoek sneed, en daardoor het snijpunt p in de teekening scherper aanwees.

§ 306. In plaats van een gegeven punt onmiddellijk in perspectief te brengen, begint men gewoonlijk met de perspectief te bepalen van het voetpunt der loodlijn, die uit het gegeven punt op het grondvlak valt; en daarna bepaalt men dan de hoogte, waarop de perspectief van het gegeven punt boven die van het genoemde voetpunt ligt.

Zij b. v. wederom (P', P'') het gegeven punt (Fig. 193), dan is P' , of anders gezegd (P', p'') , het voetpunt der bedoelde loodlijn; door dus op de grondlijn een stuk $p''r'$ gelijk aan $P'p''$ te nemen, en daarna de lijnen Dr' en $O''p''$ te trekken, vinden wij in het snijpunt dier lijnen, volgens de voorgaande §, de perspectief p' van het voetpunt P' . Daar nu de loodlijn zelve verticaal staat, heeft zij ook eene verticale lijn tot perspectief (§ 296, 3°); trekken wij dus uit p' eene verticale lijn, die $O''P''$ in p ontmoet,

dan is p de perspectief en p/p de *perspectievische hoogte* van het punt (P' , P'').

Wij hebben in Fig. 193 de gegevens opzettelijk juist zóó genomen als in Fig. 192, om de gelijkheid van uitkomst der beide constructiën duidelijk te doen in het oog vallen.

§ 307. Hoezeer weder de leerwijzen der beide voorgaande §§, strikt genomen, tot het in perspectief brengen van voorwerpen genoegzaam zouden zijn, gaan zij met dezelfde zwarigheden gepaard, die wij reeds in § 299 opmerkten. Zij banen echter den weg tot de gebruikelijke leerwijzen, waarbij men deze zwarigheden zooveel mogelijk ontgaat, en tot wier verklaring wij thans zullen overgaan.

§ 308. Men neemt namelijk behalve het glas GS en het horizontale vlak GV, nog een derde projectievlak VS aan (Fig. 194), dat in eenig punt R loodregt op de grondlijn staat; en elk in perspectief te brengen punt beschouwt men dan als door zijne afstanden tot deze drie projectievlakken gegeven te zijn. Deze afstanden noemt men *de diepte*, *de breedte* en *de hoogte* van het punt; de afstand achter het glas namelijk is de diepte, en de afstand ter zijde van het derde projectievlak is de breedte. Van de drie onderling regthoekige assen (zie § 51), volgens welke de drie projectievlakken elkander snijden, wordt dan ook RV *de as der diepten*, RG *de as der breedten* en RS *de as der hoogten* genoemd; want zoo men op deze assen, van den gemeenschappelijken oorsprong R af, de diepte RL, de breedte RM en de hoogte RN van eenig punt uitzet, is dit punt zelf het over R staande hoekpunt A van een regthoekig parallelopipedum, op RL, RM en RN als ribben beschreven.

Hoezeer in de grondlijn de oorsprong R naar welgevallen kan genomen worden, neemt men dien altijd zóó aan, dat de in perspectief te brengen punten allen aan dezelfde zijde b. v. links, van het vlak VS gelegen zijn. In de teekeningen zal alzoo het regter-uiteinde van de grondlijn tot oorsprong kunnen genomen worden.

§ 309. Laat nu wederom (Fig. 195), in het als vlak van tekening aangenomen glas, GR de grondlijn, O'' het oogpunt, D het distantiepunt, en R de bovengenoemde oorsprong zijn; trekken wij dan RO'' en stellen wij RS loodregt op GR, zoo is volgens § 302 RO'' de perspectief van de as der diepten, terwijl de as der

breedten RG en de as der hoogten RS op het glas zelf gelegen zijn. Willen wij nu het in Fig. 194 voorgestelde punt A in perspectief brengen, zoo behoeven wij in Fig. 195 slechts uit R de gegevene diepte RL op de grondlijn uit te zetten, en daarna de lijn LD te trekken, om volgens § 306, in het snijpunt van RO'' en LD, vooreerst de perspectief l van het in Fig. 194 voorgestelde punt L te vinden. Zoo wij verder in Fig. 195, na de gegevene breedte RM op de grondlijn uitgezet te hebben, M met O'' vereenigen, en uit l eene met de grondlijn evenwijdige lijn trekken, die MO'' in a' ontmoet, is a' de perspectief van het punt A' van Fig. 194; want van de perspectieven der aldaar voorgestelde lijnen MA' en LA', moet in Fig. 195 de eene, volgens § 302, uit M naar O'' gerigt zijn, en de andere, volgens § 296, 4°, uit l evenwijdig met de grondlijn loopen. Indien wij nu ook nog, na in Fig. 195 de gegevene hoogte RN op de as der hoogten uitgezet te hebben, N met O'' vereenigen, en uit l eene verticale lijn trekken, die NO'' in a''' ontmoet, is volgens § 332 en § 296, 3°, evenzoo a''' de perspectief van het punt A''' van Fig. 194; zoodat wij eindelijk in Fig. 195 slechts uit a' eene verticale en uit a''' eene horizontale lijn te trekken hebben, om in haar ontmoetingspunt, alweder volgens § 296, de perspectief a van het in Fig. 194 voorgestelde punt A te vinden.

Van dit in perspectief gebragte punt noemt men *RL de perspectievische diepte*, *la' de perspectievische breedte* en *a'a de perspectievische hoogte*. Den afstand van *la'* tot de grondlijn, kan men *de perspectievische wijking* noemen van de punten, die zich op de diepte RL achter het glas bevinden.

Punten, die even ver achter het glas en even hoog boven het grondvlak liggen, hebben blijkbaar dezelfde perspectievische wijking en gelijke perspectievische hoogten.

§ 310. Mogt de distantie zoo groot zijn, dat het punt D te ver buiten de teekening viel om gebruikt te kunnen worden, zoo zou dit bij de voorgaande constructie weinig bezwaar opleveren.

Men kan dan namelijk $O''d_1 = \frac{1}{n} O''D$ en $RL_1 = \frac{1}{n} RL$ nemen, als wanneer eene lijn van l_1 naar d_1 getrokken, blijkbaar RO'' in hetzelfde punt l snijden zal.

Volgens § 306 kan men in de lijn MO'' het punt a' ook vinden, door ML_1 gelijk aan de gegevene diepte RL te nemen en de

lijn L_1D te trekken, die dan MO'' in a' zal snijden. Hoezeer dit eenigzins korter is, volgt men echter meestal de constructie der voorgaande §, ten einde de perspectievische diepten van verschillende punten, allen op dezelfde lijn RO'' uitgezet, te bekomen.

Om de perspectievische hoogte te vinden, gebruikt men echter niet zelden, in plaats van het oogpunt, een willekeurig punt U van den horizon. Trekt men namelijk RU en NU , dan is U het vergaarpunt (zie § 303) van de perspectieven van een paar horizontale evenwijdige lijnen, die het glas in R en N ontmoeten; verticale lijnen, tusschen RU en NU getrokken, zijn dus de perspectieven van verticale lijnen, die allen de hoogte RN hebben, en de op RU gelegene voetpunten dezer perspectieven, bepalen hare perspectievische wijking. Verlengt men dus $a'l$ tot dat zij RU in r ontmoet, en trekt men daarna uit r eene verticale lijn, die NU in n ontmoet, dan is $rn = a'a$ de perspectievische hoogte van elk punt, dat op de werkelijke hoogte RN boven het grondvlak en op de diepte RL achter het glas ligt.

Na de voorgaande verklaring zal men gemakkelijk inzien, dat de perspectievische hoogte $r,n_1 = a'a$ evenzoo gevonden zal worden, wanneer men de werkelijke hoogte R_1N_1 , in een willekeurig punt R_1 van de grondlijn of haar verlengde, loodregt op de grondlijn stelt, en dan, na R_1 en N_1 met een willekeurig punt U van den horizon te hebben vereenigd, van de lijnen R_1U en N_1U hetzelfde gebruik maakt, dat wij zoo even van de lijnen RU en NU gemaakt hebben. Voor zoover dit nog opheldering mogt behoeven, heeft men slechts op te merken, dat de keuze van een anderen oorsprong R in de grondlijn, noch op de diepte, noch op de hoogte, maar alleen op de breedte der in perspectief te brengen punten invloed kan hebben.

§ 311. Men kan de perspectievische diepte, breedte en hoogte van eenig punt, die wij in § 309 leerden construeren, ook gemakkelijk door berekening vinden; hierbij zijn dan, behalve de diepte, breedte en hoogte van dat punt, ook de distantie en de afstand RO'' van den oorsprong tot het oogpunt, in getallen lengte-eenheden gegeven.

Laat namelijk in Fig. 195 gegeven zijn: $O''D = p$, $O''R = q$, $RL = d$, $RM = b$, $RN = h$; en stellen wij $Rl = d'$, $la' = b'$ en $a'a = la''' = h'$, dan geven de gelijkvormige driehoeken RLl en $O''Dl$

de evenredigheid

$$Rl : O''l = RL : O''D \text{ of } d' : q - d' = d : p,$$

waaruit wij vooreerst vinden

$$d' = \frac{qd}{p+d} \text{ en } O''l = q - d' = \frac{pq}{p+d};$$

en verder hebben wij de evenredigheden

$$O''R : O''l = RM : la' = RN : la'''$$

of

$$q : \frac{pq}{p+d} = b : b' = h : h',$$

waaruit onmiddellijk de waarden van b' en h' gevonden worden, zoodat wij dan hebben

$$d' = \frac{q}{p+d} d, \quad b' = \frac{p}{p+d} b \text{ en } h' = \frac{p}{p+d} h.$$

Na door deze formules de waarden van d' , b' en h' voor eenig punt berekend te hebben, heeft men in het vlak der teekening slechts de grondlijn, den oorsprong en de rigting der lijn RO'' noodig, om door het behoorlijk uitzetten der lijnen $Rl = d'$, $la' = b$ en $a'a = h'$, dadelijk de perspectief a van dat punt te bekomen. Bij groote teekeningen, zooals b. v. van tooneelschermen, waar constructiën door het gebruik van passer en liniaal aan veel bezwaar onderhevig zijn, is de verklaarde handelwijze van onmiskenbaar nut.

§ 312. Wordt de aangenomene lengte-eenheid, van den oorsprong af, een aantal malen na elkander op de assen uitgezet, zooals in Fig. 194 door de cijfers 1, 2, 3, 4, enz. is aangewezen, dan gaan die assen in *schalen* over, zoodat dan RV de schaal der diepten, RG die der breedten en RS die der hoogten is.

In het als vlak van teekening aangenomene glas (Fig. 196) blijven de deelpunten op de schalen RG en RS hunne ware plaats behouden; maar de deelpunten op de schaal der diepten, kunnen op het glas slechts door hunne perspectieven aangewezen worden. Deze perspectieven worden onmiddellijk door de constructie van § 306 gevonden. Na namelijk den oorsprong R met het oogpunt O'' vereenigd te hebben, zetten wij de lengte-eenheid eenige malen na elkander van R af op de grondlijn RG uit; uit de deelpunten 1, 2, 3, 4, enz. hierdoor in de grondlijn verkregen,

trekken wij lijnen naar het distantiepunt D, die RO'' in overeenkomstige punten 1, 2, 3, 4, enz. snijden, dan zijn deze snijpunten de perspectieven van de deelpunten op de schaal der diepten. Nadat deze punten in de lijn RO'' aangewezen zijn, is dus RO'' de in perspectief gebragt schaal der diepten, die als zoodanig den naam van *de wijkende schaal* draagt; en wel omdat zij onmiddellijk, voor elk getal lengte-eenheden waarop eenig punt zich achter het glas bevindt, de perspectievische diepte en wijking van dat punt aanwijst.

Zetten wij de lengte-eenheid, van R af, achtereenvolgens ook op RS uit, zoo is de lijn RS met de daarin verkregene deelpunten 1, 2, 3, 4, enz. de schaal der hoogten, terwijl RG met de daarin reeds aanwezige deelpunten de schaal der breedten is. Trekken wij nu uit O'' lijnen naar al de deelpunten van RG en RS, en trekken wij vervolgens, uit al de deelpunten der wijkende schaal, zoowel horizontale als verticale lijnen, dan worden deze, door de uit O'' getrokken lijnen, zoodanig verdeeld, dat zij, voor ieder deelpunt der wijkende schaal, bijzondere schalen van perspectievische breedte en hoogte opleveren.

Na, voor eene aangenomene eenheid, een dergelijk *perspectievisch net* vervaardigd te hebben, kan men onmiddellijk de perspectief aanwijzen van elk punt, waarvan de werkelijke diepte, breedte en hoogte in getallen gegeven zijn. Laat b. v. van zulk een punt de diepte 2, de breedte 4 en de hoogte 3 zijn, dan is *Rl* de perspectievische diepte, *lm* de perspectievische breedte, en *ln* de perspectievische hoogte van dit punt, welks perspectief *a* alzoo gevonden wordt, door $ma = ln$ loodregt op *lm* te stellen.

§ 313. Door de leerwijzen, in § 309—§ 312 voorgedragen, wordt de teekening geheel bevrijd van de projectiën van het voorwerp, dat men in perspectief wil brengen. Hoe verkiesselijk dit nu in één opzigt ook zijn moge, is het echter in een ander opzigt niet verkiesselijk, in het geheel geene projectiën te gebruiken; want de afstanden, van de in perspectief te brengen punten tot de drie projectievlakken, moeten in allen gevalle gegeven zijn, en deze afstanden kunnen, juist door de projectiën van die punten, op de gemakkelijkste wijze gegeven worden. Het komt er dus op aan een zoodanig gebruik van projectiën te maken, dat men de in § 299 en § 307 bedoelde zwarigheden blijft ontgaan, en dit kan gemakkelijk op de volgende wijze geschieden.

Met eene geringe wijziging van de tot dusver gevolgde gewoonte, stelt men zich namelijk voor, dat de drie projectievlakken van Fig. 194, tot bekoming eener constructiefiguur, op de in Fig. 197 voorgestelde wijze in elkander neergeslagen zijn; zoodat hier het bovenste gedeelte GS van het verticale vlak, en het achterste gedeelte GV van het horizontale vlak, niet op elkander, maar in elkanders verlengden komen. In de constructiefiguur, die tweemaal de schaal der diepten RV bevat, verkrijgt dan elk punt A, dat zich achter het glas bevindt, eene horizontale projectie A' die beneden de grondlijn, en eene derde projectie A''' die rechts van de schaal der hoogten ligt; en deze beide projectiën A' en A''' bepalen het punt A volkomen, zonder dat men zijne projectie op het glas noodig heeft. Om de diepte RL, de breedte RM, en de hoogte RN van dit punt, in hunne ware grootte aan te wijzen, behoeft men dan ook slechts in de constructiefiguur, uit A' en A''' loodlijnen op de overeenkomstige schalen te trekken.

Indien nu de oorspong R zóó is aangenomen, als wij aan het slot van § 308 opgaven, zullen de in perspectief te brengen punten zich allen binnen den drievlakkigen hoek RGSV van Fig. 194 bevinden; hieruit volgt dan, dat in de constructiefiguur van Fig. 197 al hunne horizontale projectiën binnen den hoek GRV, al hunne derde projectiën binnen den hoek SRV zullen gelegen zijn; en dat dus noch deze projectiën, noch eene van die projectiën en de binnen den hoek GRS te verkrijgen perspectief, door elkander zullen kunnen vallen.

Op deze wijze kan dus een in perspectief te brengen voorwerp door twee projectiën gegeven zijn, zonder dat die projectiën, in de teekening, eenigzins hinderlijk aan de te construeren perspectief zullen wezen.

Heeft men in de beschouwde constructiefiguur, nadat daarin het oogpunt O'' en het distantiepunt D gegeven zijn, de horizontale projectie van het oog noodig, dan behoeft men slechts uit O'' eene loodlijn O''o op de grondlijn te trekken, en daarna O''D van o af op deze loodlijn uit te zetten, zoodat $oO'' = O''D$ wordt. Alsdan zal hier, hoezeer het oog vóór het glas geplaatst is, O' zijne horizontale projectie zijn.

§ 314. Om de toepassing van het voorgedragene door een eenvoudig voorbeeld op te helderen, zullen wij een regthoekig

parallelopipedum in perspectief brengen, waarvan grond- en bovenvlak evenwijdig met het horizontale vlak loopen, terwijl een paar andere zijvlakken evenwijdig met het glas zijn.

Laat dan (Fig. 198) wederom GR de grondlijn, RS de as der hoogten, O' het oogpunt, en dus RO' de perspectief van de as der diepten RV zijn. Zij voorts A'B'C'D' de horizontale, en B'''C'''G'''F''' de derde projectie, van het op de voorgestelde wijze geplaatste parallelopipedum (*). Door dan vooreerst RK₁=RK, RI₁=RI te nemen, en uit K₁ en I₁ lijnen naar het distantiepunt D te trekken, vinden wij in RO' de perspectieven *k* en *i* van de punten K en I. Trekken wij verder uit *k* en *i* lijnen evenwijdig met de grondlijn, en uit L en M lijnen naar O', dan vinden wij, door de snijding dezer lijnen, de perspectief *a'b'c'd'* van de horizontale projectie A'B'C'D', zoodat de perspectieven van de verticaal staande ribben van het ligchaam, zullen moeten vallen langs verticale lijnen uit *a'*, *b'*, *c'* en *d'* getrokken. Daar het grondvlak van het ligchaam ter hoogte K₂B''', en het bovenvlak ter hoogte K₂F''' boven het horizontale vlak ligt, vereenigen wij de punten K₂, B''' en F''' met een willekeurig punt U van den horizon; door dan verder *a'k* en *d'i* te verlengen, tot zij UK₂ in *b'* en *c'* ontmoeten, en vervolgens uit deze ontmoetingspunten verticale lijnen te trekken, vinden wij: tusschen UK₂ en UB''' de perspectievische hoogten *b'b* en *c'c* van de voorste en achterste hoekpunten des grondvlak; almede, tusschen UK₂ en UF''' de perspectievische hoogten *b'f* en *c'g* van de voorste en achterste hoekpunten des bovenvlak. Door dus deze hoogten uit de overeenkomstige punten *a'*, *b'*, *c'* en *d'* verticaal naar boven uit te zetten, verkrijgen wij de perspectieven van al de hoekpunten des ligchaams; en vereenigen wij dan naar behooren deze in perspectief gebragte hoekpunten, zoo verkrijgen wij daardoor de perspectief *abcdefgh* van het parallelopipedum.

Tot eene proef op de constructie, zullen de verkregene lijnen *ad*, *bc*, *fg* en *eh* allen naar O' gerigt moeten zijn; hieruit volgt tevens, dat het niet altijd noodig is al de hoekpunten van een

(*) Hoezeer wij deze beide projectiën op de gewone manier door geaccenteerde letters onderscheiden hebben, is hier eene zoodanige onderscheiding strikt genomen onnoodig; omdat men volgens de voorgaande § weet, dat binnen den hoek GRV niet anders dan eene horizontale, binnen den hoek SRV niet anders dan eene derde projectie kan voorkomen.

veelvlakkelig ligchaam in perspectief te brengen, maar dat men somtijds, uit een gevonden deel van de perspectief, het ontbrekende deel kan afleiden. Kende men b. v. alleen de punten a, b, c en f der begeerde perspectief, dan zou men eenvoudig door het trekken van lijnen, die evenwijdig met GR , evenwijdig met RS , en naar O'' gerigt waren, de geheele perspectief van het parallelpipipedum kunnen bekomen.

§ 315. In de voorgaande § zagen wij, dat men somtijds, uit een gevonden deel van de perspectief van eenig voorwerp, het ontbrekende deel dier perspectief kan afleiden. Te dezen aanzien ligt een merkwaardig hulpmiddel opgesloten in de volgende *constructie, die de werkelijke grootte van eenen horizontalen hoek leert vinden, wiens perspectief gegeven is.*

Laat in Fig. 199, waar grondlijn, oogpunt, enz. door dezelfde letters als in de voorgaande figuren zijn aangewezen, bac de perspectief van zulk een hoek zijn; verlengen wij dan ab en ac tot zij den horizon in B en C ontmoeten, stellen wij in O'' eene loodlijn $O''O = O''D$ op den horizon, en trekken wij vervolgens OB en OC , zoo is BOC de werkelijke grootte van den horizontalen hoek, die bac tot perspectief heeft.

Verbeelden wij ons namelijk dat de driehoek BOC , door eene wenteling om BC , loodregt op het glas opgerigt wordt, dan komt zijn hoekpunt O juist in het oog, omdat $O''O = O''D$ genomen is; de opgerigte lijnen OB en OC zijn dan uit het oog getrokken horizontale lijnen, die het glas in B en C ontmoeten; derhalve zijn, volgens § 303, B en C de vergaarpunten van de perspectieven der horizontale lijnen, die evenwijdig met de opgerigte lijnen OB en OC loopen. Maar ab en ac zijn gegeven als perspectieven van horizontale lijnen, en deze perspectieven zijn naar de vergaarpunten B en C gerigt; derhalve loopen de horizontale lijnen, die ab en ac tot perspectieven hebben, evenwijdig met de opgerigte lijnen OB en OC , en hieruit volgt dan terstond dat BOC de grootte is van den horizontalen hoek, die bac tot perspectief heeft.

Mogt de perspectief bac , van den hoek één been ac , evenwijdig met de grondlijn hebben, zoo behoeft men zich slechts te verbeelden, dat het ontmoetingspunt C op den horizon oneindig ver van O'' valt, om te zien dat eene lijn OC_1 , uit O evenwijdig met den horizon getrokken, de werkelijke grootte

BOC_1 zal aanwijzen van den hoek, die bac_1 tot perspectief heeft.

Bij deze constructie is het blijkbaar onverschillig of de hoeken, die bac en bac_1 tot perspectieven hebben, zich in het horizontale grondvlak, dan wel in een hooger geplaatst horizontaal vlak bevinden.

§ 316. Stellen wij nu, dat van een horizontalen hoek van bekende grootte, de perspectief a van het hoekpunt (Fig. 199) en de perspectief ac van het eene been reeds geconstrueerd zijn, en dat men daaruit de perspectief van het andere been wil afleiden. Indien men dan, na het uitzetten van $O''O = O''D$, ac tot in C verlengt, CO trekt, en aan den hoek COB de bekende grootte geeft, zal eene lijn, uit a naar B getrokken, de begeerde perspectief van het andere been zijn.

Is p de perspectief van eenig punt, dat met den door bac voorgestelden hoek in hetzelfde horizontale vlak ligt, en trekt men uit C door p eene lijn, die ab in q ontmoet, dan is ook bqp de perspectief van een horizontalen hoek, wiens werkelijke grootte BOC is. Heeft men, na het trekken van CO , COB gelijk aan een regten hoek genomen, dan zullen ook de horizontale hoeken regt zijn, die bac en bqp tot perspectieven hebben. Hieruit blijkt dus, hoe men, in een perspectiefisch voorgesteld horizontaal vlak, uit gegebene punten loodlijnen op eene gegebene lijn oprigten of neerlaten kan.

Wil men den horizontalen hoek, die bac tot perspectief heeft, middendoordeelen, dan zal men slechts den als boven geconstrueerden hoek BOC werkelijk moeten middendoordeelen, door eene lijn OF , die den horizon ergens in F ontmoet. Eene lijn uit a naar F getrokken, zal dan de perspectief af der begeerde deellijn wezen.

Op dezelfde wijze zal men een in perspectief gebragten horizontalen hoek kunnen verdeelen in ongelijke delen, die aan deze of gene voorwaarde voldoen.

Mogt de perspectief ac_1 van het eene been, evenwijdig met de grondlijn loopen, dan zou men van eene lijn OC_1 , evenwijdig met den horizon getrokken, hetzelfde gebruik moeten maken, dat boven van de lijn OC gemaakt is.

§ 317. Om de nuttige strekking van het hulpmiddel der voorgaande § te doen zien, zullen wij het op een bijzonder voor-

beeld toepassen. Als zoodanig stellen wij ons voor de perspectief te vinden van eene regelmatige vijfhoekige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, indien behalve hare hoogte niets anders gegeven is, dan de perspectief ab (Fig. 200) van eene met het glas evenwijdige vóórzijde van haar grondvlak.

Dewijl de polygoonshoek van een regelmatigen vijfhoek, door de diagonalen in drie gelijke deelen ieder van 36° verdeeld wordt, plaatsen wij in het punt O , dat volgens § 315 bepaald is, vijf hoeken van 36° naast elkander, wier uiterste beenen Og en Ol evenwijdig met den horizon loopen, zoodat fOg , gOh , hOi , iOk en kOl allen hoeken van 36° zijn, wier beenen den horizon in g , h , i en k ontmoeten. Trekken wij nu uit a lijnen naar k , i en h , en uit b lijnen naar g , h en i , dan verkrijgen wij hierdoor bak , kai , iah , abg , gbh en hbi als perspectieven van in het horizontale vlak liggende hoeken, die volgens § 315 de in O geplaatste hoeken van 36° tot werkelijke grootte hebben. De uit a en b voortkomende perspectieven der diagonalen en zijden des vijfhoeks, vallen alzoo langs de lijnen ak , ai , ah , bg , bh en bi , wier onderlinge snijding ons dus terstond de perspectief $abcde$ van het grondvlak der piramide verschaft.

De loodlijn, uit haren top op dit grondvlak vallende, heeft haar voetpunt in het middelpunt van den vijfhoek, en dus in het snijpunt van de lijnen, die twee zijner hoeken middendoordeelen.

De perspectief der deellijn uit a , moet volgens de voorgaande § getrokken worden naar het punt n , waar de horizon ontmoet wordt door eene lijn On , die den hoek lOh middendoordeelt; door den hoek fOi middendoor te deelen en het punt m der deellijn met b te vereenigen, verkrijgen wij evenzoo de perspectief der deellijn uit b . Het snijpunt p , der lijnen an en bm , is dus de perspectief van het voetpunt der genoemde loodlijn.

Door verder de gegevene hoogte PT der piramide ergens loodrecht op de grondlijn te stellen, en een willekeurig punt U van den horizon te bezigen, vinden wij volgens § 310, dat $p't'$ hare perspectievische hoogte is. Indien wij dus uit p eene lijn $pt = p't'$ verticaal naar boven trekken, en het daardoor verkregen punt t met de punten a , b , c , d en e vereenigen, verkrijgen wij de perspectief $tabcde$ der regelmatige vijfhoekige piramide.

§ 318. Hoezeer wij tot dusver, de leerwijze tot het vinden van perspectieven, slechts op regtlijnige figuren of veelvlakkige

ligchamen hebben toegepast, is het klaar, dat men ook de perspectieven van kromlijnige figuren, of van ligchamen door gebogen vlakken begrensde, zal kunnen bekomen, door het in perspectief brengen van een genoegzaam aantal punten. Daar onder deze punten voornamelijk die van den schijnbaren omtrek in aanmerking komen, zal deze dan vooraf, door het beschrijven van omhullingskegels, die het oog tot top hebben, behooren geconstrueerd te worden. In vele bijzondere gevallen is dit echter onnoodig, en vindt men een toereikend hulpmiddel in het construeren der perspectief van een horizontalen cirkel. Derhalve zullen wij thans aantoonen, hoe men zulk eenen cirkel in perspectief kan brengen.

Vooraf merken wij op, dat de perspectief van een cirkel in het algemeen eene ellips zal zijn. Want eene ooglijn, die zich langs den cirkelomtrek beweegt, beschrijft het oppervlak van een scheeven cirkelvormigen kegel, en zulk een kegel wordt door eenig plat vlak, dus ook door het glas, in het algemeen volgens eene ellips gesneden (zie *Hoogere Meetk.* § 331).

§ 319. Zij nu M' het middelpunt (Fig. 201) van eenen in het horizontale vlak gelegen cirkel, die in perspectief gebragt moet worden. Dan beschrijven wij vooreerst om dien cirkel een vierkant $A'B'C'D'$, waarvan de zijden evenwijdig met – en loodrecht op – de grondlijn GR zijn; in dat vierkant trekken wij de diagonalen $A'C'$ en $B'D'$, en vervolgens brengen wij dat vierkant met zijne diagonalen in perspectief; daarbij tevens de perspectieven van de raakpunten des cirkels met de zijden, en van zijne snijpunten met de diagonalen bepalende.

Ten einde dit op de gemakkelijkste wijze te verrigten, merken wij op, dat de diagonalen $A'C'$ en $B'D'$ horizontale lijnen zijn, die het glas, in de punten P' en Q' der grondlijn, onder hoeken van 45° ontmoeten, en dat derhalve de perspectieven der diagonalen volgens § 304 langs de lijnen vallen, die wij uit P' en Q' naar de wederkeerige distantiepunten D kunnen trekken; in het snijpunt m' dezer lijnen vinden wij dan al dadelijk de perspectief van het middelpunt M' . Daar voorts de perspectieven van de zijden $A'D'$ en $B'C'$, volgens § 302, langs de lijnen vallen, die wij, uit de ontmoetingspunten van $A'D'$ en $B'C'$ met de grondlijn, naar het oogpunt O'' kunnen trekken, vinden wij, door de snijding van deze lijnen met de vorige, de perspectief $a'b'c'd'$ van het vierkant, waarin dan, tot eene proef op de constructie, $a'b'$

en $c'd'$ evenwijdig met GR moeten worden. Deze evenwijdigheid in aanmerking nemende, behoeft men slechts één distantiepunt te gebruiken; want nadat door het trekken van P'D de punten a' en c' gevonden zijn, worden de punten b' en d' door de genoemde evenwijdige lijnen gevonden.

Trekken wij verder door m' twee lijnen, waarvan de eene naar O'' gerigt, en de andere evenwijdig met GR is, dan vinden wij hierdoor de perspectieven e' , g' , f' en h' der raakpunten E', G', F' en H'; terwijl lijnen, uit de ontmoetingspunten van I'L' en J'K' met GR, naar O'' getrokken, door hare snijding met $a'c'$ en $b'd'$, de perspectieven i' , l' , j' en k' der punten I', L', J' en K' aanwijzen.

Daar nu de perspectief des cirkels eene ellips is, die door de acht reeds geconstrueerde punten moet gaan, en bovendien in vier van die punten de zijden des vierhoeks $a'b'c'd'$ moet raken (zie § 296, 8°), is zij genoegzaam bepaald, om haar terstond uit de hand te kunnen trekken. Des verkiezende zou men echter, tot meer naauwkeurigheid, nog meer punten van den omtrek des cirkels in perspectief kunnen brengen.

De lijn $e'g'$, die de raakpunten van twee evenwijdige raaklijnen vereenigt, is eene middellijn der ellips, wier middelpunt dus in het midden van $e'g'$, dat is een weinig zijdelings beneden m' valt. Het vooraf bepalen van de assen dezer ellips moeten wij, als te ingewikkeld, met stilzwijgen voorbijgaan.

§ 320. Wil men een horizontalen cirkel in perspectief brengen, die op eene zekere hoogte boven het horizontale vlak geplaatst is, dan kan men gelijkerwijze als boven handelen.

Laat namelijk E'F'G'H' thans de horizontale projectie van den bedoelden cirkel, en RN zijne hoogte boven het horizontale vlak zijn (Fig. 201); dan zullen ook A'C' en B'D' de horizontale projectiën van de diagonalen des omgeschreven vierkants zijn, en deze diagonalen zullen dus nu het glas ontmoeten in de punten P en Q, die gelegen zijn op eene lijn door N evenwijdig met de grondlijn getrokken. Wij behoeven dus hier slechts hetzelfde gebruik van de lijn PQN te maken, dat wij in de voorgaande § van de grondlijn GR gemaakt hebben, om eerst de perspectief $abcd$ van het omgeschreven vierkant met zijne diagonalen, en vervolgens de perspectief van den bedoelden cirkel te bekomen.

In Fig. 201 hebben wij twee vierkanten, die dezelfde horizon-

tale projectie $A'B'C'D'$ hebben, in perspectief gebragt. Indien wij dus de punten a , b , c en d respectievelijk met de punten a' , b' , c' en d' vereenigen, zullen deze vereenigingslijnen verticaal zijn en met de vierhoeken $abcd$ en $a'b'c'd'$ de perspectief uitmaken van een regthoekig parallelopipedum, in welks vierkant grond- en bovenvlak cirkels beschreven zijn.

§ 321. Om een gewonen cilinder, die met zijn cirkelvormig grondvlak op het horizontale vlak staat, in perspectief te brengen, construeert men vooreerst de perspectieven van zijn grond- en bovenvlak; daarna trekt men verticale raaklijnen aan de perspectief van het grondvlak; deze zullen dan ook de perspectief van het bovenvlak raken, en dus de perspectief van den cilinder voltooijen.

Is b. v. de cirkel $E'F'G'H'$ het grondvlak, en RN de hoogte van den cilinder (Fig. 201), dan zijn de ellipsen $e'f'g'h'$ en $efgh$ de perspectieven van grond- en bovenvlak; door aan deze ellipsen, die wij daartoe duidelijkheidshalve in Fig. 202 afzonderlijk hebben voorgesteld, de gemeenschappelijke verticale raaklijnen $r'r$ en $s's$ te trekken, verkrijgt men dan de perspectief van den cilinder.

Wil men de raakpunten r' , s' , r en s vooraf door constructie vinden, dan bepaalt men de horizontale projectie O' van het oog (Fig. 201), door $oO' = O''D$ te nemen (zie § 313 aan het slot); voorts trekt men uit O' raaklijnen aan den cirkel $E'F'G'H'$, en brengt de raakpunten r_1 en s_1 , alsmede de punten des bovenvlak die zich in r_1 en s_1 projecteren, in perspectief; deze perspectieven zullen dan de begeerde punten zijn. Want $O'r_1$ en $O's_1$ zijn de horizontale doorgangen van oogvlakken, die den cilinder volgens de beschrijvende lijnen der punten r_1 en s_1 raken; deze beschrijvende lijnen, die in Fig. 202, $r'r$ en $s's$ tot perspectieven hebben, behooren dus tot den schijnbaren omtrek des cilinders.

§ 322. Om een regten cirkelvormigen kegel, die met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat, in perspectief te brengen, behoeft men, na de perspectieven van grondvlak en top geconstrueerd te hebben, slechts uit de perspectief van den top, raaklijnen aan de perspectief van het grondvlak te trekken.

Zij b. v. wederom GR de grondlijn, O'' het oogpunt, D het distantiepunt (Fig. 203), en laat $E'F'G'H'$ het gegeven grondvlak zijn, dan vinden wij volgens § 319 de ellips $e'f'g'h'$ als perspectief van het grondvlak, terwijl het middelpunt T' des grondvlak

zijne perspectief in t' verkrijgt. Zij voorts $t'''T''$ de gegevene hoogte des kegels, die wij hier gemakshalve zóó uitgezet hebben, dat T'' de projectie van den top op het glas wordt, dan vinden wij door $O''T''$ te trekken onmiddellijk de perspectievische hoogte $t't$ des kegels, en de perspectief t van zijn top. Trekken wij dus, uit t , raaklijnen tr' en ts' aan de ellips $e'f'g'h'$, zoo hebben wij de perspectief $tr'h'e's'$ van den kegel verkregen.

Wil men hier de raakpunten r' en s' vooraf door constructie vinden, dan heeft men behalve de verticale projectie T'' van den top weder de horizontale projectie O' van het oog noodig, ten einde het ontmoetingspunt I met het horizontale vlak te bepalen, van de ooglijn ($O'T'$, $O''T''$), die naar den top loopt. Trekt men uit dit punt I raaklijnen Ir en Is aan den cirkel $E'F'G'H'$, en brengt men de raakpunten r en s in perspectief, dan zullen deze perspectieven de begeerde punten r' en s' zijn. Immers volgens § 270 zijn Ir en Is de horizontale doorgangen van vlakken, die door het oog gaan en den kegel volgens de beschrijvende lijnen van de punten r en s raken, en derhalve behooren deze beschrijvende lijnen tot den schijnbaren omtrek.

Bij een kegel van geringe hoogte, kan het punt t binnen de ellips $e'f'g'h'$ vallen; alsdan vervalt het trekken der raaklijnen uit t , zoodat het grondvlak zelf de schijnbare omtrek is.

§ 323. De perspectief van een bol is (zie § 290) de doorsnede van het glas met den omhullingskegel, die men uit het oog als top om den bol beschrijven kan. Daar die kegel een regte cirkelvormige is (zie § 159), is zijne doorsnede met eenig plat vlak, dat tusschen den top en den bol geplaatst wordt, altijd eene ellips, die slechts in een cirkel overgaat, als het platte vlak loodregt op de as des kegels is. De perspectief van een bol zal dus slechts een cirkel zijn, in het bijzondere geval dat de ooglijn, naar zijn middelpunt getrokken, loodregt op het glas mogt staan; in alle andere gevallen is de perspectief van een bol eene ellips.

Deze ellips is gemakkelijk te construeren, wanneer men zoowel van den bol als van het oog de beide projectiën op het horizontale vlak en op het glas bezigt. Immers zal men dan slechts, ten aanzien van het glas als verticaal vlak, dezelfde constructie moeten verrigten, die wij in § 282 ten aanzien van het horizontale vlak aanwezen.

De uitvoering dier constructie aan den lezer overlatende, willen wij hem echter doen opmerken, dat, behalve de omwisseling der horizontale en verticale vlakken, de hier te verkrijgen figuur en de in Fig. 186 voorgestelde, nog eenigzins van elkander zullen verschillen; en wel, omdat in Fig. 186 de top des kegels en de bol aan denzelfden kant van het horizontale vlak genomen zijn, terwijl het oog en den bol zich aan weerszijden van het verticale vlak of glas bevinden.

§ 324. Om een omwentelingsligchaam met verticale as in perspectief te brengen, zou men eigenlijk, zooals in de voorgaande § met betrekking tot een bol gezegd is, de doorsnede met het glas moeten construeren van den omhullingskegel, uit het oog als top volgens § 281 om dat ligchaam beschreven. Gemakkelijker echter is het, door de constructiën in § 319 en § 320 aangewezen, een genoegzaam aantal parallelcirkels van het omwentelingsligchaam in perspectief te brengen, en daarna de perspectief van het ligchaam zelf te voltooiën, door uit de hand getrokken kromme lijnen, die de perspectieven der parallelcirkels raken.

Zoo hebben wij b. v. in Fig. 204 de perspectief van een omwentelingsligchaam verkregen, dat (M' , mM) tot as, en ($a'd'$, $abcde$) tot hoofdmeridiaan heeft. Wij hebben namelijk de perspectieven geconstrueerd van de vijf parallelcirkels, tot de punten a , b , c , d en e behoorende, en vervolgens aan weerszijden van deze perspectieven rakende kromme lijnen getrokken, waaraan wij overigens den vorm gegeven hebben, dien wij onderstellen konden dat met de bekende gedaante van den meridiaan zou overeenkomen.

§ 325. Reeds aan het slot van § 291 hebben wij gesproken van eene soort van perspectief, die niets anders is dan eene gewone projectie, verkregen door eenig achter het glas geplaatst voorwerp op het glas te projecteren. Tot het construeren dezer projectiën kan men eene bijzondere leerwijze volgen, die onder den naam van *isometrische perspectief* bekend is, en van wier grondslagen wij thans nog eene korte verklaring zullen geven.

Wanneer een projectievlak loodregt op den diagonaal van een cubus gesteld wordt, zal volgens § 147 de projectie ABCDEFG, van den cubus op dat vlak (Fig. 205), een regelmatigen zeshoek vertoonen, zoodanig dat de projectie van elke ribbe tot hare werkelijke lengte staat als $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Stelt men zich nu voor, dat op de ribben van den cubus,

die aan eenig hoekpunt A zamenkomen, van dat hoekpunt af drie lijnen van willekeurige grootte uitgezet zijn, en dat op deze drie lijnen als ribben een regthoekig parallelopipedum beschreven is; indien dan Ab , Ac en Ad de projectiën van die uitgezette lijnen zijn, zal men door het trekken van evenwijdige lijnen (zie § 76) terstond de projectie $Abcdefg$ van het genoemde parallelopipedum kunnen bekomen; en de projectie van elke ribbe van dit parallelopipedum staat dan almede (zie § 72) tot hare werkelijke lengte als $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Alsnu is het punt f de projectie van een punt, dat van de drie in A zamenkomende zijvlakken van den cubus verwijderd is op werkelijke afstanden, die zich tot Ab , Ac en Ad verhouden als $\sqrt{3} : \sqrt{2}$; en de plaats van dit punt f wordt blijkbaar uit die van de punten b , c en d gevonden, door alleen de lijnen bf' , cf' en $f'f = Ad$ te trekken.

Uit dit een en ander blijkt dan het volgende:

Indien men in een projectievlak twee lijnen AL en AR trekt, die met elkander eenen hoek van 120° maken, en dezen hoek door eene derde lijn AV middendoordeelt, zal men deze drie lijnen kunnen aanmerken als de projectiën van de onderling regthoekige lijnen, volgens welke drie onderling regthoekige vlakken elkander snijden.

En indien dan een punt in de ruimte door zijne afstanden tot deze drie onderling regthoekige vlakken gegeven is, zal men, na deze afstanden in reden van $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ verkleind te hebben, die verkleinde afstanden bf' , cf' en $f'f$ slechts evenwijdig met de lijnen AL, AR en AV behoeven uit te zetten, om de projectie f van het gegebene punt te bekomen.

De alzoo geconstrueerde projectie f is dan, wanneer men het projectievlak als tafereel of glas aanneemt, *de isometrische perspectief* van het gegeven punt; terwijl de lijnen AL, AR en AV, als dergelijke perspectieven van drie onderling regthoekige lijnen of assen, den naam van *isometrische assen* dragen. Hier zijn voorts bf' , cf' en $f'f$ *de perspectievische afstanden* van het gegeven punt tot *de isometrische vlakken*, welke benaming men aan de vlakken geeft, door de isometrische assen twee aan twee bepaald. Omdat deze perspectievische afstanden met de werkelijke afstanden evenredig zijn, zonder dat het tot hunne grootte iets afdoet of zij op deze of gene der drie lijnen AL, AR en AV gemeten worden, heeft men aan de hier beschouwde perspectief den naam van *isometrisch* (gelijkmatig) gegeven.

§ 326. Hoezeer de ribben van den beschouwden cubus allen gelijke helling tot het als glas aangenomen projectievlak hebben, stelt men zich gewoonlijk het glas in zulk eenen stand voor, dat de ribbe die AD tot projectie heeft eene verticale lijn, en dus het door AB en AC bepaalde zijvlak een horizontaal vlak is.

Diensvolgens onderscheidt men de assen AL, AR en AV, door AV *de verticale*-, AR *de regter*-, en AL *de linker-isometrische as* te noemen, terwijl men aan de beide laatsten den gemeenschap-pelijke naam van *horizontale isometrische assen* kan geven. De isometrische vlakken onderscheidt men door dergelijke benamingen; zoo bepalen AL en AR *het horizontale*-, AR en AV *het regter*-, AL en AV *het linker-isometrische vlak*.

Door *isometrische lijnen* verstaat men in het algemeen de lijnen in de ruimte, die evenwijdig loopen met de assen, perspectievisch door AL, AR en AV voorgesteld; er zijn dus *verticale* en twee soorten van *horizontale isometrische lijnen*. De werkelijke of perspectievische afstanden van eenig punt tot de isometrische vlakken, onderscheidt men door de benamingen *hoogte*, *regterafstand* en *linkerafstand*, naargelang zij van het horizontale, van het regter- of van het linker-isometrische vlak gerekend worden.

§ 327. Om de isometrische perspectief van een veelvlakkig ligchaam te bekomen, behoeft men slechts de isometrische perspectief van elk hoekpunt, volgens de aanwijzing van § 325, te construeren. Door behoorlijke vereeniging der gevondene punten, zal men dan de perspectieven van de ribben, en dus ook die van het ligchaam verkrijgen.

Bij deze constructie zal men het verkleinen der werkelijke afstanden, in reden van $\sqrt{3} : \sqrt{2}$, kunnen achterwege laten, indien men de isometrische perspectief van het ligchaam slechts in haren juisten vorm begeert te vinden, zonder op hare volstreckte grootte acht te slaan. Want door de werkelijke, in plaats van de verkleinde, afstanden te bezigen, zullen blijkbaar de lengte-afmetingen der te verkrijgen figuur, slechts allen in reden van $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ vergroot worden.

Laat b. v. van een regelmatig zeshoekig prisma, dat met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat, de werkelijke stand van dit grondvlak, ten opzichte van de lijnen AR en AL in de ruimte, in Fig. 206 door *abcdef* voorgesteld zijn, terwijl ook de hoogte van dit prisma gegeven is. Om dan de isometrische perspectief

van dit ligchaam te bekomen, laten wij uit de hoekpunten a , b , enz. loodlijnen aa' , aa'' , bb' , bb'' , enz. op AR en AL neder. Na vervolgens de lijnen AR en AL, zooals in Fig. 207 onder eenen hoek van 120° te hebben getrokken, nemen wij op die lijnen de punten a' , a'' , b' , b'' , enz. zoodanig, dat de afstanden Aa' , Aa'' , Ab' , Ab'' , enz. in Fig. 207 even groot als in Fig. 206 zijn. Dan vinden wij in Fig. 207 door de snijding van lijnen, uit de punten a' , a'' , b' , b'' , enz. evenwijdig met AL en AR getrokken, onmiddellijk de perspectieven a , b , enz. van de hoekpunten des grondvlak, en dus door hare vereeniging ook de perspectief $abcdef$ van het grondvlak zelf.

Trekken wij verder in Fig. 207 de lijn AV, die den hoek LAR middendoordeelt; daarna evenwijdig met AV de lijnen ag , bh , ci , dk , el en fm , die allen gelijk aan de gegevene hoogte van het prisma zijn; en vereenigen wij eindelijk de hierdoor gevondene punten g , h , i , enz., dan verkrijgen wij de isometrische perspectief $abcdefghiklm$ van het geheele prisma.

Deze perspectief beeldt nu echter het ligchaam eenigzins vergroot af, en wel zoodanig, alsof zijne lengte-afmetingen in reden van $\sqrt{2}:\sqrt{3}$ aangegroeid waren.

§ 328. De vergaarpunten, die wij in de gewone perspectief leerden kennen, komen in de isometrische perspectief niet voor; omdat bij deze, de perspectieven van evenwijdige lijnen altijd volgens § 76 evenwijdig zijn. Deze evenwijdigheid kan blijkbaar in vele gevallen tot eene proef op de naauwkeurigheid, — en ook tot merkelijke bekorting van de constructiën strekken.

Zoo zullen b. v. in Fig. 207 niet alleen ab , de , gh en kl maar ook de lijnen, die men van c naar f en van i naar m trekken kan, allen evenwijdig moeten worden. Hierdoor zal men, na de perspectieven van sommige hoekpunten des ligchaams gevonden te hebben, daaruit die van een aantal andere hoekpunten kunnen afleiden.

§ 329. Om de isometrische perspectief van eene kromme lijn te vinden, heeft men niets anders te doen dan een genoegzaam aantal punten van die kromme lijn in perspectief te brengen, ten einde de begeerde perspectief door de alzo gevonden punten te kunnen trekken.

Is de kromme lijn een cirkel, dan wordt het bepalen van hare isometrische perspectief vrij eenvoudig. Die perspectief namelijk

is, blijkens § 139, in het algemeen eene ellips, wier groote as gelijk aan de middellijn van den cirkel is.

Stelt men zich nu voor, dat om den cirkel een vierkant beschreven is, zoo kan men vooreerst de perspectief van dat vierkant construeren, die blijkbaar een parallelogram zal zijn. Deelt men de zijden van dit parallelogram middendoor, dan zijn de deelpunten de perspectieven van de raakpunten van den cirkel met het vierkant; in die deelpunten zullen dus de zijden van het parallelogram door de te vinden ellips moeten geraakt worden, en dit is doorgaans voldoende om die ellips, dat is de perspectief van den cirkel, te kunnen trekken.

Ligt de cirkel in een verticaal vlak, dan is het verkiesselijk een omgeschreven vierkant met horizontale en verticale zijden te gebruiken.

Is de cirkel evenwijdig met een der isometrische vlakken, of ligt hij in een van die vlakken, zoo zal men tot het omgeschreven vierkant isometrische lijnen kunnen nemen. De perspectief van het vierkant wordt dan eene ruit, wier zijden evenwijdig met de isometrische assen loopen, en tot die van het vierkant of tot de middellijn van den cirkel staan als $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; hieruit volgt een gemakkelijk middel om de perspectief van zulk een cirkel te bekomen.

Laat b. v. M het in perspectief gebragte middelpunt (Fig. 208) van een gegeven cirkel zijn, wiens vlak evenwijdig met het registerisometrische vlak is. Trekken wij dan door M lijnen evenwijdig met AR en AV , en nemen wij op die lijnen gelijke stukken Ma , Mb , Mc en Md , zoodanig dat $ab = cd$ tot de middellijn van den gegeven cirkel staat als $\sqrt{2} : \sqrt{3}$; trekken wij verder door a en b lijnen die met AV , door c en d lijnen die met AR , evenwijdig loopen, zoo ontstaat door de snijding dezer lijnen eene ruit ef , die de perspectief van een om den cirkel beschreven vierkant is. Eene ellips, die de zijden van deze ruit in a , b , c en d raakt, zal dan de perspectief van den gegeven cirkel zijn.

Van deze ellips zijn, volgens de eigenschappen dier kromme lijn, ab en cd twee elkander toegevoegde middellijnen, die men hare *isometrische middellijnen* noemt; terwijl hare assen EF en GH langs de onderling rechthoekige diagonalen der ruit vallen. De groote as EF valt langs den diagonaal, die de hoekpunten der scherpe hocken vereenigt, en is, zooals wij reeds opmerkten, gelijk aan de middellijn M van den gegeven cirkel. De lengte

der kleine as GH wordt gevonden uit de eigenschap der ellips, dat de regthoek der assen $EF \times GH$ gelijk is aan het parallelogram der toegevoegde middellijnen $ab \times cd \times \sin cMb$; want omdat $EF = M$, $ab = cd = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}M$, $\sin cMb = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ is, hebben wij dan terstond $M \times GH = \frac{2}{3}M^2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}M^2\sqrt{3}$, en dus $GH = \frac{1}{3}M\sqrt{3}$.

Uit de gevondene waarden volgt nog terstond

$$EF : ab : GH = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1,$$

voor de verhouding tusschen de groote as, de isometrische middellijn en de kleine as der ellips.

De perspectief van de as van den cirkel, moet blijkbaar door het punt M gaan en evenwijdig met AL zijn; die perspectief NN valt dus langs de kleine as der ellips.

Van een horizontalen cirkel, en van een cirkel die evenwijdig met het linkervlak is, wordt de perspectief op gelijke wijze geconstrueerd. Tot opheldering hebben wij in Fig. 208 nog de perspectieven aangewezen van drie cirkels, beschreven in de zijvlakken van een cubus, die zóó geplaatst is; dat deze zijvlakken evenwijdig met de isometrische vlakken zijn.

§ 330. Om een gewonen cilinder of afgeknotten kegel, wiens as eene isometrische lijn is, in perspectief te brengen, behoeft men slechts de elliptische perspectieven van grond- en bovenvlak volgens de voorgaande § te construeren, en aan deze beide ellipsen twee gemeenschappelijke raaklijnen te trekken. Is de kegel niet afgeknót, dan trekt men, uit de perspectief van zijn top, raaklijnen aan de perspectief van zijn grondvlak.

§ 331. Het aangevoerde zal genoegzaam zijn, om de gronden en het gebruik der isometrische perspectief te doen kennen. Men zal er uit ontwaard hebben, dat hare regels gemakkelijker te volgen zijn dan die van de gewone perspectief, en dat zij vooral geschikt is, tot eene duidelijke voorstelling van zulke voorwerpen, waarin de af te beelden lijnen en cirkels meerendeels evenwijdig met drie onderling regthoekige lijnen en vlakken zijn. Bovendien heeft zij het voordeel, dat zij bijna onmiddellijk de ware afmetingen der afgebeelde voorwerpen doet kennen.

Uit dien hoofde is zij van een onmiskenbaar nut, en wordt zij ook, vooral in Engeland, veelvuldig aangewend, tot het voor-

stellen van allerlei werktuigen en modellen; waarbij het meer aankomt, op eene duidelijke aanwijzing van het verband der deelen en van hunne onderlinge werking, dan wel op de bevalligheid en levendigheid van voorstelling, die men door de gewone perspectief verkrijgt.

OVER DE SCHADUWEN.

§ 332. Ten einde de voorstelling van lichamen door hunne projectiën, beter te doen uitkomen, doet men die voorstelling dikwijls gepaard gaan met eene aanwijzing van de deelen der lichamen, die uit eene aangenomene lichtbron niet verlicht worden, en van de deelen der projectievlakken of andere oppervlakken, die zij door hunne aanwezigheid van licht berooven; in de onderstelling namelijk dat zij ondoorschijnend zijn. Deze niet verlichte en van licht beroofde deelen noemt men *schaduwen*.

Het deel van het oppervlak eens lichaams, dat niet verlicht wordt omdat het van de lichtbron afgewend is, noemt men de *zijtschaduw* of *eigene schaduw* van het ligchaam, terwijl de lijn van afscheiding, tusschen het al en niet verlichte deel, den naam van *schaduwlijn* draagt. Het door eenig ligchaam van licht beroofde deel van andere oppervlakken, noemt men de *slagschaduw*, door het ligchaam op die andere oppervlakken geworpen. Met het enkele woord *schaduw* bedoelt men gewoonlijk bij uitsluiting eene slagschaduw.

Wat deze schaduwen betreft, behoort alleen de constructie van haren omtrek tot het gebied der beschrijvende meetkunst. Het wederom tot de luchtperspectief behoorende onderzoek naar de zwaarte der tinten, die men aan de verschillende deelen eener schaduw geven moet, zal dus geen onderwerp onzer beschouwingen uitmaken.

§ 333. Het licht verspreidt zich in eene gelijkslachtige middenstof, die hier steeds ondersteld wordt, volgens rechte lijnen en naar alle zijden. Indien dus de lichtbron een bepaald lichtgevend punt is, worden al de lichtstralen, die op eenig ligchaam vallen, begrensd door het oppervlak van eene piramide of van eenen kegel, die uit de lichtbron als top het ligchaam volgens de scha-

duwlijn omhult. Dit verlengde omhullingsoppervlak omvat dan, aan de zijde des ligchaams die van de lichtbron afgewend is, het geheele deel der ruimte, dat door de aanwezigheid des ligchaams van licht beroofd wordt, en uit dien hoofde den naam van *schaduwkegel* draagt. De doorsnede van dezen schaduwkegel met eenig plat vlak of gebogen oppervlak, is dus de slagschaduw, door het ligchaam op dat oppervlak geworpen.

Gewoonlijk neemt men echter aan, dat de lichtbron oneindig ver van de schaduwgevende lichamen verwijderd is; de lichtstralen worden dan evenwijdige lijnen, waardoor de straks genoemde piramide of kegel in een prisma of cilinder overgaat, en dus ook het van licht beroofde deel der ruimte den naam van *schaduwcilinder* verkrijgt. De slagschaduw op eenig oppervlak, is dan zijne doorsnede met dien schaduwcilinder.

Door het enkele woord *schaduw* verstaat men somtijds ook den zoo even genoemden schaduwkegel of schaduwcilinder. Zoo zegt men b. v. dat een ligchaam in de schaduw van een ander ligchaam komt, zoodra het binnen den schaduwkegel treedt, die door dat andere ligchaam ontstaat.

Uit het aangevoerde ziet men, dat het bepalen van schaduwen in het algemeen nederkomt op het construeren van omhullingskegels en cilinders, en van hunne doorsneden met platte en gebogene vlakken. Komen de lichtstralen uit een bepaald punt voort, zoo geven zij aanleiding tot den omhullingskegel; en deze gaat in eene piramide over, als de schaduwlijn uit regte lijnen is zamengesteld. Zijn de lichtstralen onderling evenwijdig, zoo vormen zij den omhullingscilinder, die, bij eene regtlijnige zamenvestelling der schaduwlijn, in een prisma overgaat. Gewoonlijk worden de schaduwen in het eerste geval die van *kaarslicht*, in het laatste geval die van *zonlicht* genoemd. Wegens den grooten afstand van de zon tot de aarde, wijken de zonnestralen, die eenig aardsch voorwerp beschijnen, werkelijk te weinig van de evenwijdigheid af, dan dat die afwijking in eene teekening merkbaar zou worden.

§ 334. Bij meetkunstige teekeningen, neemt men alleen zonlicht in aanmerking. Om dus in eenige projectie schaduwen aan te brengen, gebruikt men steeds onderling evenwijdige lichtstralen, die onder eene zekere helling naar het projectievlak heen moeten loopen. Dikwijls neemt men voor deze helling eenen hoek van 45° ,

waardoor, zooals later blijken zal, de constructie van op het projectievlak vallende slagschaduwen merkkelijk vereenvoudigd wordt. Overigens neemt men de rigting van het licht zoodanig, dat de schaduwen dáár vallen, waar zij het geschiktst zijn om de projectiën goed te doen uitkomen.

Om door dezelfde lichtstralen zoowel verticale als horizontale projectiën te schaduwen, moet het licht, onder gelijke of verschillende hellingen, naar de beide projectievlakken heen loopen. Die hellingen kunnen dan echter niet wel, voor elk der beide projectievlakken, hoeken van 45° zijn; want eene lijn, die zoowel met het verticale als met het horizontale vlak eenen hoek van 45° maakt, kruist de as rechthoekig, en eene dergelijke rigting van het licht is niet te verkiezen. Men kan echter de rigting van het licht zóó nemen, dat de horizontale en verticale projectiën der lichtstralen beide, hoeken van 45° met de as maken; die rigting wordt dan aangewezen door den diagonaal van een cubus, wiens zijvlakken evenwijdig met de projectievlakken zijn; zij brengt, bij het construeren van slagschaduwen, almede eenig gemak aan.

Somtijds gebruikt men tot het schaduwen der verticale projectiën andere lichtstralen, dan men tot het schaduwen der horizontale projectiën gebezigd heeft. Wil men alleen in horizontale projectiën schaduwen aanbrengen, dan is het niet noodig dat het licht naar het verticale vlak heen loopt; men kan dan aannemen, dat de lichtstralen evenwijdig met het verticale vlak zijn, of zelfs dat het licht zich van het verticale vlak afwaarts beweegt.

Bij het construeren van schaduwen wordt in elk geval de rigting van het licht beschouwd als gegeven te zijn: hetzij door de horizontale projectie van een der onderling evenwijdige lichtstralen, benevens zijn hellingshoek met het horizontale vlak; hetzij door de beide projectiën van een dier stralen. Op deze projectiën, die men op de gewone wijze door enkele en dubbele accenten van elkander onderscheidt, wordt dan nog meestal, zooals in de Figuren 209 tot 219, door een pijltje aangewezen, naar welken kant heen het licht zich beweegt. Ongeacht de helling, die men overigens aan de stralen geeft, is het gewone gebruik, dat men in de teekeningen het licht van de linker- naar de rechterzijde laat voortgaan.

§ 335. Trekt men uit een gegeven punt eene lijn, die in de

rigting van het licht voortgaat, dan is het snijpunt van deze lijn met eenig oppervlak, de schaduw van het gegeven punt op dat oppervlak; en de aaneenschakeling van de schaduwen der punten, die tot eene gegevene rechte of kromme lijn behooren, is de schaduw dier rechte of kromme lijn.

De schaduwen van rechte of kromme lijnen hebben in het algemeen de volgende eigenschappen:

De schaduw door eene rechte of kromme lijn op een gebogen vlak, en door eene kromme lijn op een plat vlak geworpen, is kromlijinig.

De schaduw van eene rechte lijn op een plat vlak is echter regtlijinig, en wordt dus, door de schaduwen van twee punten der lijn, volkomen bepaald. Heeft de rechte lijn eene bepaalde lengte, dan zijn de schaduwen van hare uiteinden ook de uiteinden van hare schaduw. Is zij evenwijdig met het vlak, dan is ook hare schaduw evenwijdig met de lijn zelve.

Het ontmoetingspunt van eene lijn met een vlak, is een punt van de schaduw, door deze lijn op dat vlak geworpen.

De schaduwen, door eene rechte lijn op onderling evenwijdige platte vlakken geworpen, zijn evenwijdig.

De schaduwen, door evenwijdige lijnen op een plat vlak of op evenwijdige vlakken geworpen, zijn insgelijks evenwijdige lijnen.

De schaduw eener vlakke figuur, op een vlak dat met haar vlak evenwijdig is, is gelijk en gelijkvormig met die figuur zelve.

Na al het tot dusver voorgedragene zal het wel onnoodig zijn dit een en ander nader toe te lichten, of ook de bestaande uitzonderingen op de genoemde algemeene eigenschappen aan te wijzen, die toelaten: dat eene kromme lijn eene rechte lijn tot schaduw kan hebben, dat de schaduw eener rechte lijn een enkel punt kan zijn, dat de schaduwen van evenwijdige lijnen elkander bedekken, enz.

§ 336. Heeft men de slagschaduw van een veelvlakkig ligchaam op een plat vlak te bepalen, zoo kan men meestal dadelijk de ribben onderkennen, die schaduw werpen en dus tot de schaduwlijn van het ligchaam behooren. Mogt men hieromtrent onzeker zijn, dan is het klaar, dat eene constructie van de schaduwen van al de hoekpunten des ligchaams, onmiddellijk de uiterste rechte lijnen leert vinden, die de begeerde slagschaduw begrenzen; deze uiterste rechte lijnen, die te zamen de schaduw der schaduw-

lijn uitmaken, wijzen dan blijkbaar de schaduwwerpende ribben aan.

§ 337. Er blijft ons thans nog slechts over, door het behandelen van een aantal werkstukken te doen zien, hoe men de aangewezen gronden, tot het construeren van schaduwen, in toepassing brengt. Alvorens hiertoe over te gaan, merken wij nog op, dat de schaduwen in het algemeen slechts door hare projectiën worden aangewezen; zoodat eene aanwijzing der schaduwen zelve slechts verkregen wordt, ten aanzien van slagschaduwen op de projectievlakken geworpen.

§ 338. WERKSTUK. *De schaduw te construeren, die door eene gewone rechte lijn op de projectievlakken wordt geworpen.*

Laat *vooreerst* de gegevene lijn zoodanig zijn, dat zij (Fig. 209) een punt A van het horizontale met een punt B van het verticale vlak vereenigt, en dat dus AB' en A''B hare projectiën zijn, zoo weten wij reeds dadelijk dat A een punt van hare schaduw op het horizontale, B een punt van hare schaduw op het verticale vlak is. Nemen wij nu in de lijn een willekeurig punt (P', P'') aan, en bepalen wij het punt C, waar het horizontale vlak ontmoet wordt door eene lijn, uit (P', P'') evenwijdig met de gegevene rigting des lichts getrokken, dan is C de schaduw van (P', P'') op het horizontale vlak. Trekken wij dus uit A door C eene lijn, die de as in D ontmoet, dan is AD de begeerde schaduw, voor zoover zij op het horizontale vlak valt. De lichtstraal die het punt D dezer schaduw voortbrengt, treft in D zoowel het verticale als het horizontale vlak; eene lijn van B naar D getrokken is dus de begeerde schaduw voor zoover die op het verticale vlak valt. Derhalve is dan ACDB de gevraagde schaduw.

Door DQ' evenwijdig met CP' te trekken, vinden wij in de gegevene lijn het punt (Q', Q''), welks schaduw D op ieder der projectievlakken juist in de as valt. Het punt, waar het verticale vlak door de verlengde lijn (P'C, P''C'') ontmoet zou worden, moet blijkbaar in het verlengde van BD vallen, en kan dus almede tot de schaduwbepaling dienen. Evenzoo zou het ontmoetingspunt C een punt van het verlengde van AD geweest zijn, indien het punt (P', P'') tusschen (Q', Q'') en (B', B) ware genomen geworden.

Laat *ten tweede* de gegevene lijn eene lijn van bepaalde lengte

zijn, die in eenig punt loodregt op het horizontale vlak staat, zoodat (A', aA'') die lijn voorstelt (Fig. 210); en laat thans de rigting des lichts eenen hoek van 45° met het horizontale vlak maken, terwijl verder alleen de horizontale projectie van die rigting gegeven is. Trekken wij nu uit A' eene lijn, evenwijdig met de horizontale projectie van de rigting des lichts, en maken wij deze lijn $A'B$ zoo lang als aA'' , dan is B de schaduw, die het top-punt (A', A'') der gegeven lijn op het horizontale vlak zou hebben, indien dit punt B niet achter het verticale vlak viel; want uit $A'B = aA''$ volgt, dat eene lijn, uit (A', A'') naar (B, B'') getrokken, het horizontale vlak in B onder een hoek van 45° ontmoet. Daar in onze figuur het punt B achter het verticale vlak valt, behoort alleen het vóór dat vlak liggende deel van $A'B$, dat is $A'C$, tot de begeerde schaduw. Stellen wij verder in C eene loodlijn op de as, en maken wij die loodlijn CD gelijk aan CB , dan is D het snijpunt van de lijn ($A'B, A''B''$) met het verticale vlak, en bijgevolg is CD de op het verticale vlak vallende schaduw van een deel der gegeven lijn. Derhalve is ACD de gevraagde schaduw.

Uit het laatste voorbeeld ziet men, welk gemak het aanbrengt, de lichtstralen onder 45° op het horizontale vlak te doen invallen. Hierdoor toch komt de schaduw van eenig punt op het horizontale vlak, even ver achter zijne horizontale projectie, als het punt zelf boven het horizontale vlak ligt.

§ 339. WERKSTUK. *De slagschaduw op het horizontale vlak te construeren van een regthoekig parallelipedum, dat op het horizontale vlak ligt, en waarvan twee zijvlakken evenwijdig met het verticale vlak zijn.*

Zij $A'B'C'D'$ de horizontale, $A''B''F''E''$ de verticale projectie van het parallelipedum (Fig. 211), en laten de projectiën van de rigting des lichts hoeken van 45° met de as maken. Uit de figuur blijkt nu terstond dat de opstaande ribben ($D', A''E''$) en ($B', B''F''$), alsmede de zijden ($D'C', E''F''$) en ($B'C', F''$) des bovenvlak, de schaduwwerpende ribben zijn. Indien wij dus uit de hoekpunten (D', E''), (B', F'') en (C', F'') lijnen evenwijdig met de rigting des lichts trekken, en daarna de punten h, f en g bepalen, waar deze lijnen het horizontale vlak ontmoeten, vinden wij hierdoor terstond den omtrek $D'C'B'fgD'$ der begeerde slagschaduw.

Daar, volgens de in § 335 genoemde eigenschappen, fg met $B'C'$,

en gh met $C'D'$ evenwijdig is, zou men slechts één der drie punten f , g en h behoeven te construeren, indien ook dit niet, wegens de hier aangenomene rigting des lichts, onnoodig werd. Daar namelijk de reghoekige driehoeken $C'ig$ en $F'B''g''$ hoeken van 45° hebben, zijn zij gelijkbeenig, en dus is $C'i = ig = B''g'' = B''F''$. Trekt men dus, op eenen afstand die gelijk aan de hoogte des parallelopipedums is, lijnen evenwijdig met $B'C'$ en $C'D'$, alsmede uit B' en D' lijnen evenwijdig met de horizontale projectie van de rigting des lichts, dan verkrijgt men dadelijk den omtrek der schaduw. Hieruit ziet men, dat de thans aangenome rigting van het licht, alsmede eenig gemak kan aanbrengen.

Opdat de slagschaduw geheel op het horizontale vlak zou vallen, hebben wij het parallelopipedum ver genoeg vóór het verticale vlak moeten plaatsen. Zonder deze voorzorg bereikt men hetzelfde doel, indien men, zooals in het volgende werkstuk, aanneemt dat het licht zich van het verticale vlak afwaarts beweegt.

§ 340. WERKSTUK. *Midden op een parallelopipedum met vierkant grondvlak, dat op het horizontale vlak ligt, staat een gewone cilinder; men begeert de schaduw te construeren door deze lichamen op het horizontale vlak, en door den cilinder op het bovenvlak van het parallelopipedum geworpen.*

Na deze lichamen door hunne projectiën voorgesteld te hebben (Fig. 212), zullen wij hier, even als in Fig. 210, de lichtstralen onder 45° op het horizontale vlak laten vallen, en hunne rigting verder door hare horizontale projectie bepalen; maar nu zoodanig, dat het licht zich van het verticale vlak afwaarts beweegt. Trekken wij uit A en B , in de gegevene rigting, lijnen Aa en Bb gelijk aan nN'' , daarna uit a en b lijnen evenwijdig met AC en BC , zoo verkrijgen wij dadelijk de schaduw $AacbBCA$ van het parallelopipedum. Trekken wij verder uit M' , in de gegevene rigting eene lijn $M'm = nM''$, en beschrijven wij uit m met den straal des cilinders eenen cirkel, dan is die cirkel de schaduw van het bovenvlak des cilinders op het horizontale vlak; raaklijnen pp' en qq' aan dezen cirkel en de horizontale projectie des cilinders getrokken, begrenzen dan verder de schaduw door den cilinder op het horizontale vlak en op het bovenvlak van het parallelopipedum geworpen.

Eene lijn, uit p' reghoekig door de as getrokken, wijst op de verticale projectie des cilinders de afscheiding tusschen het al en

niet verlichte deel zijns oppervlaks aan, terwijl de verticale projectie van het parallelopipedum blijkbaar niet verlicht wordt.

§ 341 WERKSTUK. *De schaduw eener veelhoekige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, te construeren; aannemende dat die schaduw ten deele op het horizontale vlak en ten deele op een achter het ligchaam geplaatst hellend vlak valt.*

Zij ($T'A'B'C'D'E'$, $T''A''B''C''D''E''$) de bedoelde piramide (Fig. 213) en ($F, FF_{,,}$) het daar achter geplaatste hellend vlak. Trekken wij uit den top (T' , T'') eene lijn ($T'S'$, $T''S''$) evenwijdig met de rigting des lichts, die hier naar welgevallen genomen is, dan zou het ontmoetingspunt S' , van de lijn ($T'S'$, $T''S''$) met het horizontale vlak, de schaduw van den top op dat vlak zijn, indien de lichtstraal uit (T' , T'') niet reeds door het vlak ($F, FF_{,,}$) was opgevangen. De uiterste lijnen $S'B'$ en $S'D'$, die wij uit S' naar de hoekpunten van het grondvlak der piramide trekken kunnen, wijzen dus ($T'B'$, $T''B''$) en ($T'D'$, $T''D''$) als schaduwwerpende ribben aan; terwijl van deze lijnen slechts de deelen $B'b$ en $D'd$, tusschen het grondvlak en den doorgang FF , begrepen, alsmede het deel bd van dien doorgang, de schaduw $B'C'D'dbB'$ begrenzen, die door de piramide op het horizontale vlak geworpen wordt.

Construeren wij verder, door middel van het verticaal-projecterend vlak ($T''S''S_{,,}$), het snijpunt (t' , t'') van de lijn ($T'S'$, $T''S''$) met het vlak ($F, FF_{,,}$), dan is dit snijpunt de schaduw van den top der piramide op het laatstgenoemde vlak; door dus $t'd$ en $t'b$ te trekken, verkrijgen wij den driehoek $t'bd$ als schaduw der piramide op het vlak ($F, FF_{,,}$); en deze schaduw, hoezeer door hare horizontale projectie aangewezen, is nu op het vlak ($F, FF_{,,}$) zelf zichtbaar. Door dd'' en bb'' loodregt op de as te trekken, vinden wij den driehoek $t''b''d''$ als verticale projectie der laatstgenoemde schaduw; deze is echter wat de projectie $t''d''b''$ betreft onzichtbaar, omdat de punten d'' en b'' niet in, maar achter het vlak ($F, FF_{,,}$) gelegen zijn.

Verder is het nu duidelijk: dat ($T'B'C'$, $T''B''C''$) en ($T'C'D'$, $T''C''D''$) de eenige opstaande zijvlakken zijn, die niet verlicht worden; dat van deze niet verlichte zijvlakken alleen het eerstgenoemde in de verticale projectie zichtbaar is, maar dat zij in de horizontale projectie beide zichtbaar zijn.

Het verdient opmerking, dat het zijvlak ($T'A'B'$, $T''A''B''$) verlicht wordt, daar men al ligt zou kunnen vermoeden dat eene

lijn, uit A' evenwijdig met de horizontale projectie van de rigting des lichts getrokken, juist het tegendeel aanwees. Dit vermoeden is echter ongegrond, want de genoemde lijn uit A' getrokken, toont wel aan dat een vlak, volgens $A'B'$ loodregt op het horizontale gesteld, niet verlicht wordt, maar het genoemde zijvlak der piramide helt achterover, en ontvangt uit dien hoofde het licht, dat dit zijvlak zoo het verticaal stond niet zou kunnen ontvangen.

§ 342. WERKSTUK. *Een regthoekig prisma, dat met zijn grondvlak op het horizontale, - en met een zijner opstaande zijvlakken tegen het verticale vlak staat, wordt overdekt door een regthoekig parallelipedum, dat almede tegen het verticale vlak aansluit. Men begeert de schaduwen dezer lichamen te construeren.*

Laten $A'A''$, (B', bB'') , (C', cC'') en $D'D''$ de opstaande ribben zijn (Fig. 214) van het bedoelde prisma, dat het trapezium $A'B'C'D'$, met $A'D'$ en $B'C'$ als evenwijdige zijden, tot grondvlak heeft, en door het parallelipedum $(E'F'I'K', E''F''G''H'')$ overdekt wordt, weshalve zijn grondvlak $A'B'C'D'$ onzichtbaar is. Indien dan het licht de in onze figuur aangewezen rigting heeft, vinden wij volgens § 338 de schaduw $C'ml$ door de ribbe (C', cC'') op de projectievlakken geworpen. Hieruit volgt: dat de driehoek $C'D'm$, waarvan slechts een klein gedeelte bij m zichtbaar is, de schaduw van het prisma op het horizontale vlak is; dat het prisma, op het verticale vlak, van $D'D''$ tot ml schaduw werpt; alsmede dat het zijvlak $(C'D', cD'D''C'')$ van het prisma niet verlicht wordt, en dat bijgevolg op dat zijvlak door het parallelipedum geene schaduw kan geworpen worden. Zoo wij voorts evenwijdig met de rigting des lichts, door de punten (F', F'') en (F', G'') lijnen trekken, hare ontmoetingspunten f en g met het verticale vlak bepalen, daarna G'' met g en g met f vereenigen, en ook nog fn evenwijdig met $F'E''$ trekken, vinden wij dat op het verticale vlak $G''g$ de schaduw van de ribbe $(I'F', G'')$, fg de schaduw van de ribbe $(F', F'G'')$, en fn de schaduw van een deel van de ribbe $(E'F', E''F'')$ des parallelipedums is. Alzoo is dan $D'D''F''G''gfnmD'$ de omtrek der schaduw, door de beide lichamen ter regterzijde op het verticale vlak geworpen.

Door $C'm$ tot in Q' te verlengen, en $B'P'$ evenwijdig met $C'Q'$ te trekken, vinden wij in de ribbe $(E'F', E''F'')$ de punten (P', P'') en (Q', Q'') , wier schaduwen p en q op het voorvlak des prisma's juist

in de opstaande ribben (B', bB'') en (C', cC'') vallen; zoo wij dus ook nog het punt (s', s'') construeren, waar het zijvlak ($A'B', A'bB''A''$) door een uit (E', E'') getrokken lichtstraal ontmoet wordt, vinden wij dat $s''pq$ de verticale projectie der schaduw is, door ($E'Q', E''Q''$) op het oppervlak des prisma's geworpen; weshalve de reeds gevondene fn de schaduw van ($Q'F', Q''F''$) is, en dus ook het punt n juist in het verlengde van $Q''q$ zal gelegen zijn.

Eindelijk wordt nog door de ribbe ($K'E', E''$) des parallelopipedums schaduw geworpen; deze schaduw valt ten deele op het verticale vlak, en wel langs $E''s''$ tot in r , waar zij op het oppervlak des prisma's overgaat tot in (s', s''). Alzoo is dan de driehoek $E''A''r$ nog een deel der schaduw van het parallelopipedum op het verticale vlak, terwijl $A''C''qps''rA''$ de verticale projectie der geheel zichtbare schaduw van het parallelopipedum op het prisma is.

§ 343. WERKSTUK. *Een concentrisch uitgeholde cilinder, die op het horizontale vlak staat, wordt door een cilinder van gelijken straal overdekt. Door een vlak, evenwijdig met het verticale, is de voorste helft van deze lichamen weggesneden. Men wil de schaduw construeren, die in de uitholling valt.*

Laten (A', aA''), (B', bB''), (C', cC'') en (D', dD'') de in het doelvlak liggende beschrijvende lijnen zijn (Fig. 215), van het uit- en inwendig oppervlak des uitgeholden halven cilinders, die (M', mM'') tot as heeft, en door den halven cilinder ($A'E'C', A''E''C''$) overdekt wordt. Dan is het, bij de aangenomene rigting des lichts, terstond duidelijk, dat de begeerde schaduw begrensd wordt door de schaduwen, die de ribben (B', bB'') en ($B'D', B''D''$) in de uitholling werpen, en waarvan de eerste eene verticale regte lijn, de laatste eene kromme lijn zal zijn. Door dus uit (B', B'') en uit willekeurige punten in ($B'D', B''D''$) aangenomen, b. v. uit (P', P''), lijnen evenwijdig met de rigting des lichts te trekken, en hare ontmoetingspunten (b', b''), (p', p'') met het oppervlak der uitholling te construeren, vinden wij terstond de verticale lijn $b''m$ en de kromme lijn $b''p''D''$, als den omtrek der begeerde en op het verticale vlak zichtbare schaduw. De schaduw op het horizontale vlak, door den boog $B'b'$ en zijne koorde ingesloten, is wegens den overdekkenden cilinder onzichtbaar.

Wij hebben hier de projectiën van de rigting des lichts hoeken van 45° met de as laten maken; ten gevolge daarvan viel voor-

eerst de schaduw $b''m$ langs de verticale projectie van de as des cilinders; ten andere werd niet alleen $M''b'' = M''D''$, maar ook $P''p'' = P'p'$ en dus $M''p'' = M'p'$, zoodat wij voor de kromme lijn $b''p''D''$ een cirkelkwadrant verkregen, uit M'' met den straal der uitholling beschreven. Hieruit blijkt weder een voordeel, dat deze rigting des lichts opleveren kan.

§ 344. WERKSTUK. *Op het horizontale vlak staat een gewone cilinder, en midden op dien cilinder een gewone kegel, die een op het horizontale vlak liggend regthoekig parallelopipedum ten deele van licht berooft. Men wil de schaduwen dezer lichamen construeren.*

De bedoelde lichamen zijn in Fig. 216 voorgesteld, waar $(M', m''M'')$ de as van den cilinder, en (M', T'') de top van den kegel verbeeldt, terwijl $A'B'C'D'$ het grondvlak en $a''A''$ de hoogte van het parallelopipedum is. Voorts is (L', L'') de gegevene rigting des lichts.

Door nu vooreerst uit de hoekpunten van het grondvlak $A'B'C'D'$ lijnen evenwijdig met L' te trekken, zien wij terstond dat van het parallelopipedum de opstaande zijvlakken $(A'B', a''B'')$ en $(B'C', b''C'')$, waarvan in de verticale projectie slechts het laatstgenoemde zichtbaar is, niet verlicht worden; en dat alzoo $(A', a''A'')$ en $(C', c''C'')$ de opstaande ribben zijn, die schaduw werpen. Trekken wij dus uit (A', A'') eene lijn evenwijdig met (L', L'') en bepalen wij haar ontmoetingspunt a met het horizontale vlak, dan hebben wij nog slechts ab en bc evenwijdig met $A'B'$ en $B'C'$ te trekken, om de schaduw $A'abcC'B'A'$ van het parallelopipedum op het horizontale vlak te bekomen.

Bepalen wij verder het punt m , waar het horizontale vlak ontmoet wordt door eene lijn, uit het middelpunt (M', M'') van het bovenvlak des cilinders evenwijdig met (L', L'') getrokken; beschrijven wij uit m , met den straal $M'P'$ van den cilinder, eenen cirkel, en trekken wij aan dien cirkel raaklijnen pp' en qq' evenwijdig met L' , die ook de horizontale projectie van den cilinder in p' en q' zullen raken, dan verkrijgen wij de schaduw $p'P'q'qpp'$, door den cilinder op het horizontale vlak geworpen. En eene lijn, uit p' regthoekig door de as van projectie getrokken, wijst in de verticale projectie van den cilinder het deel $p''P''$ aan, dat niet verlicht wordt.

Trekken wij nu nog uit den top (M', T'') des kegels eene lijn evenwijdig met (L', L'') , zoo vinden wij, dat deze lijn het hori-

zontale vlak in t , het verlengde bovenvlak van den cilinder in (t_1', t_1'') , en het verlengde bovenvlak van het parallelipedum in (t_2', t_2'') ontmoet.

Nadat wij dus den horizontalen doorgang van het oppervlak des kegels, namelijk den cirkel uv , bepaald en daaraan uit t raaklijnen tu en tv getrokken hebben, zal het tusschen dien cirkel en deze raaklijnen begrepene deel van het horizontale vlak, voor zoover het niet door de projectiën of schaduwen van cilinder en parallelipedum wordt ingenomen, de schaduw zijn door den kegel op het horizontale vlak geworpen.

Evenzoo zullen raaklijnen $t_1'r'$, $t_1's'$, uit t_1' aan de horizontale projectie van den kegel getrokken, de horizontale projectie begrenzen van de schaduw des kegels op het bovenvlak van den cilinder. Stralen $M'r'$ en $M's'$ naar de raakpunten r' en s' getrokken, wijzen in de horizontale projectie van den kegel zijne eigene of zijschaduw aan; terwijl weder eene lijn, uit r' regthoekig door de as van projectie getrokken, in de verticale projectie van den kegel de lijn $T'r''$ aanwijst, als afscheiding tusschen de al en niet verlichte zichtbare deelen des oppervlaks.

De raaklijnen $t_1'r'$ en tu zijn evenwijdig, als schaduwen door dezelfde lijn ($M'r'$, $T'r''$) op evenwijdige vlakken geworpen; evenzoo zijn $t_1's'$ en tv evenwijdig. Hieruit ziet men, dat wij slechts uit t_2' lijnen evenwijdig met de genoemde raaklijnen behoeven te trekken, om de horizontale projectie $e'h'k'f'$ der schaduw te bekomen, door den kegel op het bovenvlak van het parallelipedum geworpen.

Eindelijk werpt de kegel op het zijvlak ($C'D'$, $c''D''$) nog eene schaduw, die in de verticale projectie zichtbaar is, en blijkbaar gevonden wordt door de verticale projectiën te bepalen van de punten, die in de ribben ($C'D'$, $c''d''$) en ($C'D'$, $C''D''$) respectievelijk g' en h' , alsmede i' en k' tot horizontale projectiën hebben. Alzoo is dan $g''h''k''i''$ het in de verticale projectie niet verlichte deel van het zijvlak ($C'D'$, $c''D''$) des parallelipedums.

§ 345. WERKSTUK. *De schaduwen te construeren van een bol, die op het horizontale vlak ligt.*

Laat (M' , M'') het middelpunt van den bedoelden bol en (L' , L'') de rigting des lichts zijn (Fig. 217), dan kunnen wij gemakshalve een nieuw verticaal vlak aannemen, zoodanig dat de nieuwe as O, X , evenwijdig met L' loopt. Hierdoor verkrijgen wij den uit

M_1'' beschreven grooten cirkel, als nieuwe verticale projectie van den bol; terwijl wij, door het horizontaal-projecterend vlak van (L', L'') neer te slaan, de rigting L vinden, van de projectiën der lichtstralen op het nieuwe verticale vlak.

Snijden wij nu den bol door een vlak (V, V_1) evenwijdig met het nieuwe verticale, dan is op dit laatste een cirkel, uit M_1'' met $mn = \frac{1}{2}nn$ beschreven, de projectie der doorsnede; trekken wij voorts aan dien cirkel eene raaklijn $S_1''S_1''$ evenwijdig met L , dan zijn V, V_1 en $S_1''S_1''$ de projectiën van een lichtstraal die het horizontale vlak in S ontmoet, en den bol in het punt (R', R_1'') raakt, waarvan de projectie R'' op het oorspronkelijke verticale vlak gevonden wordt door $rR'' = r_1R_1''$ te nemen. Alzoo is dan (R', R'') een punt van de schaduwlijn op het oppervlak van den bol, en S een punt van den omtrek der schaduw door den bol op het horizontale vlak geworpen.

Hadden wij door het snijdende vlak (V, V_1) een punt S gevonden dat boven OX viel, dan zou de geconstrueerde lichtstraal, vóór dat hij het horizontale vlak ontmoette, het verticale vlak treffen in een punt, dat dan tot den omtrek van een op het verticale vlak geworpen deel der slagschaduw zou behooren. Dit kan in onze figuur het geval zijn. Snijden wij b. v. den bol door het vlak (U, U_1) , hier gemakshalve zoo genomen dat de reeds uit M_1'' beschreven kleine cirkel weder de nieuwe verticale projectie der doorsnede werd, dan zijn U, U_1 en $S_1''S_1''$ de projectiën van een lichtstraal, die den bol raakt en het horizontale vlak achter OX ontmoet. Het snijpunt p' , van U, U_1 met OX , wijst dan in dien lichtstraal een punt (p', P_1'') aan, dat tevens in het oorspronkelijke verticale vlak ligt en dus gevonden wordt door $p'P = p_1P_1''$ loodregt op OX te stellen. Het gevondene punt P behoort dan tot den omtrek der schaduw, door den bol op het verticale vlak geworpen.

Door nu een toereikend aantal snijdende vlakken zooals (V, V_1) en (U, U_1) te bezigen, zal men ook een genoegzaam aantal punten even als (R', R'') , S en P kunnen construeren, ten einde door die geconstrueerde punten de kromme lijnen te kunnen trekken, die de begeerde schaduwen begrenzen.

Deze kromme lijnen zijn echter ellipsen, wier assen volgens voorgaande werkstukken dadelijk kunnen gevonden worden. Trekken

wij namelijk raaklijnen aan den op het nieuwe verticale vlak voorkomenden grooten cirkel des bols, en bepalen wij niet alleen hare ontmoetingspunten A en B met het horizontale vlak, maar ook de horizontale projectiën a en b der raakpunten, dan is AB de groote as der slagschaduw op het horizontale vlak, en ab de kleine as van de horizontale projectie der schaduwlijn. In het middelpunt M der eerste ellips, wordt het horizontale vlak ontmoet door eene lijn uit (M', M'') evenwijdig met de rigting des lichts getrokken, en hare kleine as CD is gelijk aan de middellijn van den bol. Van de andere ellips, wier middelpunt in M' valt, is de groote as cd gelijk aan die middellijn. Dit alles blijkt uit de werkstukken van § 150 en van § 284, terwijl men door omwisseling der projectievlakken gelijkerwijze de assen der ellipsen op het verticale vlak kan vinden.

Indien het licht onder 45° op het horizontale vlak viel, zou M' het brandpunt der ellips ABCD zijn.

§ 346. WERKSTUK. *Een concentrisch uitgeholde halve bol rust met de bolle zijde op het horizontale vlak, zoodat ook het deelvlak horizontaal is. Men wil de schaduw construeren, door dit ligchaam op het horizontale vlak en in zijne uitholling geworpen.*

Zij (M', M'') het middelpunt (Fig. 218) van den uitgeholden halven bol, in den opgegeven stand geplaatst; en nemen wij gemakshalve de rigting (L', L'') des lichts evenwijdig met het verticale vlak, hetgeen hier tot bekoming der gevraagde schaduwen blijkbaar voldoende is. Snijden wij nu het ligchaam door een vlak (V, V,) evenwijdig met het verticale, dan zijn halve cirkels uit M'', met $M''n'' = mn' = \frac{1}{2}n'n'$ en met $M''p'' = mp' = \frac{1}{2}p'p'$ beschreven, de verticale projectiën van de uitwendige en inwendige doorsneden.

Trekken wij in de eerste plaats aan den halven cirkel M''n'', die tot de uitwendige doorsnede behoort, eene raaklijn $i''i''$ evenwijdig met L'', dan zijn V, V, en $i''i''$ de projectiën van een lichtstraal, die den bol raakt, en door zijn ontmoetingspunt i met het horizontale vlak een punt van den omtrek der op dat vlak vallende slagschaduw bepaalt, welk punt hier echter onzichtbaar is. De uiterste standen der lijnen, die men op deze wijze rakende aan den halven bol kan trekken, zijn: aan de eene zijde de lijn ($a'a$, $a''a''$), wier verticale projectie den uitwendigen cirkel M''N'' raakt, en die het horizontale vlak in a ontmoet; aan

de andere zijde de lijnen ($B'b$, $M''b''$) en ($C'c$, $M''b''$), die den bol in de punten (B' , M'') en (C' , M'') raken, en het horizontale vlak in b en c ontmoeten. Eene halve ellips, die bc tot kleine as en a tot top heeft, en slechts zichtbaar is voor zoover zij buiten de projectie van den bol valt, behoort dus tot de slagschaduw van het ligchaam op het horizontale vlak. Deze slagschaduw wordt dan verder voltooid, door uit het punt M , waar een door (M' , M'') getrokken lichtstraal het horizontale vlak ontmoet, met den straal des bols een halven cirkel bdc te beschrijven; want, ter regterzijde van het middelpunt, wordt niet meer door het oppervlak van den bol, maar door den omtrek van het deelvlak schaduw geworpen.

Trekken wij in de tweede plaats, uit het punt p'' van den inwendigen cirkel $M''p''$, eene lijn $p''r''$ evenwijdig met L'' , die dezen cirkel andermaal in r'' ontmoet, dan vinden wij het punt (r' , r'') als het snijpunt van het inwendig oppervlak des ligchaams, met den lichtstraal uit het punt (p' , p'') van den binnenrand des deelvlak getrokken. Het punt r' behoort dus tot den omtrek van de zichtbare horizontale projectie der in de uitholling vallende schaduw. Door nieuwe snijdende vlakken te nemen, kan men van dien omtrek zooveel punten bepalen als men goedvindt, en er vervolgens de kromme lijn door trekken, die de begeerde schaduw begrenst.

Een uiterst punt u' dezer kromme lijn wordt gevonden als men het snijdende vlak door het middelpunt brengt, en derhalve den lichtstraal gebruikt, die uit het punt (P' , P'') van den binnenrand getrokken, het inwendig oppervlak in (u' , u'') ontmoet. Voorts zal men bevinden dat deze kromme lijn eene ellips is, M' tot middelpunt, $M'u'$ tot halve kleine as, en uw tot groote as hebbende.

§ 347. WERKSTUK. *De schaduw te construeren, door den omtrek eener nis in hare binnenoppervlakte geworpen.*

Laat de halve cirkel $A'B'C'$, wiens middellijn $A'B'$ evenwijdig met de as van projectie OX is (Fig. 219), de horizontale projectie zijn van een halven cilinder, die $aA''B''b$ tot verticale projectie heeft; laat voorts het hoogste punt (M' , M'') van de as (M' , mM'') van dien cilinder, tevens het middelpunt zijn van een bol, waarvan een vierde gedeelte begrensd wordt door de beide

halve cirkels ($A'C'B'$, $A''B''$) en ($A'B'$, $A''D''B''$), die respectievelijk evenwijdig met het horizontale en verticale vlak zijn; dan wordt de vereenigde ruimte binnen genoemden halven cilinder en kwart bol begrepen *eene nis* genoemd. De beide verticale lijnen (A' , aA'') (B' , bB'') en de halve cirkelomtrek ($A'B'$, $A''D''B''$) vormen te zamen *den omtrek der nis*, of wel den omtrek van hare opening; dóór deze opening, die uit den regthoek ($A'B'$, $aA''B''b$) en den halven cirkel ($A'B'$, $A''D''B''$) bestaat, is de binnenoppervlakte van de nis, dat is van den halven cilinder en van den kwart bol, geheel zichtbaar.

Zij nu (L' , L'') de gegevene rigting des lights; indien wij dan evenwijdig met L'' eene lijn trekken, die den cirkel $A''D''B''$ in H'' raakt, vinden wij daardoor in den omtrek der nis een punt (H' , H''), dat de al of niet schaduwwerpende deelen van elkander scheidt. Blijkbaar toch kan het deel ($H'B'$, $H''B''b$) van den omtrek der nis, geene schaduw in hare binnenoppervlakte werpen; terwijl integendeel een lichtstraal, die zich langs het deel ($A'H'$, $aA''D''H''$) beweegt, het binnenoppervlak snijden zal in de punten, wier verticale projectiën tot den omtrek der begeerde schaduw behooren.

Van deze punten vallen er drieërlei soort te construeren, namelijk: 1°. voor lichtstralen, die door punten van de verticale lijn (A' , aA'') gaan, en het oppervlak van den halven cilinder snijden; 2°. voor lichtstralen, die door punten van den cirkelboog ($A'D'$, $A''D''$) gaan, en almede het cilinderoppervlak snijden; en 3°. voor lichtstralen, die door punten van den cirkelboog ($D'H'$, $D''H''$) gaan, en het oppervlak van den kwart bol snijden. Hoe het hier voorkomende afscheidingspunt (D' , D'') gevonden wordt, zal later blijken.

Trekken wij door (A' , A'') eene lijn evenwijdig met (L' , L'') en bepalen wij haar ontmoetingspunt (e' , e'') met het cilindervlak, dan verkrijgen wij hierdoor al dadelijk de lijn ee'' , die de verticale projectiën van de punten der 1° soort bevat. Trekken wij, almede door een willekeurig punt (F' , F'') van den boog ($A'D'$, $A''D''$), eene lijn evenwijdig met (L' , L'') en bepalen wij ook haar ontmoetingspunt (f' , f'') met het cilindervlak, dan vinden wij, door dezelfde constructie voor een genoegzaam aantal punten van den boog ($A'D'$, $A''D''$) te verrigten, de kromme lijn $e''f''h''$, die de

verticale projectiën f'' van de punten der 2° soort bevat. Het construeren van de punten der 3° soort vordert nog eene bijzondere handeling.

Wij nemen namelijk een hulpvlak aan, dat evenwijdig met de rigting des lichts is, en loodrecht op het verticale staat; dit hulpvlak, om zijnen met L'' evenwijdigen verticalen doorgang O_1X_1 neergeslagen, bezigen wij als een nieuw projectievlak, en projecteren daarop zoowel den omtrek der nis, als den bol wiens vierdedeel tot de nis behoort. Dit geschiedt door $M''m_1M_1$ reghoekig op O_1X_1 te trekken, en $m_1M_1 = mM'$ te nemen, als wanneer een cirkel uit M_1 met $M'A'$ beschreven de projectie van den bol, en eene lijn M_1N_1 door M_1 evenwijdig met O_1X_1 getrokken de projectie van den omtrek der nis, op het hulpvlak zal zijn. Voorts bepalen wij, door het verticaal-projecterend vlak van (L', L'') op het verticale vlak neer te slaan, de rigting L van de projectiën der lichtstralen op het hulpvlak.

Snijden wij nu het bolvormig deel der nis door een vlak (V'', V''') evenwijdig met het hulpvlak, en digt genoeg bij H'' om niet aan de andere zijde van het nog onbekende punt D'' te komen, dan heeft deze doorsnede eenen cirkel, uit M_1 met $m''n''$ beschreven, tot projectie op het hulpvlak; terwijl het punt (n'', n_1) van den omtrek der nis, in het snijdende vlak ligt. Trekken wij dus uit n_1 eene met L evenwijdige lijn, die den laatstbeschreven cirkel andermaal in g_1 ontmoet, dan vinden wij hierdoor het punt (g'', g_1) als snijpunt van den uit (n'', n_1) getrokken lichtstraal, met het bolvormig binnenoppervlak der nis. Van dit snijpunt kunnen wij dan des verkiezende ook dadelijk de horizontale projectie g' vinden; hiertoe toch behoeven wij slechts op eene lijn, uit g'' reghoekig door OX getrokken, het punt g' even ver van OX te nemen, als g_1 van O_1X_1 verwijderd is. Door deze constructie voor een genoegzaam aantal snijdende vlakken (V'', V''') te verrigten, verkrijgen wij de kromme lijn $H''g''h''$, die de verticale projectiën g'' van de punten der 3° soort bevat, en met de reeds geconstrueerde lijnen ee'' en $e''f''h''$ den omtrek der begeerde schaduw uitmaakt. Door de overeenkomstige punten g' , vinden wij dan tevens de horizontale projectie $H'g'h'$ der op het bolvormig oppervlak liggende kromme lijn, die $H''g''h''$ tot verticale projectie heeft.

Indien wij door het geconstrueerde punt g_1 de lijn M_1k trek-

ken, zullen op deze lijn al de punten g_1 gelegen zijn, die door andere snijdende vlakken (V_{II}, V_{III}) gevonden worden; want al die snijdende vlakken leveren gelijkbeenige driehoeken $M_1 n_1 g_1$ op, waarvan de top in M_1 ligt, de basis evenwijdig met L loopt, en ééne opstaande zijde langs $M_1 N_1$ valt; de andere opstaande zijden van die gelijkbeenige driehoeken, moeten dus ook langs eene en dezelfde lijn $M_1 k$ vallen. De kromme lijn ($H'g'h', H''g''h''$) heeft alzoo op het hulpvlak eene rechte lijn tot projectie; zij is derhalve eene vlakke kromme lijn, wier vlak volgens $M_1 k$ loodregt op het hulpvlak staat, en de lijn ki'' , loodregt op $O_1 X_1$ getrokken, tot verticalen doorgang heeft. Het punt (i', i'') van dien doorgang is niet alleen een punt van het vlak der genoemde kromme lijn, maar ook van het vlak van den cirkel ($A'C'B', A''B''$); evenzoo is het punt (M'', M_1) of (M', M'') een punt dat in die beide vlakken ligt, weshalve huone gemeene doorsnede langs ($M'i', M''i''$) valt. De snijding van $M'i'$ met den boog $B'C'$, leert ons dus een punt (h', h'') vinden, dat zoowel op de binnen oppervlakte der nis als in de beide laatstgenoemde vlakken ligt. Dit punt (h', h'') is bijgevolg een punt der bedoelde kromme lijn, en wel dat punt, waarvan de verticale projectie in $A''B''$ valt; alzoo zal dan ook eene lijn, uit h'' evenwijdig met $O_1 X_1$ getrokken, het vroeger vermelde afscheidingspunt D'' doen kennen.

Daar ($H'g'h', H''g''h''$) eene vlakke kromme lijn is, die op een bolvormig oppervlak ligt, kan zij niet anders dan een cirkelboog zijn, wier projectiën bijgevolg bogen van ellipsen moeten wezen. Van de ellips, waartoe de boog $H''g''h''$ behoort, kan men volgens voorgaande werkstukken onmiddellijk de halve assen $M''H''$ en $M''p''$ bepalen.

Hoezeer $e'f'h'g''H'$ de horizontale projectie is van den omtrek der schaduw in de ruimte, valt op het horizontale vlak blijkbaar geene andere schaduw dan die, welke tusschen den boog $A'e'$ en zijne koorde begrepen is. Die schaduw is echter, als door het bovenste deel der nis overdekt, onzichtbaar.

§ 348. De voorgaande werkstukken zullen toereikend zijn, om te doen zien hoe men zich bij het construeren van schaduwen te gedragen hebbe. Het is klaar, dat men, na zoodanige constructie, zoowel de schaduwen, als de voorwerpen waartoe zij behooren, gelijktijdig met deze in perspectief kan brengen, ten einde zoo-

doende in perspectievische afbeeldingen de noodige schaduwen aan te brengen. Even als wij echter in § 317 de eigenschappen der perspectief dienstbaar maakten, om de perspectief van een bepaald voorwerp uit de gegevene perspectief van eene enkele lijn af te leiden, zijn de eigenschappen der perspectief en der schaduwen voldoende, om ook in de perspectievische teekeningen zelve, uit de afbeelding der voorwerpen hunne schaduwen te kunnen afleiden. Ons bestek gedooft evenwel niet ook nog dit veld in te treden (*) en wij achten dit ook minder noodig, eensdeels omdat de gebruikelijkste schaduwbepalingen zich meestal slechts tot projectiën uitstrekken, anderendeels omdat men toch altijd de perspectievische schaduwen door middel van de geprojecteerde schaduwen kan vinden.

§ 349. Tot het construeren van schaduwen behoort ook nog de *gnomonica*, of de kunst om zonnewijzers te vervaardigen.

Laat namelijk eene regte lijn, evenwijdig met de as der aarde, hetzij door eene dunne stift, hetzij door den scherp kant van eenig ligchaam voorgesteld worden. Verbeeldt men zich nu dat door deze lijn twaalf vlakken gebragt worden, die opvolgend gelijke hoeken met elkander maken, en waarvan er een verticaal staat, zoo zijn deze vlakken de uurvlakken, waarin de zon zich bij hare schijnbare dagelijksche beweging bevindt, telkens wanneer er een of meer volle uren ná den middag verloop en zijn, of vóór den middag nog verloop en moeten.

Construeert men dus de doorsneden van deze uurvlakken met een gegeven plat of gebogen vlak, zoo zijn die doorsneden de regte of kromme lijnen op dat vlak, langs welke de zonneschaduw der stift op de volle uren valt.

Men ziet hieruit dat de *gnomonica*, waarover verschillende omslagtige werken geschreven zijn, niet anders dan de oplossing van een algemeen werkstuk der beschrijvende meetkunst behelst. Hoezeer ons bestek almede niet toelaat over dit onderwerp uit te weiden, willen wij ten slotte in het kort aanwijzen, hoe men voor eene plaats, wier geographische breedte gegeven is, een horizontalen zonnewijzer construeert.

(*) Men vindt eene beknopte behandeling van dit onderwerp in een werkje in 1846 bij BROESE EN COMP. te Breda uitgegeven: *Ocer het bepalen der schaduwen in perspectievische teekeningen*, door den tegenwoordigen luit.-kol. J. C. J. KEMPEES.

§ 350. Laat de in Fig. 220 voorgestelde regthoek een horizontaal bord verbeelden, waarop men eenen zonnewijzer wil vervaardigen, voor eene plaats die op $51^{\circ}30'$ noorderbreedte (*) ligt; dan trekt men vooreerst op dit bord eene lijn NZ, juist in de rigting van het noorden naar het zuiden, en plaatst, in het verticale vlak dat door NZ gaat, een metalen plaatje, dat een regtlijnigen scherpen kant heeft, die bestemd is om schaduw te werpen en ergens in Q, met het deel QN van de lijn NZ, den gegeven hoek maakt. In onze figuur, waar wij dit plaatje om QR neergeslagen hebben afgebeeld, is dus PQ de genoemde scherpe kant en $\text{hoek } PQR = 51^{\circ}30'$. Is dit plaatje verticaal opgerigt, dan is PQ evenwijdig met de as der aarde, en des middags ten 12 ure, als de zon juist in het zuiden is, valt de schaduw van PQ langs QN.

Nemen wij het vlak van het plaatje als verticaal projectievlak aan, en trekken wij, door eenig punt E van NZ, de lijnen $E, E,$ loodregt op NZ en $EE,,$ loodregt op PQ, dan zijn dit de doorgangen van een vlak, dat evenwijdig met het vlak van den evennachtscirkel is, en de opgerigte lijn PQ in e regthoekig snijdt. De twaalf uurvlakken, door deze lijn gebragt, worden dan door het vlak ($E, EE,,$) volgens de beenen hunner standhoeken gesneden, en deze standhoeken bevatten ieder het $\frac{1}{24}^{\text{ste}}$ deel van 360° , dat is 15° .

Slaan wij nu het vlak ($E, EE,,$) om den horizontalen doorgang $E, E,$ achterover op het horizontale vlak neer, dan vinden wij de plaats e_1 waar het punt e van de opgerigte lijn PQ komt te vallen, door $Ee_1 = Ee$ te nemen.

In dit neergeslagen vlak, kunnen wij dan, uit het punt e_1 , de beenen der genoemde standhoeken, waarvan er een langs $e_1 E$ valt, onmiddellijk trekken, door al die hoeken gelijk aan 15° te maken. De punten, waarin de lijn $E, E,$ door de beenen der alzoo geconstrueerde standhoeken gesneden wordt, blijven op hunne plaats, wanneer het vlak ($E, EE,,$) weder opgerigt wordt; die snijpunten zijn dus punten, zoowel van de uurvlakken, als van het horizontale vlak; derhalve zullen lijnen, uit Q door deze punten getrokken, de horizontale doorgangen der twaalf uurvlakken zijn. Onder

(*) Dit is nagenoeg de breedte van Breda.

die doorgangen is er echter een, die naar een op E_1E_2 oneindig ver afgelegen snijpunt getrokken moet worden, en dus evenwijdig met E_1E_2 loopt.

Langs deze doorgangen Q_1 , Q_2 , Q_3 , enz., die wij, volgens den zin waarin de zon hare schijnbare dagelijksche beweging volbrengt, met de cijfers 1, 2, 3, enz. tot 12 gemerkt hebben, valt dan de schaduw van den scherpen kant van het opgerigte plaatje PQR , juist wanneer het zoo laat is als door deze cijfers wordt aangeduid. Wij hebben derhalve hier eenen zonnewijzer, tot wiens naauwkeurige aanwijzing nu echter vereischt wordt, dat het vlak van het bord steeds horizontaal, en de lijn NZ steeds noord- en zuid-waarts gerigt blijft, alsmede dat men dien niet anders gebruikt dan op plaatsen, die nagenoeg den hoek PQR tot geographische noorderbreedte hebben.

WERKSTUKKEN TOT OEFENING.

(Vervolg van bladz. 140.)

49. Een cirkel, wiens middelpunt gegeven is, heeft eene gegevene ellips tot horizontale projectie. Men wil de verticale projectie van dien cirkel construeren.

50. Door een gegeven punt eener gegevene kromme lijn van dubbele kromming, eene horizontale lijn te trekken, die de kromme lijn regthoekig snijdt.

51. Door het snijpunt van twee gegevene kromme lijnen eene regte lijn te trekken, die regthoekig op de beide krommen is.

52. Met een gegeven straal eenen cirkel te beschrijven, die eene gegevene kromme lijn van dubbele kromming, in een gegeven punt, op de volkomenste wijze raakt (zie § 190).

53. Eene kromme lijn, op een gegeven cilindervlak beschreven, heeft eene gegevene regte lijn tot verticale projectie. Men wil de horizontale projectie van die kromme construeren.

54. Eene kromme lijn, op een gegeven kegelvlak beschreven, heeft eene gegevene regte lijn tot horizontale projectie. Men begeert hare verticale projectie te construeren.

55. Een regt cirkelvormig cilindervlak te construeren, welks as een gegeven hellenden stand heeft, en welks oppervlak door een gegeven punt gaat.

56. Een regt cirkelvormig kegelvlak te construeren, indien zijn top, zijn tophoek, en de snijpunten van zijne as met de projectievlakken, gegeven zijn.

57. Als van een omwentelingsvlak met verticale as, de projectiën van een willekeurigen meridiaan gegeven zijn, wil men de hoofdmeridianen construeren.

58. Het oppervlak te construeren beschreven door eene rechte lijn van bepaalde lengte, wier uiteinden zich bewegen langs twee rechte rigtlijnen, waarvan er eene loodrecht op het horizontale vlak staat.

59. Den stand eener beschrijvende lijn te vinden van het oppervlak des scheeven tongewelfs, indien gegeven zijn de in het horizontale vlak liggende middellijnen der tot rigtlijnen dienende halve cirkels (zie § 235, 6°).

60. De gemeene doorsnede te construeren van een horizontaal, verticaal, of hellend plat vlak, met :

- a. de kegelvormige wig van WALLIS;
- b. een algemeen ontwikkelbaar oppervlak;
- c. het ligchaam voortgebracht door de wenteling van een cirkel om een zijner raaklijnen.

61. De snijpunten te vinden van eene gegebene rechte lijn :

- a. met een gegeven kegelvlak;
- b. met een gegeven cilindervlak;
- c. met een gegeven omwentelingsvlak.

62. De gemeene doorsnede te construeren :

- a. van een algemeen ontwikkelbaar oppervlak met een bol;
- b. van een gewonen cirkelvormigen kegel met een dergelijken cilinder; aannemende dat hunne assen elkander reghoekig snijden, en dat de as des kegels loodrecht op het horizontale vlak staat.

63. Eene rechte lijn te construeren, die evenwijdig is met twee gegebene evenwijdige lijnen, en die van elk dezer lijnen eenen gegeven afstand heeft.

64. Een punt te bepalen dat op gegebene doch verschillende afstanden verwijderd is :

- a. van drie gegebene rechte lijnen;
- b. van twee gegebene rechte lijnen en een gegeven punt;
- c. van twee gegebene punten en eene gegebene rechte lijn.

65. Een punt te bepalen dat op gegebene doch verschillende afstanden verwijderd is van een gegeven punt, eene gegebene rechte lijn, en een gegeven plat vlak.

66. Van eene driehoekige piramide, die met haar grondvlak op het horizontale vlak staat, zijn behalve dat grondvlak ook nog gegeven de hoeken, die de opstaande ribben met het grondvlak maken. Men begeert den top dezer piramide te construeren.

67. Van een gewonen kegel, die door een bol gesneden wordt (zie § 253, Fig. 167), begeert men het oppervlak, met de daarin aanwezige kromme lijn van doorsnijding, te ontwikkelen.

68. Er is een gewone kegel met verticaal staande as gegeven. Men wil de projectiën van eene op zijn oppervlak liggende kromme lijn bepalen, zoodanig dat die kromme lijn, bij de ontwikkeling des oppervlaks, in een cirkel overgaat.

69. Door een gegeven punt des oppervlaks een rakend vlak te brengen aan:

a. de kegelvormige wig van WALLIS;

b. den gewonen cirkelvormigen ring.

70. Van een rakend vlak aan een gegeven omwentelingsvlak is de horizontale doorgang gegeven. Men wil den verticalen doorgang construeren.

71. Door een gegeven punt een gemeenschappelijk rakend vlak te brengen, aan twee gegeven omwentelingsligchamen met verticale assen.

72. Een regelmatig achthoekig prisma, dat met zijn grondvlak γ het horizontale vlak staat, en in welks bovenvlak een cirkel beschreven is, in perspectief te brengen.

73. De regelmatige ligchamen in perspectief te brengen, naar wier projectiën in n°. 28 (bladz. 142) gevraagd is.

74. Van twee balken, die de gedaante van regthoekige parallelipedums hebben, ligt er een op het horizontale vlak, terwijl de tweede met eene ribbe op het horizontale vlak, en met een zijvlak op eene ribbe van den eersten rust. Men begeert deze ligchamen in perspectief te brengen.

75. Van een regelmatigen vijfhoek, die in een hellend vlak ligt, is de perspectief gegeven. Men begeert de vergaarpunten te vinden van de perspectieven der lijnen, die evenwijdig met de zijden des vijfhoeks loopen, en daaruit de perspectief van zijn middelpunt af te leiden.

76. Twee gewone cirkelvormige cilinders van gelijken straal, wier assen elkander regthoekig snijden, liggen met hunne beschrijvende lijnen op het horizontale vlak. Men wil hunne isometrische perspectief construeren.

77. Een gewone cilinder, die met zijn grondvlak op het horizontale vlak staat, wordt door een halven bol van gelijken straal overdekt, zoodat het bovenste punt van de as des cilinders tevens

het middelpunt van den halven bol is. Men wil de schaduw construeren door deze lichamen op het horizontale vlak geworpen.

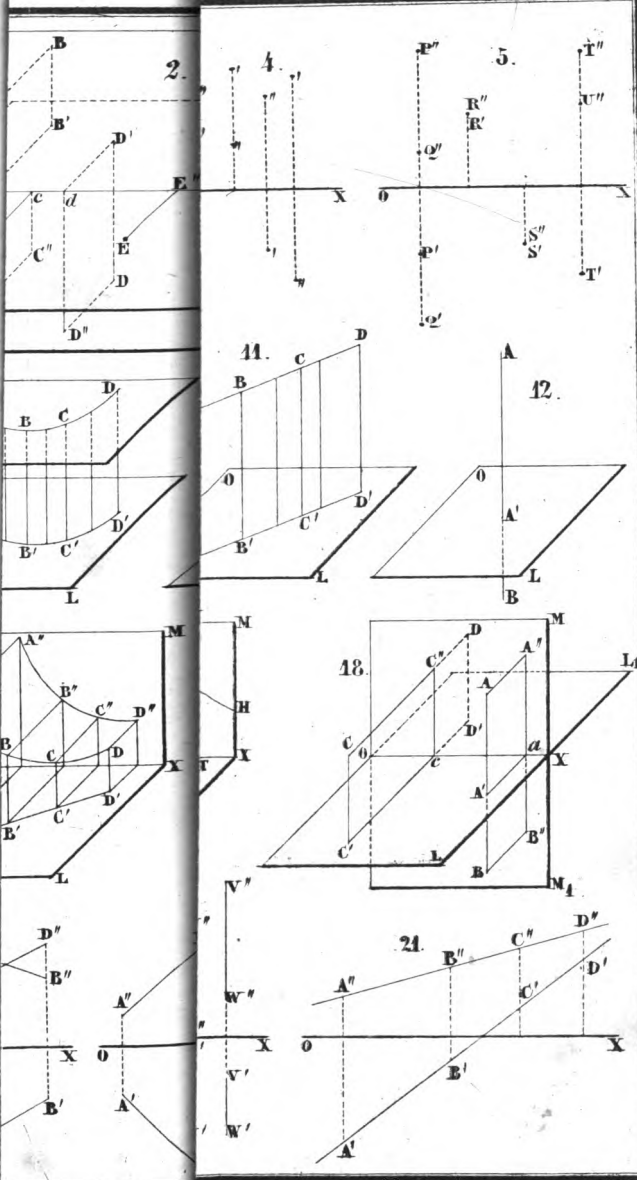
78. Als de genoemde halve bol een grooteren straal dan de cilinder heeft, wil men, behalve de schaduw op het horizontale vlak, ook de schaduw construeren door den halven bol op den cilinder geworpen.

79. Op het horizontale vlak ligt een regthoekig parallelipedum met vierkant grondvlak en van geringe hoogte. Midden op dit parallelipedum als voetstuk, staat eene regelmatige vierhoekige piramide. Men wil de slagschaduw dezer lichamen op het horizontale vlak, en die van de piramide op het voetstuk construeren.

80. De laatstgenoemde lichamen met hunne schaduwen in perspectief te brengen.

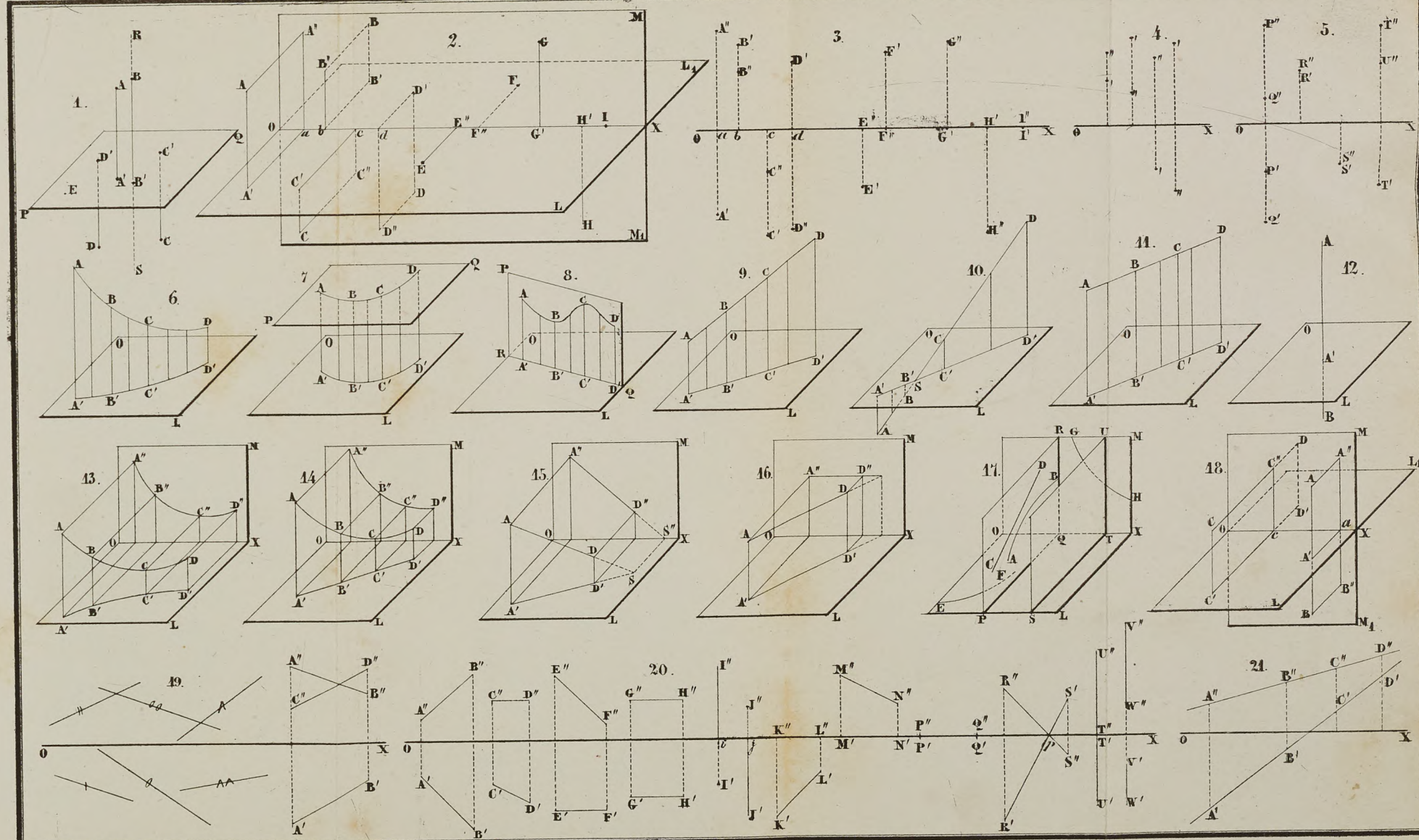
VERBETERINGEN.

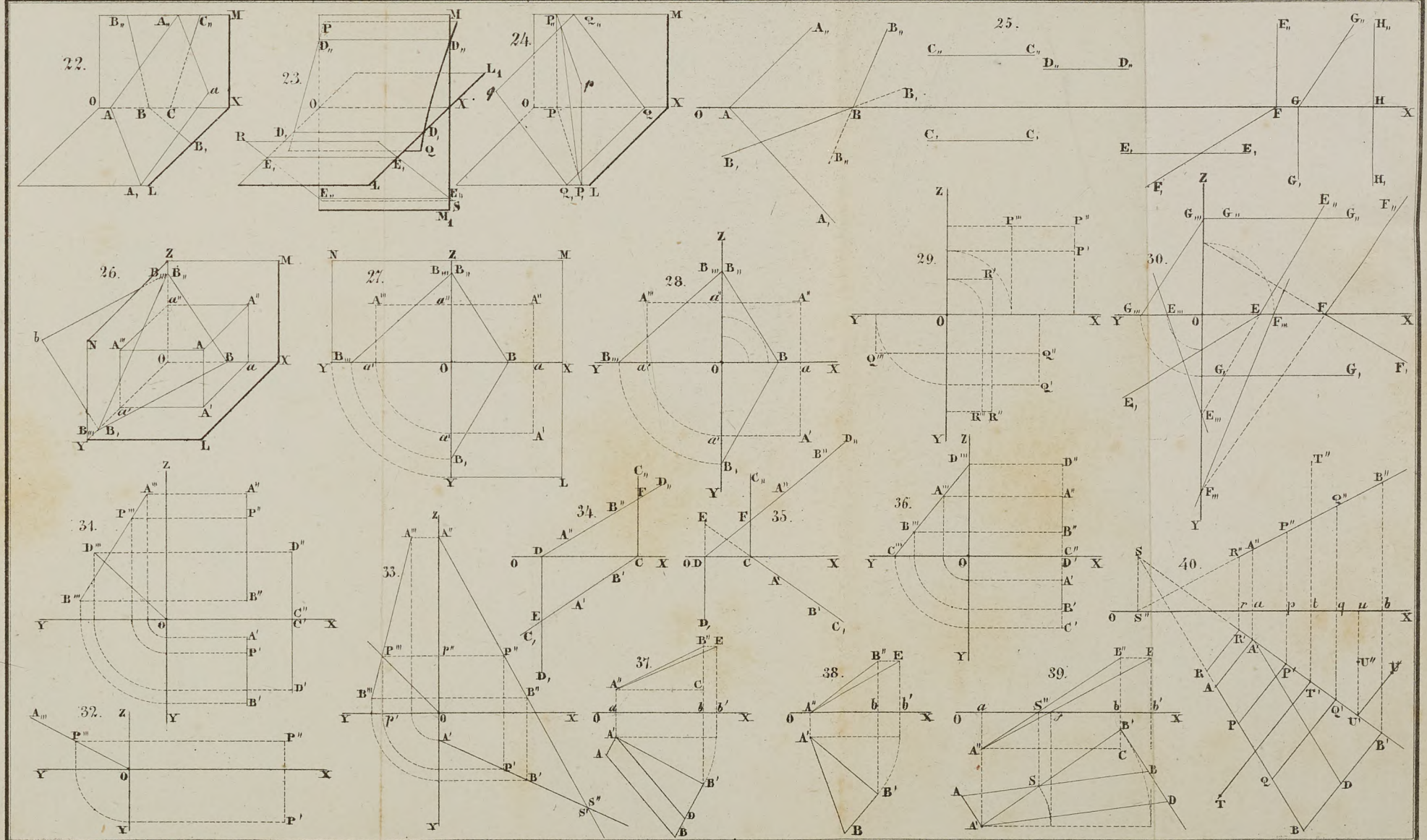
Bladz. 183,	regel 3 v. o.	<i>staat</i> :	verschilende	<i>lees</i> :	verschillende
» 187,	» 5 v. o.	»	Trekt	»	Trek
» 202,	» 11 v. o.	»	P'' en Q''	»	P'' of Q''
» 225,	» 12 v. h.	»	tot	»	top
» 228,	» 13 v. o.	»	C'Q	»	C'Q'
» 247,	in de noot				
	regel 4 v. o.	»	terwiji	»	terwijl

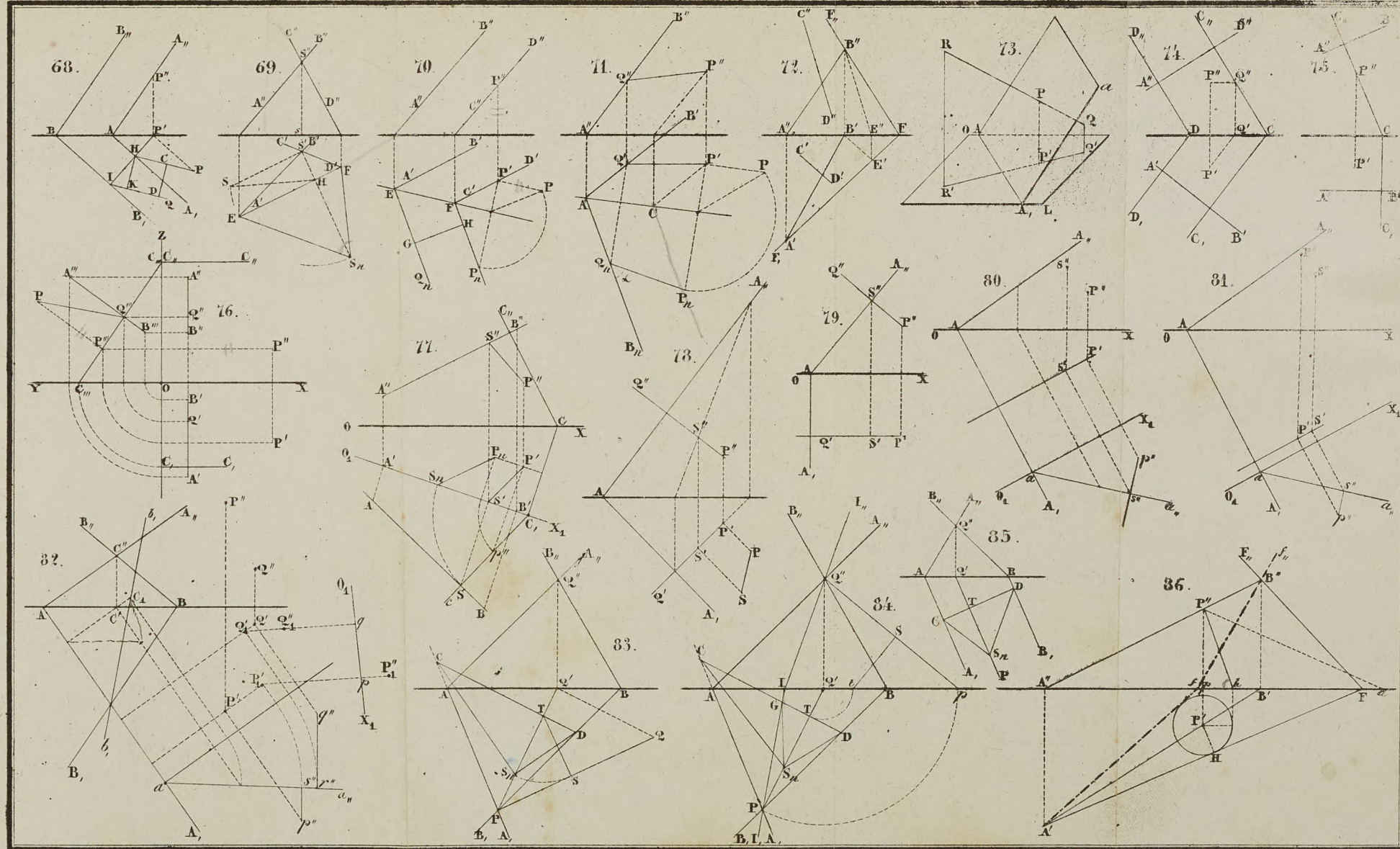


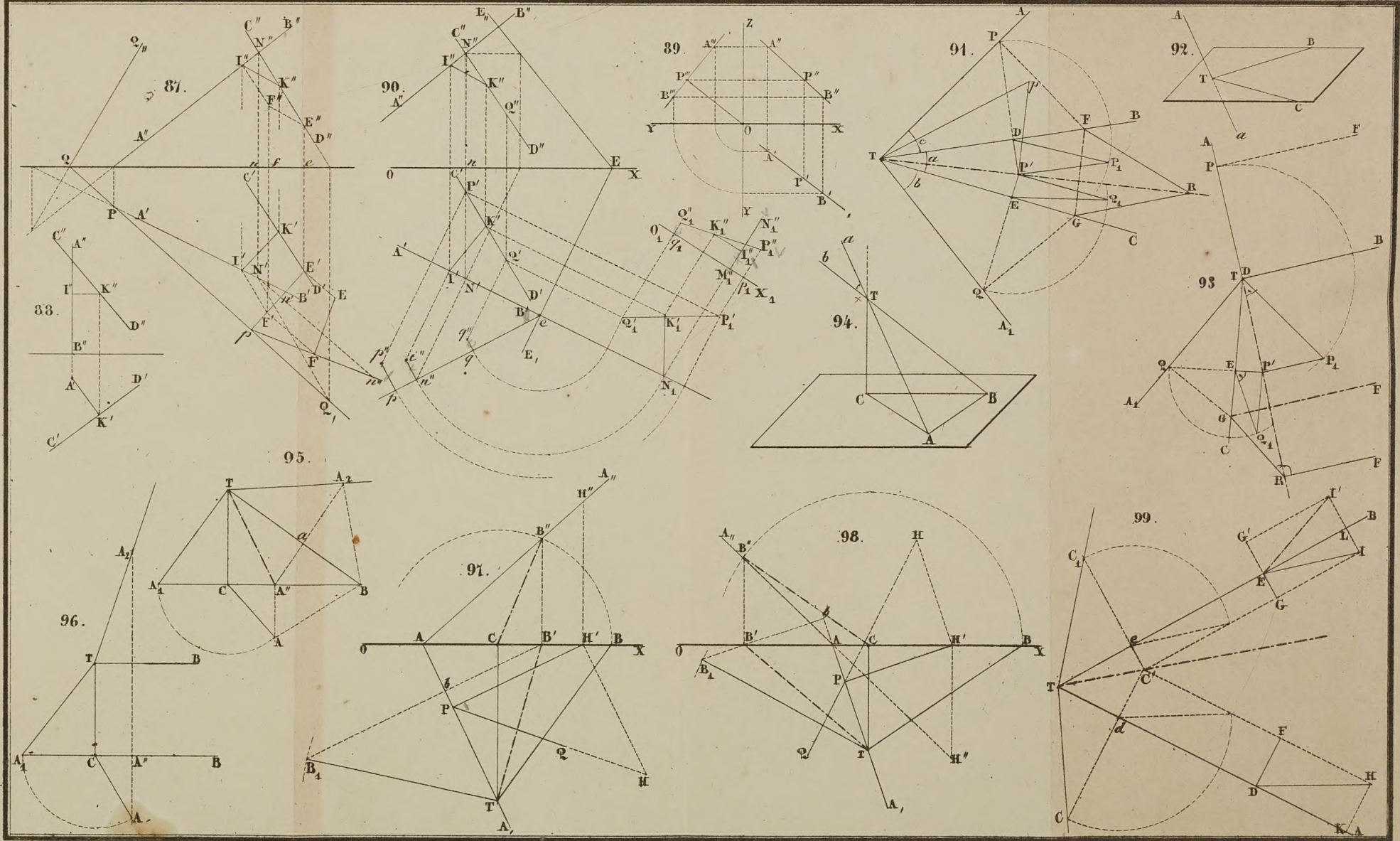
VERBETERINGEN.

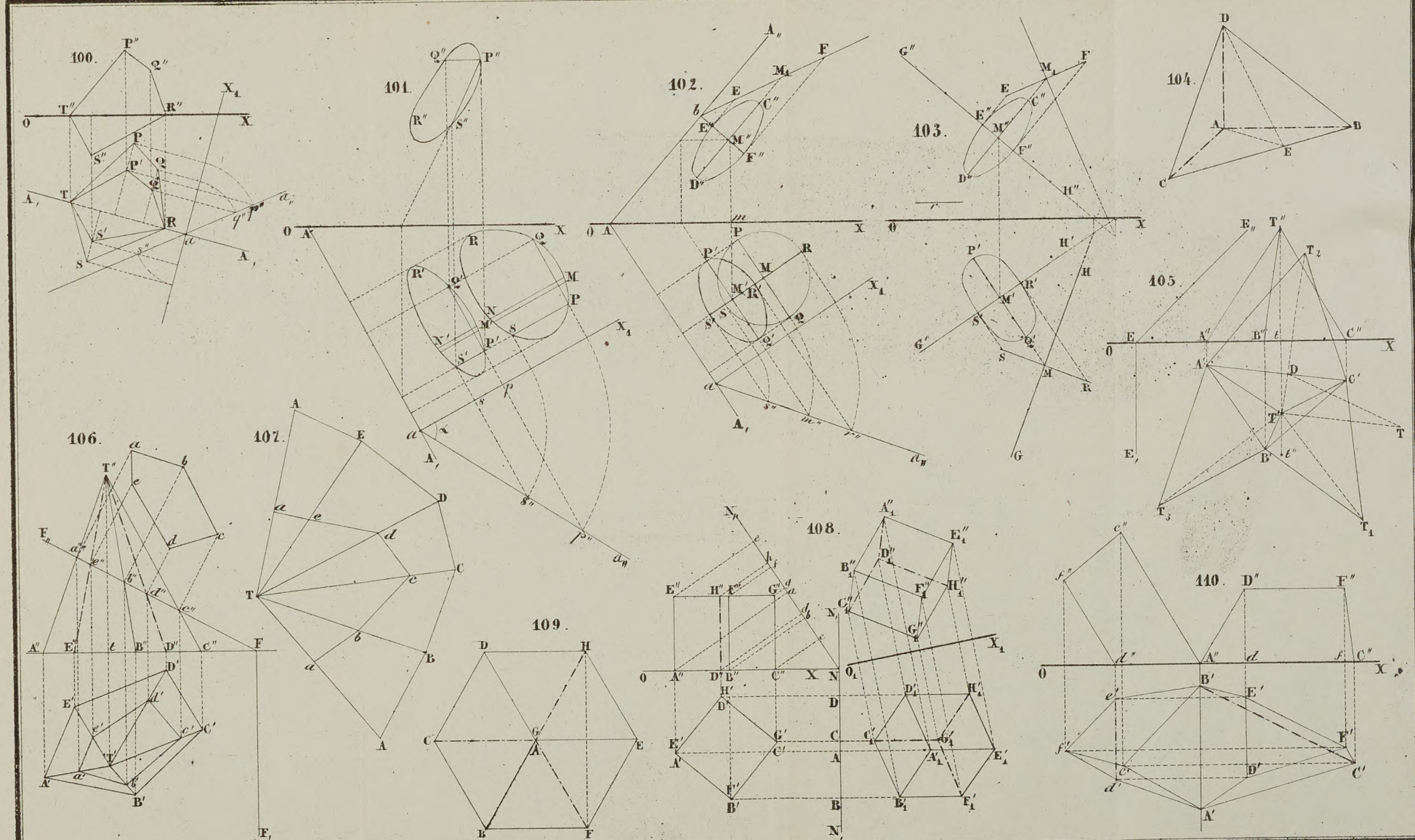
Bladz. 183,	regel 3 v. o.	<i>staat</i> :	verschilende	<i>lees</i> :	verschillende
» 187,	» 5 v. o.	»	Trekt	»	Trek
» 202,	» 11 v. o.	»	P'' en Q''	»	P'' of Q''
» 225,	» 12 v. h.	»	tot	»	top
» 228,	» 13 v. o.	»	C'Q	»	C'Q'
» 247,	in de noot				
	regel 4 v. o.	»	terwiji	»	terwijl

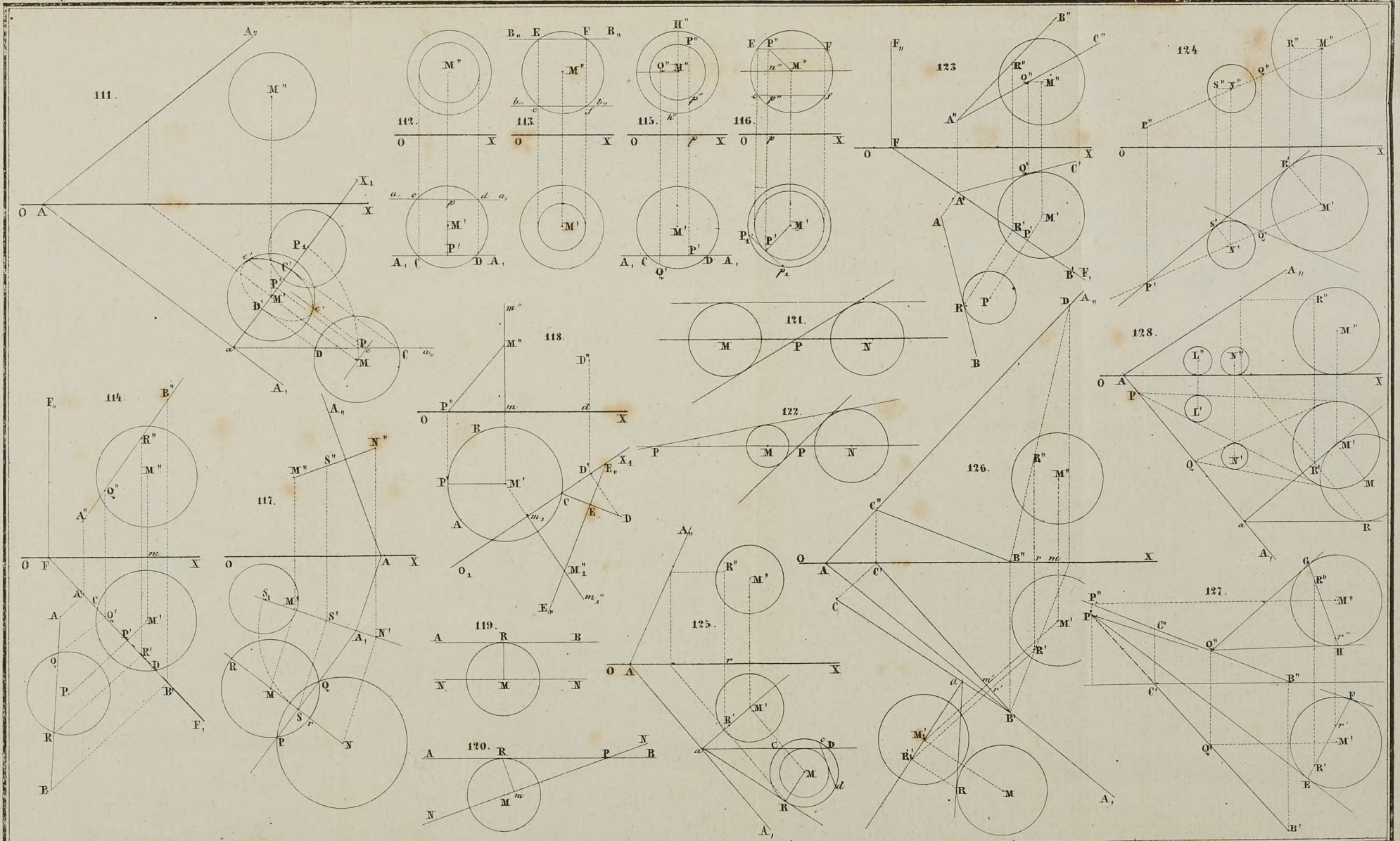


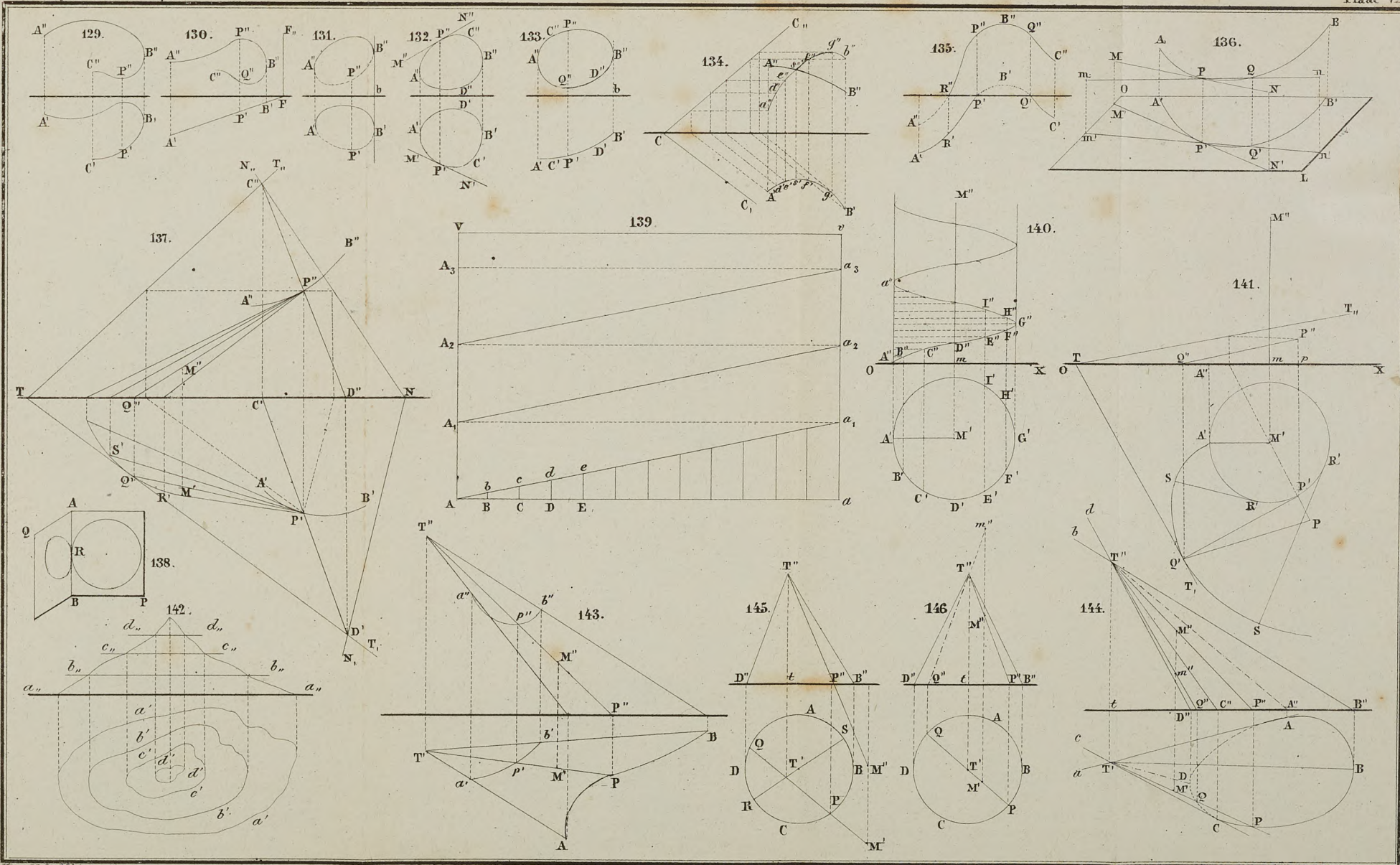


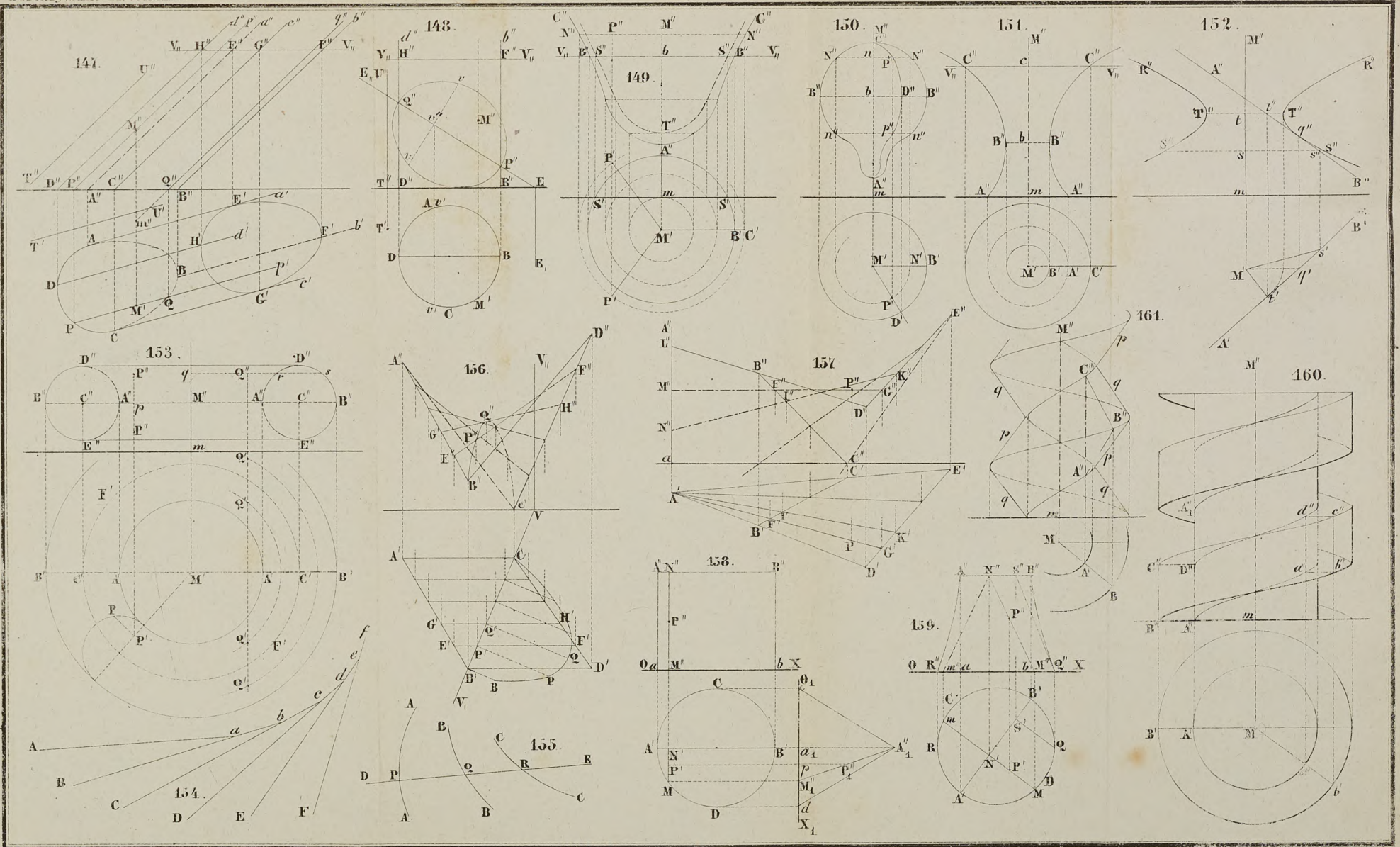


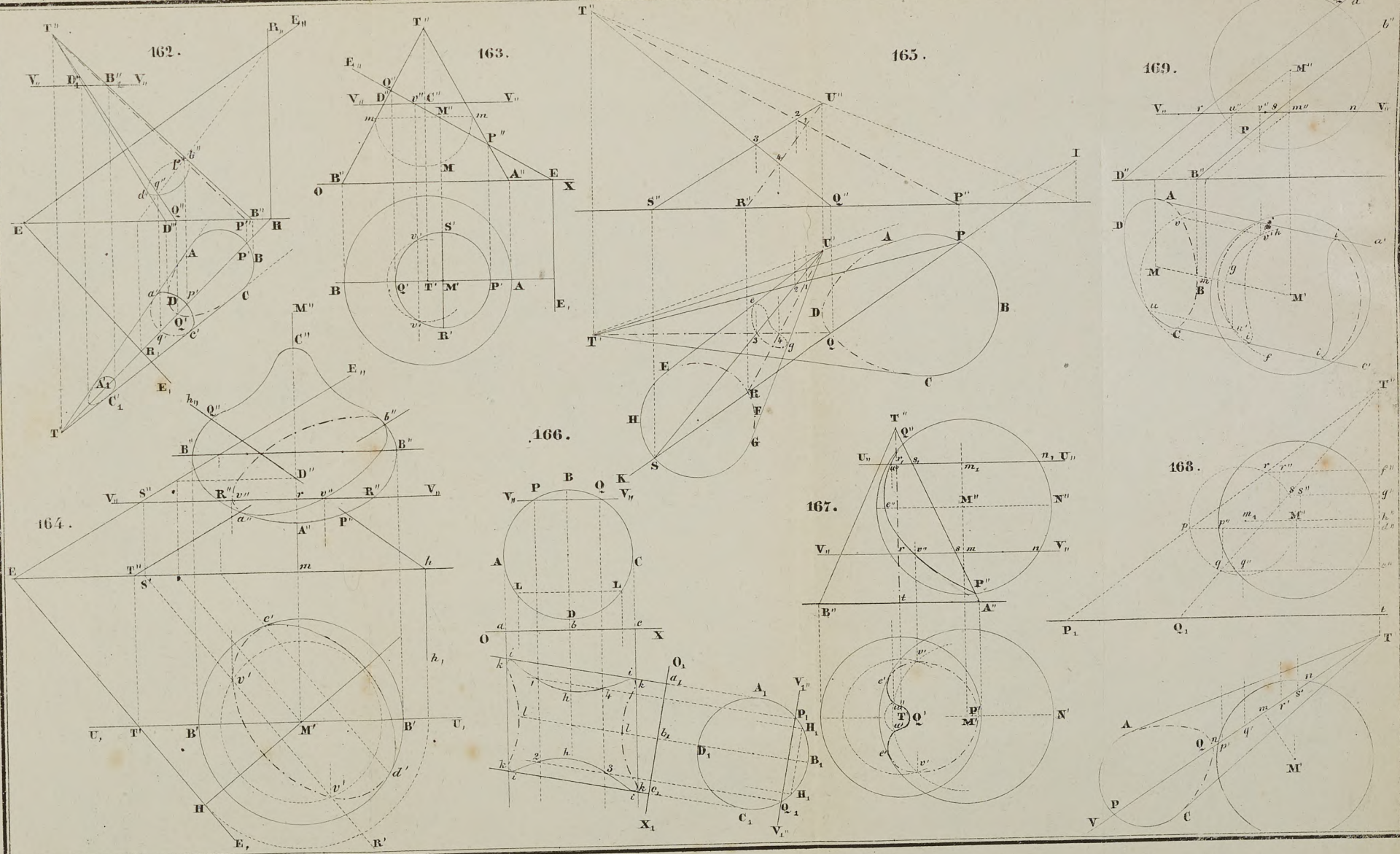


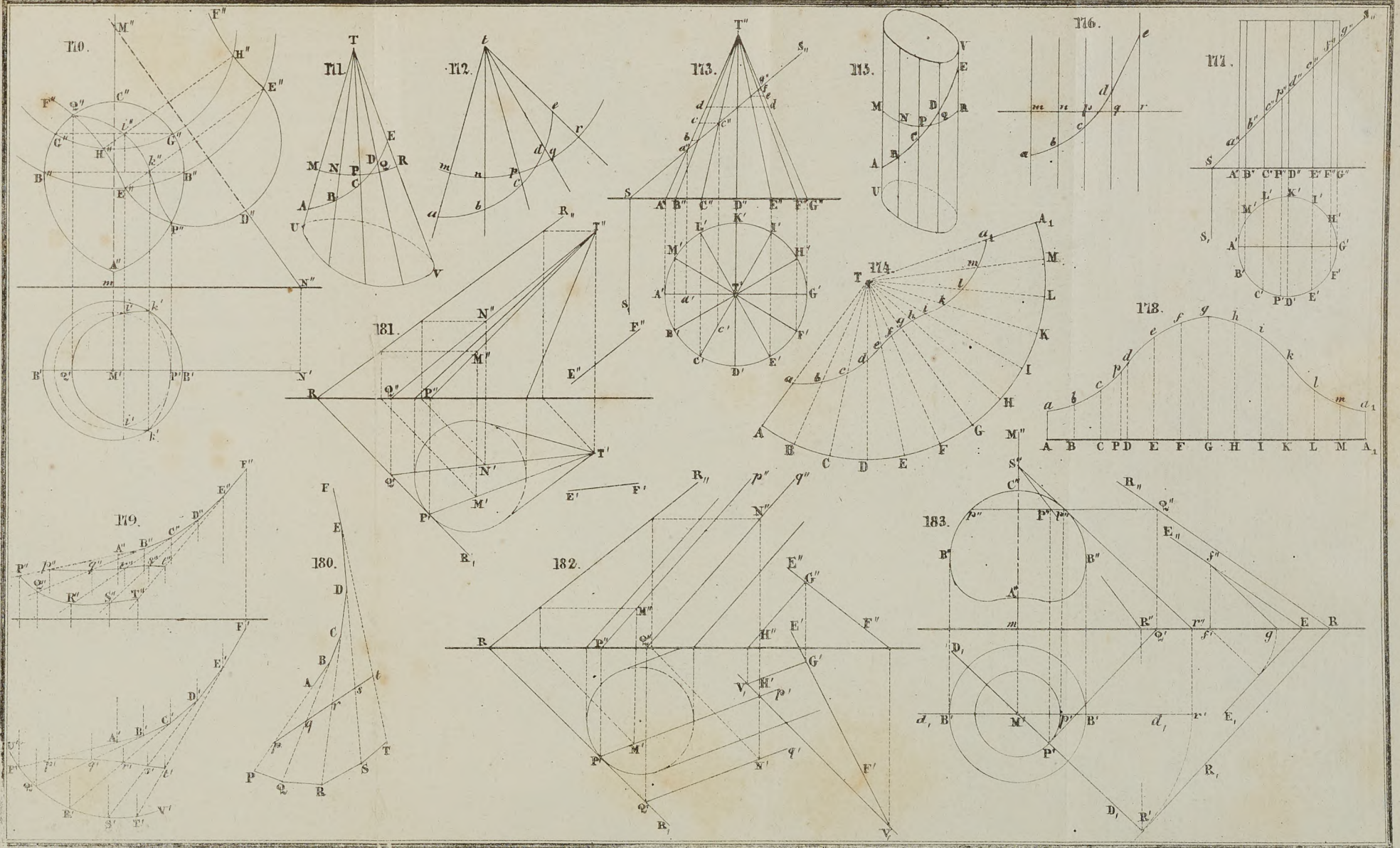


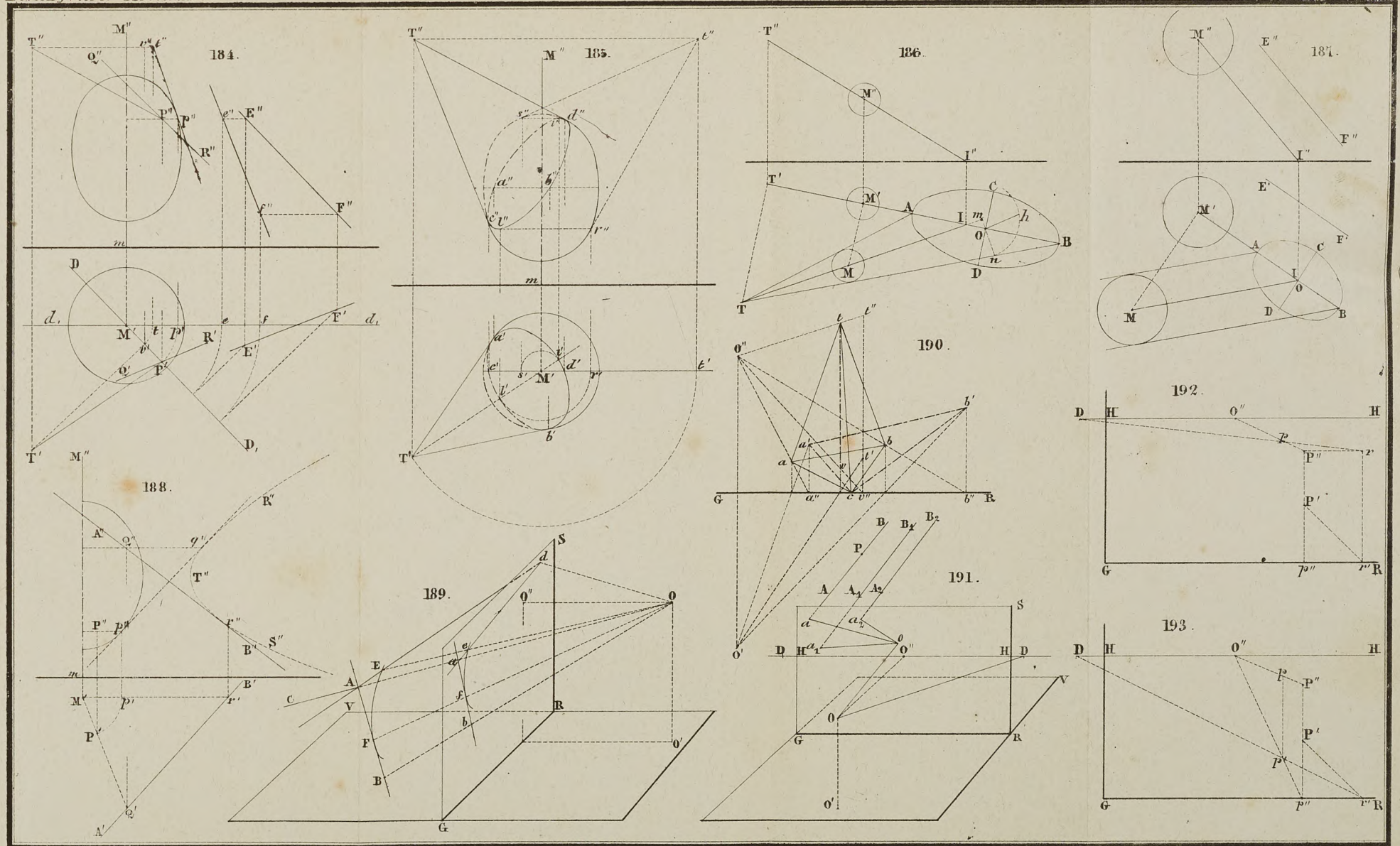


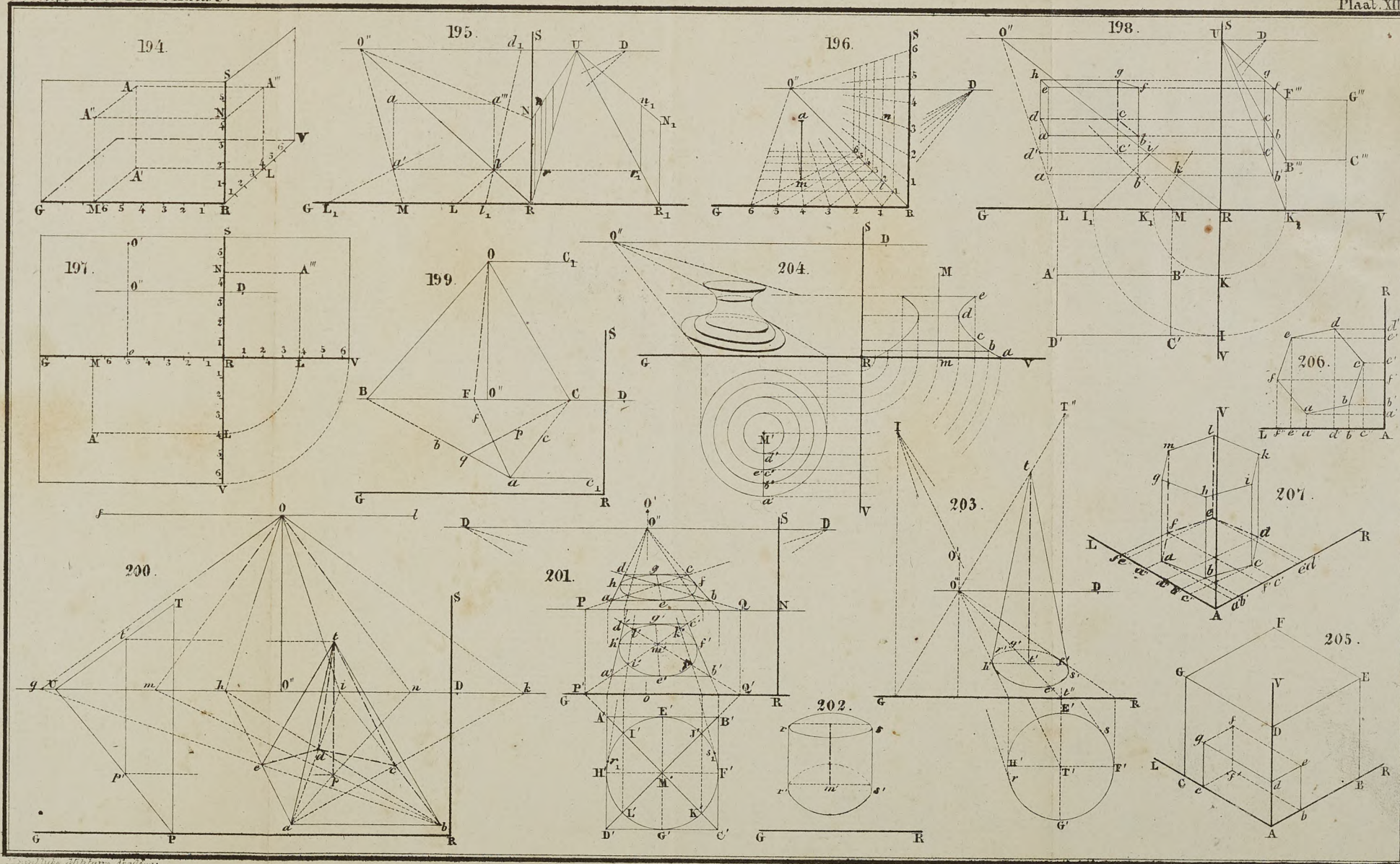


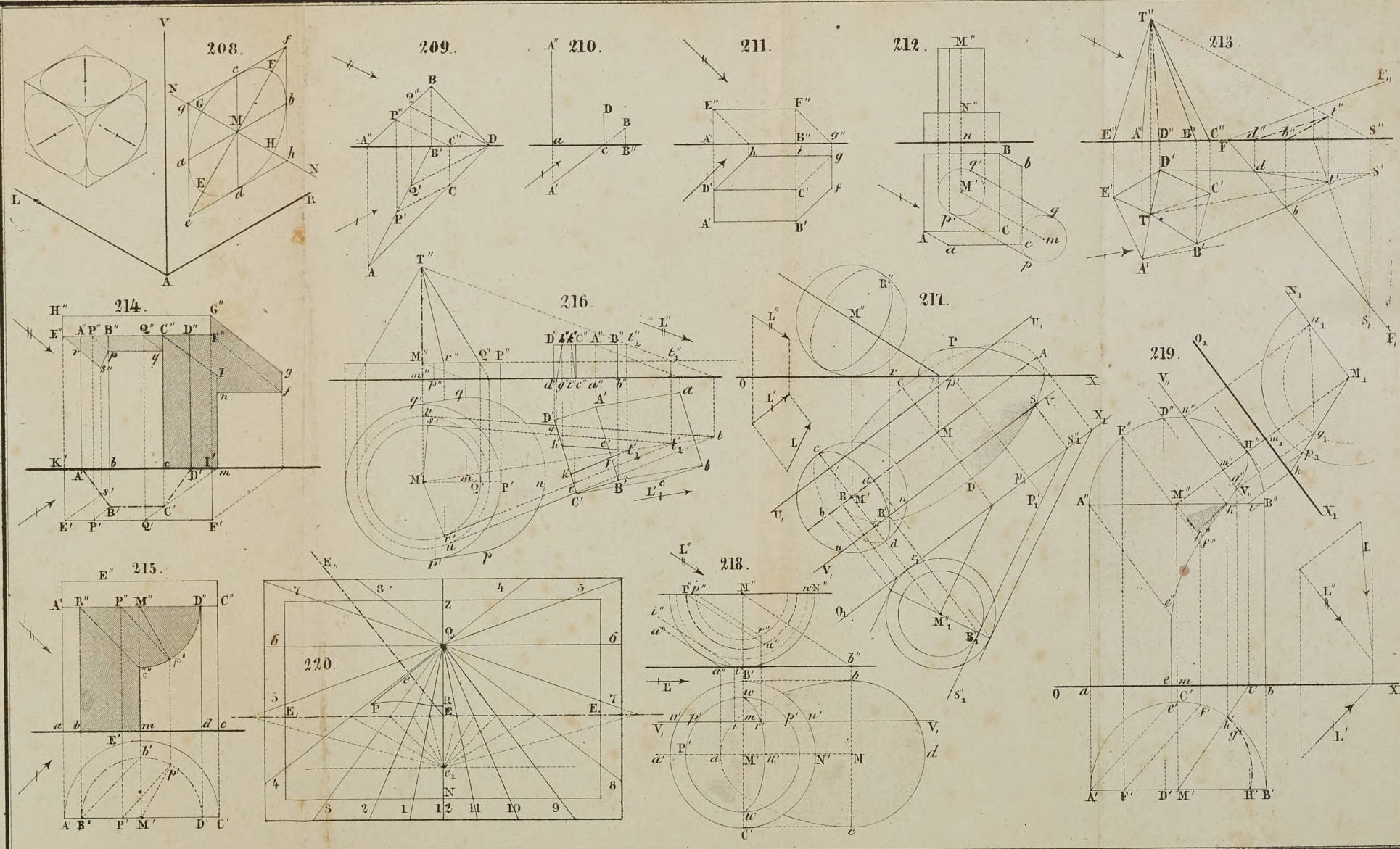












0

