Over rijen van Fibonacci, Lucas en generalisaties.

Math Dicker

June 27, 2022

Inleiding. De rij van Fibonacci is de rij 1,1,2,3,5,8,....etcetera. De rij van Lucas is de rij 2,1,3,4,7,11,...etcetera. We formuleren het wat algemener en beschouwen een rij die als volgt gedefinieerd is: $a_1 = a, a_2 = b$ en $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ voor $n \geq 3$. Hierbij zijn a en b natuurlijke getallen. Zo'n rij noemt men ook wel een **gegeneraliseerde Fibonacci rij**. Als we a=b=1 nemen dan krijgen we de Fibonacci rij, als we a=2, b=1 nemen dan krijgen we de Lucas rij.

We zijn nu geïnteresseerd in de quotientenrij $q_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ voor $n \geq 3$. Merk op: $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$ voor $n \geq 4$. Er geldt nu het volgende:

Stelling a.

De rij quotiënten van een gegeneraliseerde Fibonacci rij convergeert naar Φ , de Gulden Snede.

We zullen dit via een kleine omweg aantonen. We bewijzen eerst een andere stelling en die passen we dan toe op de voornoemde quotientenrij q_n.

Beschouw de functie $\psi(x) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$. Laat x een getal zijn $\in (0, \Phi) \cup (\Phi, -)$, met Φ de Gulden Snede. Formeer de rij θ_n waarbij $\theta_1 = x$ en $\theta_{n+1} = \psi(\theta_n)$ voor $n \geq 1$. Er geldt: Als x $\in (0, \Phi)$ dan $\psi(x) \in (0, \Phi)$ en $\psi(x) > x$; als x $\in (\Phi, -)$ dan $\psi(x) \in (\Phi, -)$ en $\psi(x) < x$ Het bewijs hiervan is een kwestie van uitschrijven. Wat hieruit direct volgt is:

Stelling b.
De rij θ_n convergeert en de limiet is Φ omdat $\Phi = \psi(\Phi)$.

We komen nu terug op de in het begin genoemde quotiëntrij q_n van de gegeneraliseerde Fibonacci rij. Beschouw daarin de deelrijen q_3, q_5, q_7, q_9,....etcetera en q_4, q_6, q_8, q_{10},....etcetera . Op deze rijen is stelling b van toepassing en daarmee is ook stelling a bewezen.

Wat we ook willen is **een expliciete formule** voor de gegeneraliseerde Fibonacci rij, dus geen recursie formule. We gaan daartoe als volgt te werk: laat

α en β de verschillende oplossingen zijn van de vergelijking $x^2 - x - 1 = 0$. Dus $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (de Gulden Snede) en $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; er geldt ook $\alpha + \beta = 1$ en $\alpha * \beta = -1$. Er geldt nu de volgende stelling waarvan ik het bewijs overlaat aan de lezer.

Stelling c: expliciete formules voor de rijen (Francois Edouard Binet).

Als a en b de startwaarden zijn voor de gegeneraliseerde Fibonacci rij $\phi(n)$ dan geldt dat een expliciete formule voor deze rij is:

1] $\phi(n) = A\alpha^n + B\beta^n$ waarbij A en B als volgt bepaald worden: $A = \frac{b-a\beta}{2+\alpha}$ en $B = \frac{b-a\alpha}{2+\beta}$;

2]voor de Fibonacci rij $F(n)$ geldt $F(n) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}$

3]voor de Lucas rij $L(n)$ geldt $L(n) = \frac{\alpha^n + \beta^n}{\alpha+\beta}$

Het bewijs gaat via volledige inductie en het oplossen van de A en B bij de startwaarden. Bewijs eerst dat de rij $\phi(n) = A\alpha^n + B\beta^n$ voldoet aan de recursievergelijking $\phi(n+2) = \phi(n+1) + \phi(n)$; door dan $\phi(1)$ en $\phi(2)$ de waarden a en b te laten aannemen vind je de gegeneraliseerde Fibonacci rij.

Opmerking: Uit de expliciete formule voor de gegeneraliseerde Fibonacci rij volgt ook dat $\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n+1)}{\phi(n)} = \Phi$; maar dan moet je wel eerst de expliciete formules vinden. Wat je ook vrij makkelijk kunt zien aan de expliciete formule van de Lucas rij is, dat $L(n)$ op den duur gelijk is aan het natuurlijke getal dat het dichtste ligt bij Φ^n; dit komt omdat het rijtje β^n zeer snel naar 0 convergeert en $\alpha + \beta = 1$.

Stelling d: Een verband tussen de Lucas rij en de Fibonacci rij (ontdekt door P.Schub).

Er geldt $L(n)^2 = 5F(n)^2 + 4(-1)^n$

Immers, we weten $\sqrt{5}\ F(n) = \alpha^n - \beta^n$ en daaruit volgt $5F(n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(-1)^n$. Net zo $L(n) = \alpha^n + \beta^n$ en dus $L(n)^2 = \alpha^{2n} + \beta^{2n} + 2(-1)^n$. Door te combineren volgt de bovenstaande eigenschap.

Gevolg: Als n een natuurlijk getal is dat een Fibonacci getal is dan is $5n^2 + 4$ of $5n^2 - 4$ een kwadraat. Het omgekeerde geldt ook maar is niet makkelijk te bewijzen. Zie hiervoor het boek van Thomas Koshy Theorem 5.4.

Stelling e: Twee opeenvolgende getallen uit de gegeneraliseerde Fibonacci rij hebben de ggd(a,b) als grootste gemene deler waarbij a en b de startwaarden zijn. In het bijzonder zijn twee opeenvolgende

getallen uit de Fibonacci rij of Lucas rij relatief priem.

Bewijs: uit de definitie volgt : $ggd(\phi(n+1), \phi(n))$=$ggd(\phi(n), \phi(n-1))$ als $n \geq 2$.